

ЛЕКЦИЯ 7

СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ –

колебания, ам-плитуда которых уменьшается с течение времени, из-за потерь энергии реальной колебательной системой. (например, превращение энергии в теплоту при механических колебаниях).

Обычно рассматривают ЛИНЕЙНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕ-БАНИЯ – идеализированные, реальные колебательные системы, в которых параметры определяющие физи-ческие свойства системы, в ходе процесса не изменя-ются.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\delta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы.

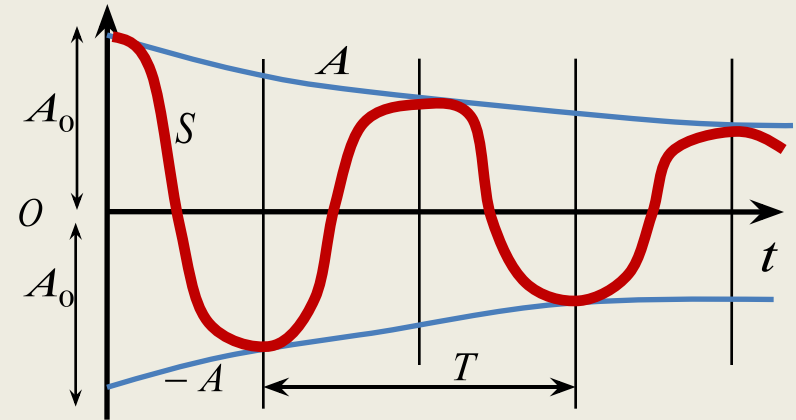
Где:

- S – колеблющаяся величина описывающая физичес-кий процесс.
- $\delta = const$ – коэффициент затухания
- ω_0 – циклическая частота свободных
НЕЗАТУХАЮЩИХ колебаний той же системы (то есть при отсутствии по-терь энергии $\delta = 0$), иначе говоря – собственная цикли-ческая частота

УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Иная форма записи
уравнения затухающих
колебаний:

$$S = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$



Где: начальная амплитуда

• $A = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний

• $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – циклическая частота затухающего колебания

• $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период затухающего колебания

Если амплитуда в момент времени t , и
амплитуда в момент времени $t + T$, то
 $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$ – декремент затухания

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

- Θ – Логарифмический декремент затухания
- N_e – число колебаний совершаемое за время уменьшения амплитуды в e раз
- $\tau = \frac{1}{\delta}$ – время релаксации, (время за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз).
- $Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega_0}{2\delta}$. – добротность
(характеристика колебательной системы, пропорциональна числу колебаний , за время релаксации).

СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРУЖИННОМ МАЯТНИКЕ

Для пружинного маятника массой m , совершающего малые колебания под действием упругой силы $F_{\text{упр}} = -kx$, сила трения пропорциональна скорости $F_{\text{тр}} = -rx'$, где r коэффициент сопротивления.

Закон движения маятника будет иметь вид:

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow mx'' = -kx - rx'$$

- Коэффициент затухания: $\delta = r/(2m)$
- Собственная циклическая частота: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$
- Циклическая частота: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2/(4m^2)}$
- Добротность пружинного маятника: $Q = \frac{1}{r} \sqrt{km}$

Уравнение колебаний маятника:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре имеет

вид:

$$q'' + \frac{R}{L} q' + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

- Коэффициент затухания $\omega = \sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}$
- Частота
- Добротность контура

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Колебания заряда совершаются по закону:

$$q = q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

При увеличении δ период затухающего колебания T рас-тет, и при $\delta = \omega_0$ $T = \infty$ обращается в бесконечность то есть движение перестает быть

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Что бы в реальной колебательной системе получить не-затухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора, изменяющегося по периодическому закону

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t)$$

Например, если рассматривают механические колебания, то роль выполняет внешняя вынуждающая сила, если электрический колебательный контур, то внешняя, периодически изменяющаяся ЭДС, или переменное напряжение.

