

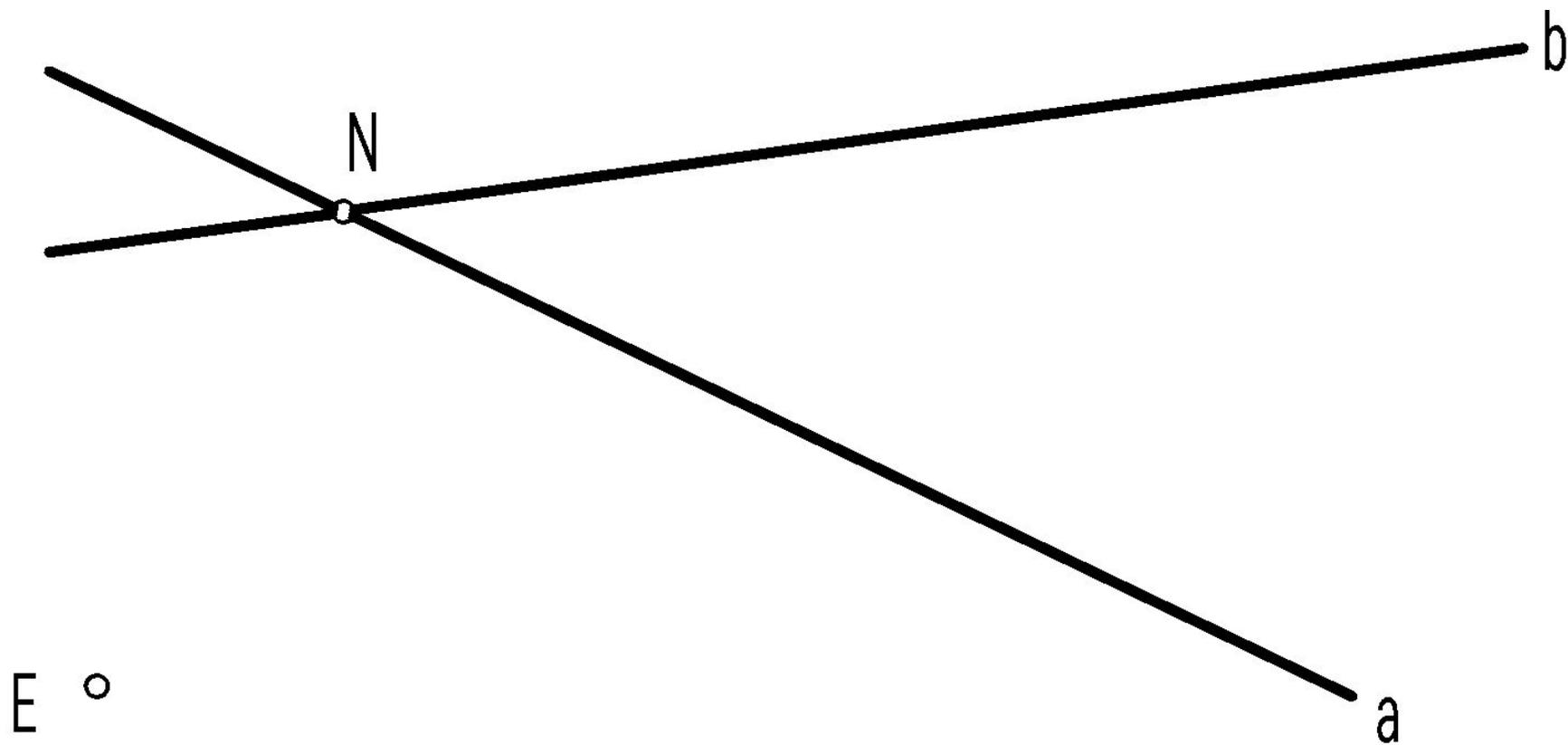
РАЗДЕЛ НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

- Чертеж – международный язык общения техников.
- Начертательная геометрия – грамматика этого языка (чертежа).
- Начертательная геометрия изучает методы построения изображений пространственных объектов на плоскости, а также способы преобразования полученных изображений для упрощения решения различных инженерных задач.