Колебания возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы (или ЭДС)

называются **вынужденными**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Общая дифференциальная формула вынужденных колебаний

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\delta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = X_0 \cos(\omega t)$$

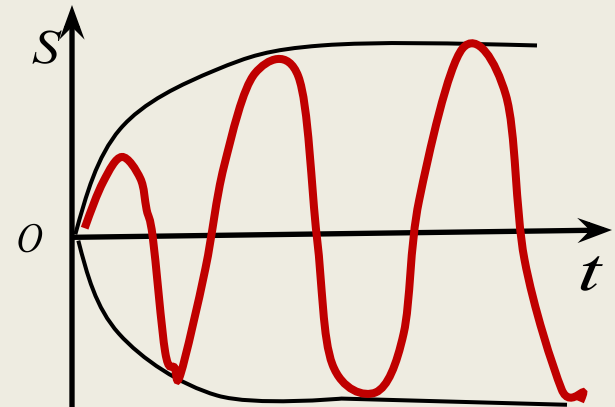
- Для механических колебаний (пружинный маятник)

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = F_0 / m \cdot \cos(\omega t)$$

- Для электромагнитных колебаний

$$q'' + 2\delta q' + \omega_0'^2 q = \frac{m}{L} \cos(\omega t)$$

В установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой и являются гармоническими,



зависят от циклической частоты.

Если период вынуждающей силы не равен периоду свободных колебаний системы, то в начале происходит несколько биений, а затем устанавливаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой.

АМПЛИТУДА И НАЧАЛЬНАЯ ФАЗА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Установившиеся вынужденные колебания можно считать гармоническими, то есть для механических колебаний, приблизительно можно считать:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = x'$$

$$a = x''$$

Если вывести значения скорости и ускорения

то дифференциальное уравнение колебаний:

$$m A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) + r A \omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) + k A \cos(\omega t + \varphi) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$m A$$

Сократим все части уравнения на и ведём обозначения:

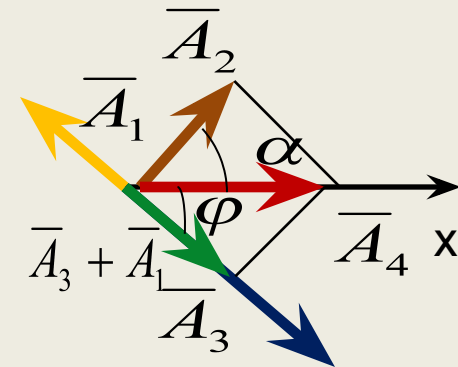
$$A_1 = \omega^2 \quad A_2 = \frac{r}{m} \omega = 2\delta\omega \quad A_3 = \frac{k}{m} \omega_0^2 \quad A_4 = \frac{F_0}{m A}$$

В результате получим:

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi + \pi) + A_2 \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) + A_3 \cos(\omega t + \varphi) = A_4 \cos(\omega t)$$

Правую часть уравнения можно рассматривать как уравнение некоторого гармонического колебания, получившегося от сложения трёх гармонических колебаний, определяемых левой частью

равенства. Для сложения воспользуемся методом векторных диаграмм, так что



. Отсюда можно определить

амплитуду A :

$$\frac{F_0^2}{m^2 A^2} = 4\delta^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \Rightarrow A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний прямо пропорциональна вынуждающей силе.

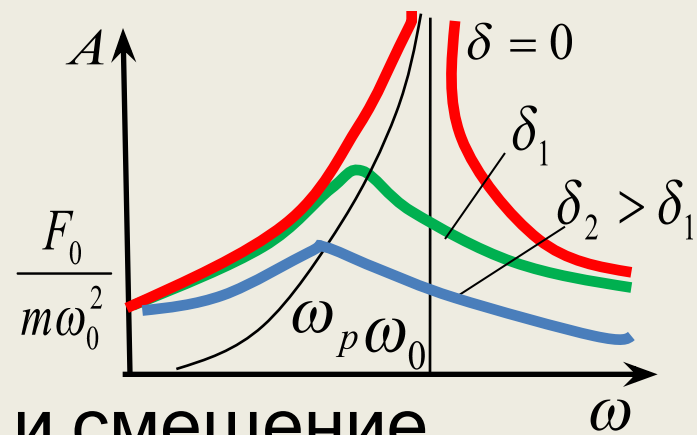
$\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$ — сдвиг фаз между скоростью колебаний и вынуждающей силой.

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A_2}{A_3 - A_1} = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}$$

РЕЗОНАНС

Если F_0 , m , δ не изменяются, то амплитуда A зависит от соотношения ω и ω_0 .



- 1) Если $\omega = 0$, то $A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, и смещение равно статической деформации.
- 2) Если $\delta = 0$, то есть нет затухания, тогда A будет расти при увеличении ω , и при $\omega = \omega_0 \Rightarrow A \rightarrow \infty$, а затем будет убывать $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow 0$.

$$A = F_0 / ((\omega_0^2 - \omega^2)m)$$

- 3) Если затухания существуют, то A достигает максимального значения, когда знаменатель минимален, то есть:
$$\frac{d}{d\omega} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2) = 0$$

Введем понятие ω_p – резонансная частота, - частота, при которой амплитуда смещения достигает своего максимума:

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний, при приближении частоты возбуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте называется – РЕЗОНАНС.

$$A_p = \frac{x_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

ВОЛНЫ

СПЛОШНАЯ СРЕДА – среда непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС – процесс распространения колебаний в сплошной среде.

Колеблущееся материальное тело, помещенное в упругую среду, увлекает за собой, и приводит в состояние колебания прилегающие к нему, частицы среды. Те, в свою очередь воздействуют на соседние частицы и приводят их в колебательное движение. При распространении волны, частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своего положения равновесия. Вместе с волной передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия.

Основным свойством всех волн независимо от их

ВОЛНОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ – совокупность точек колеблющихся в одинаковой фазе.

ФРОНТ ВОЛНЫ – поверхность которая отделяет колеблющиеся частицы, от частиц ещё не пришедших в колебательное движение, или, иначе говоря, геометрическое место точек до которого дошли колебания в момент времени .

Волновых поверхностей огромное количество, но **волновой фронт только один**, и он так же является волновой поверхностью. Волновые поверхности могут быть любой формы, в простейшем случае представляют собой совокупность плоскостей параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно волны бывают плоскими или сферическими.

ВИДЫ ВОЛН

Волны бывают различных типов:

- Волны на поверхности жидкости
- Электромагнитные волны
- Механические (упругие) волны и т. д.

Упругие (механические) волны – механические возмущения распространяющиеся в упругой среде.

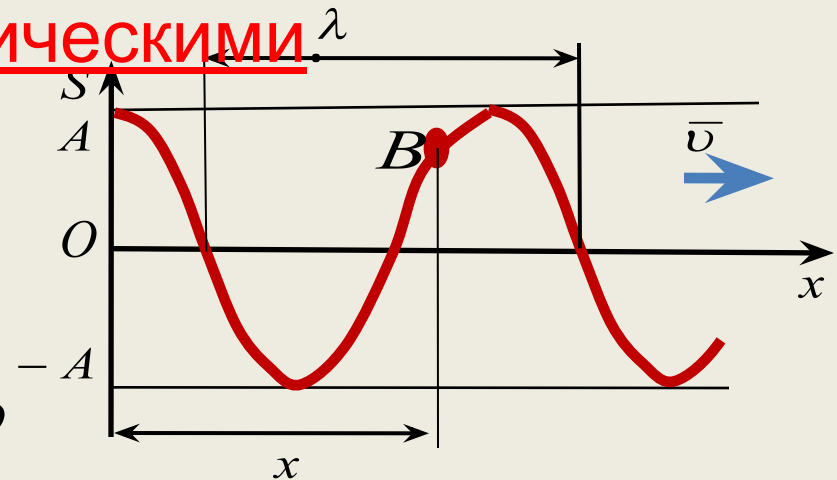
ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ – частицы среды колеблются в направлении распространения волны.

ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ – перпендикулярны направлению распространения колебаний.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Упругая волна называется – ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНОЙ, если соответствующие ей колебания частиц являются гармоническими

Представленная на рисунке гармоническая поперечная волна распространяется вдоль



систе ~~с~~ ~~среды~~ ~~на~~ зависимость между $S(\xi)$
 смещением частиц среды участвующих в
 волновом процессе и расстояния от этих
 частиц (B) до источника колебаний (O) в момент $S(x, t)$
 времени. Приведенный график похож, но
принципиально отличается от графика гар-
 монических колебаний, так как выражает
 зависимость смещения всех частиц среды от
 расстояния до источника колебаний. а график

колебания данной частицы от времени.