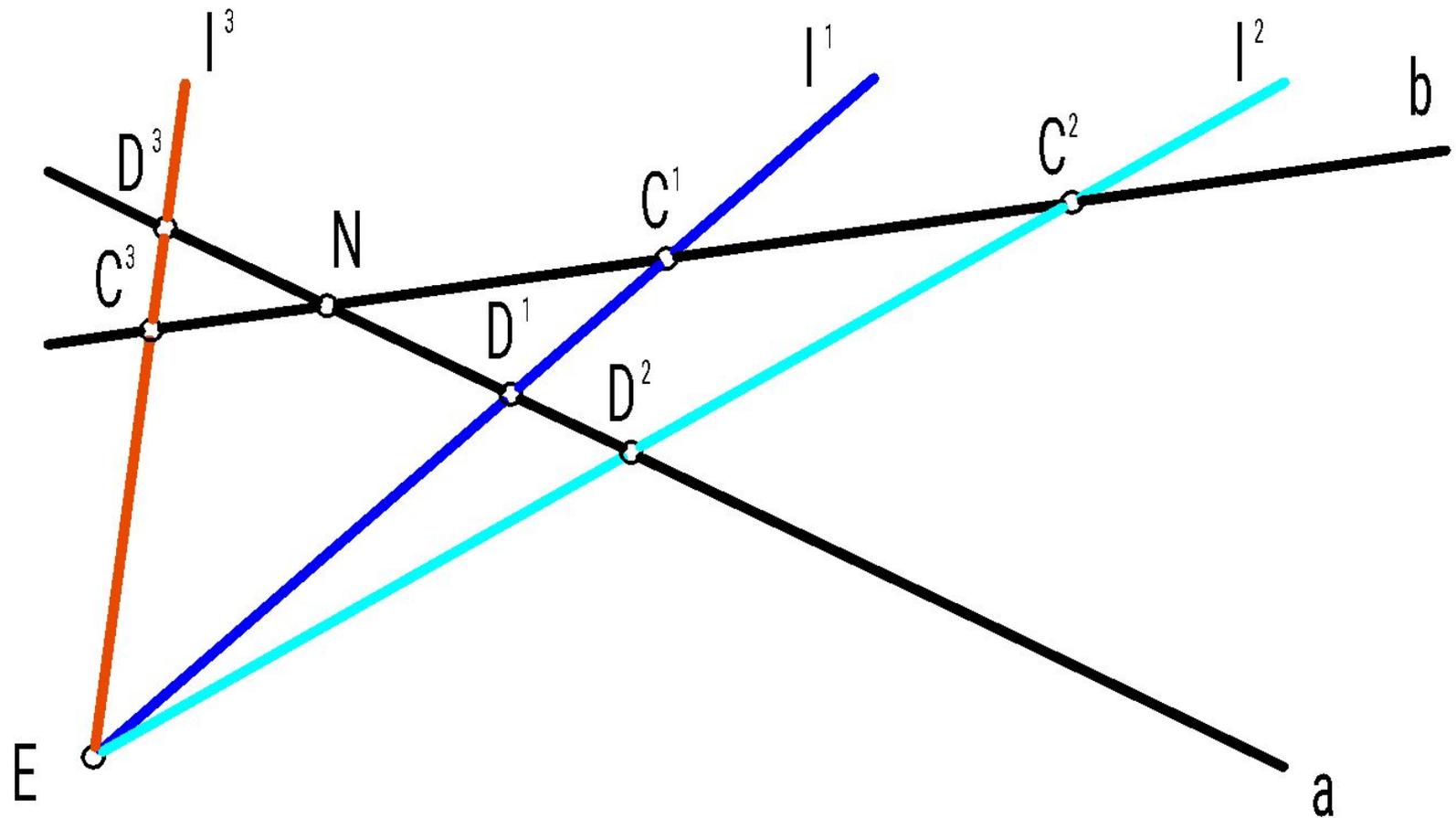
**Базовые
геометрические
элементы
начертательной
геометрии**

- **Точка** – абстрактное математическое понятие. Нульмерный объект (не имеет измерений).
- **Линия** – непрерывное одномерное множество точек (цепочка точек).
Измерение : только длина. Толщины нет.
- **Поверхность** – непрерывное двумерное множество точек. Измерения : длина, ширина, площадь. Толщины и объема нет.