ДЛИНА ВОЛНЫ λ – расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе. Она равна тому расстоянию, на которое распространяется определённая фаза колебания за период

$$\lambda = vT \Rightarrow v = \lambda \frac{1}{T} = \lambda \nu$$

ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ (ВОЛНЫ) – ν
СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ – v

Пусть частица в начальной точке О совершает колебания $s(t) = A \cos \omega t$, до некоторой точки В волна дойдет за время $t = x/v$. Колебания в точке В начнутся с опозданием тем большим, чем дальше она отстоит от исходной точки О

Смещение точки В в момент времени t , будет равно
 смещению точки О в момент времени $t' = t - \tau = t - x/v$

$$S = A \cos(\omega(t - x/v)) = A \cos(\omega t - \omega x/v)$$

Уравнение плоской волны распространяющейся
 вдоль положительного направления оси x в среде,
 не поглощающей энергию:

$$S(x, t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0)$$

$A = \text{const}$ амплитуда волны

ω_0 – циклическая частота волн

φ_0 – начальная фаза колебаний (определяемая
 выбором начала отсчета, x и t).

$(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0)$ — фаза плоской волны

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

— волновое число

Иная форма записи уравнения плоской волны

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Представим, что в волновом процессе фаза $\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}$, продифференцируем: $\frac{\omega}{dt} dx = 0$, разделим на ω и получим $\frac{dx}{dt} = v$

Скорость распространения волны — это скорость перемещения фазы, и её называют ФАЗОВОЙ СКОРОСТЬЮ.

Выше был рассмотрен случай плоской волны, уравнение **СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ** – волновые поверхности которой имеют форму концентрических сфер, записывается как :

$$S(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки

В случае сферической волны, даже если среда не поглощает энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием (справедливо для тех случаев, когда расстояния много больше размеров источника сигнала).

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Распространение волн в однородной изотропной среде, в общем случае записывается **ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ** – специальным дифференцированным уравнением в частных

производных

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$
v – оператор Лапласа
– фазовая скорость

Решением этого уравнения является уравнение любой волны (любого типа волн)

Волновое уравнение для одномерного (вдоль оси x) распространения волны.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Если среда, в которой одновременно распространяются несколько волн, **линейна**, то есть её свойства не изменяются под действием возмущений создаваемых волной, то к этим волнам применим **ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ (НАЛОЖЕНИЯ) ВОЛН**. При наложении в линейной среде нескольких волн, каждая из них распространяется независимо от других, как будто иные волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из составляемых волновых процессов. Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте,

Пусть имеется волновой пакет из двух
 расположенных вдоль оси x горизонтальных волн
 с одинаковыми амплитудами, близкими
 частотами и волновыми числами т. е.:

Тогда:

$$S = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x) =$$

$$= 2A_0 \left(\cos \frac{td\omega - xdk}{2} \right) \cos(\omega t - kx)$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что её
 амплитуда есть медленно изменяющаяся
 функция координаты и времени :

$$A = \left| 2A_0 \left(\cos \frac{td\omega - xdk}{2} \right) \right|$$

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

Результат сложения колебаний двигающихся в одном направлении определяется соотношением фаз этих колебаний. Если фазы противоположны, то результирующая амплитуда минимальна, если совпадают то максимальна. Каждый момент времени максимальной амплитуды группы волн, соответствует тому участку пространства в котором сосредоточен максимум энергии волны. Эта точка называется центром группы волн, и так как фазы группы волн со временем меняются, то и центр группы волн, за некоторое время, перемещается с некоторой скоростью. Иначе говоря:

За ГРУППОВУЮ СКОРОСТЬ принимают скорость

перемещения максимума амплитуды волн

Для уравнений выполняется условие:

$$td\omega - xdk = \text{const} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = 0$$

Рассмотрим связь между групповой $v = \frac{\omega}{k}$ и фазовой скоростями.

$$u = \frac{dv}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + dk \frac{dv}{dk} = v + k \left(\frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} \right) = v + k \left(-\frac{\lambda}{k} \right) \frac{dv}{d\lambda}$$

$$u = v + \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

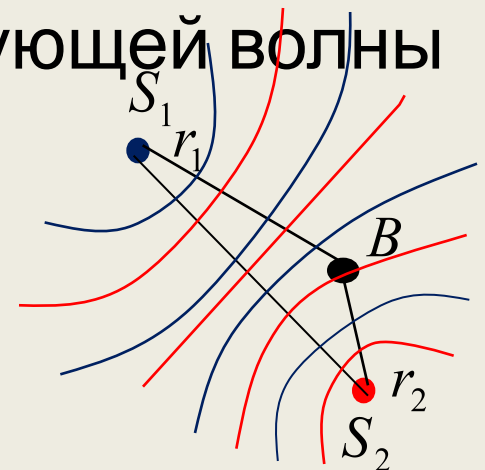
Если фазовая скорость не зависит от фазы, то есть нет дисперсии, то $u = v$.

Понятие групповой скорости u определяет скорость рас-пространения сигнала который можно уловить каким либо прибором. В теории относительности доказыва-ется что групповая скорость $u \leq c$. В то время как для фазовой скорости ограничений не существует

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

Согласованное во времени и пространстве протекание нескольких волновых или колебательных процессов наблюдается только в том случае, если волны имеют одинаковую частоту.

КОГЕРЕНТНЫЕ ВОЛНЫ – волны которые имеют одинаково-вую частоту и постоянную разность фаз. При положении в пространстве нескольких когерентных волн происходит перераспределение энергии волн, то есть в разных точках происходит усиление или ослабление результирующей волны. Данное явление называется **ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ** в зависимости от соотношения



Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых источниками S_1 и S_2 .

ковыми амплитудами A_0 и частотами ω , а так же постоянной разностью фаз.

$$S_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$
$$S_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kx + \varphi_2)$$

r_1, r_2 – расстояния от источников волн, до рассматриваемой точки В

φ_1, φ_2 – начальные фазы обеих складывающихся сферических волн

k – волновое число

Амплитуда результирующей волны в точке В:

$$A^2 = A_0^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos(k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)) \right)$$

Так как для когерентных источников $(\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const})$, то результат наложения двух волн в различных точках зависит от **разности хода волн**.

- Там где $k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) – **интерференционный максимум**, амплитуда результирующего колебания A_0
 - Если $k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm (2m + 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) – **интерференционный минимум**, амплитуда результирующего колебания A_0
- m – порядок интерференционного максимума или минимума.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ – волны образованные при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу, с одинаковыми частотами и амплитудами.

Пусть две волны распространяются навстречу друг другу без затухания, с одинаковыми амплитудами и частотами, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и $k_1 = k_2 = k$. При фазы

$$\begin{cases} S_1 = A \cos(\omega t - kt) \\ S_2 = A \cos(\omega t + kt) \end{cases}$$

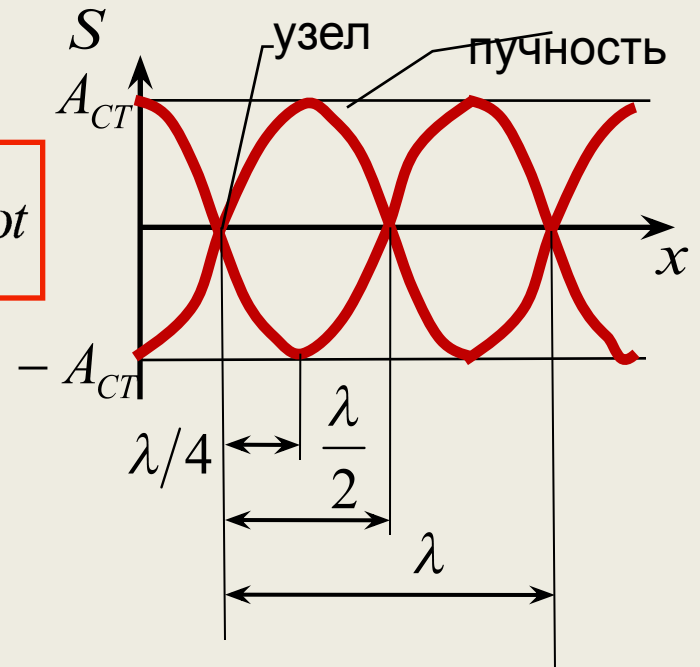
Уравнение стоячей волны:

$$S = S_1 + S_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ волновое число

A_{CT} амплитуда стоячей волны

λ – длина волны



$$A_{CT} = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

- Если $\cos kx = 1 \Rightarrow kx = \pm \pi m = \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$ –
ампли-туда максимальна, $A_{CT} = 2A$. –
ПУЧНОСТЬ.

- Если $\cos kx = 0 \Rightarrow kx = \pm \pi (m + \frac{1}{2}) = \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$. –
 $x_{\min} = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}$; $A_{CT} = 0$. –
УЗЕЛ.