Проективное пространство

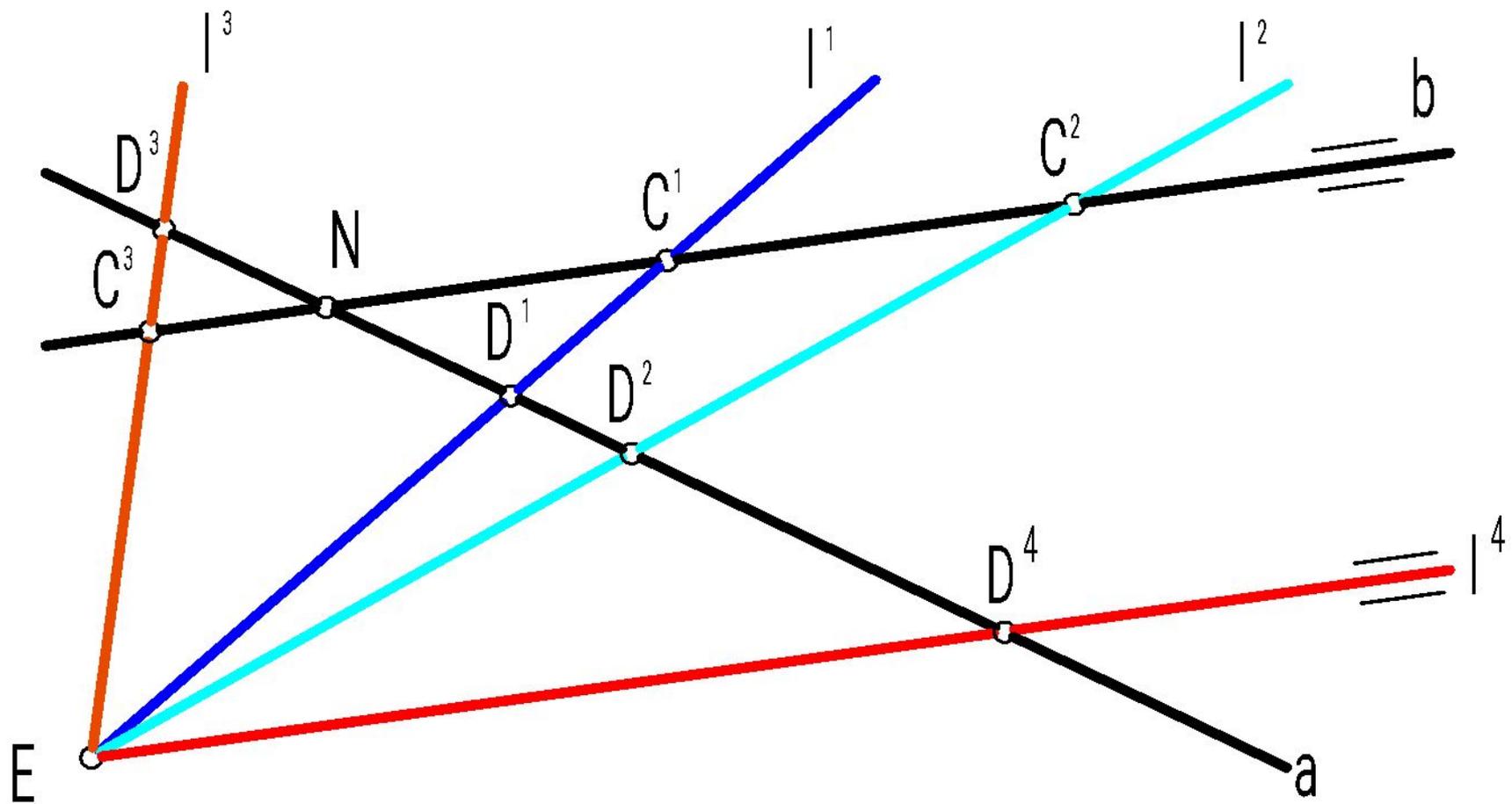


В плоскости заданы две пересекающиеся
прямые a и b и точка E .



В этой же плоскости через точку E проведем прямые l^1, l^2, l^3 пересекающие прямые a и b .

в точках D^1, D^2, D^3 и C^1, C^2, C^3 соответственно.
 В результате получаем однозначное соответствие точек D^1, D^2, D^3 прямой a точкам C^1, C^2, C^3 прямой b .



Через точку E проведем прямую l^4 параллельно прямой b .

$$l^4 \cap a = D^4; \quad l^4 \parallel b \Rightarrow \cancel{l^4 \cap b}$$

Точке D^4 прямой a нет соответствующей точки C^4 прямой b .

Евклидово пространство неоднородно

Для устранения неоднородности
Евклидова пространства

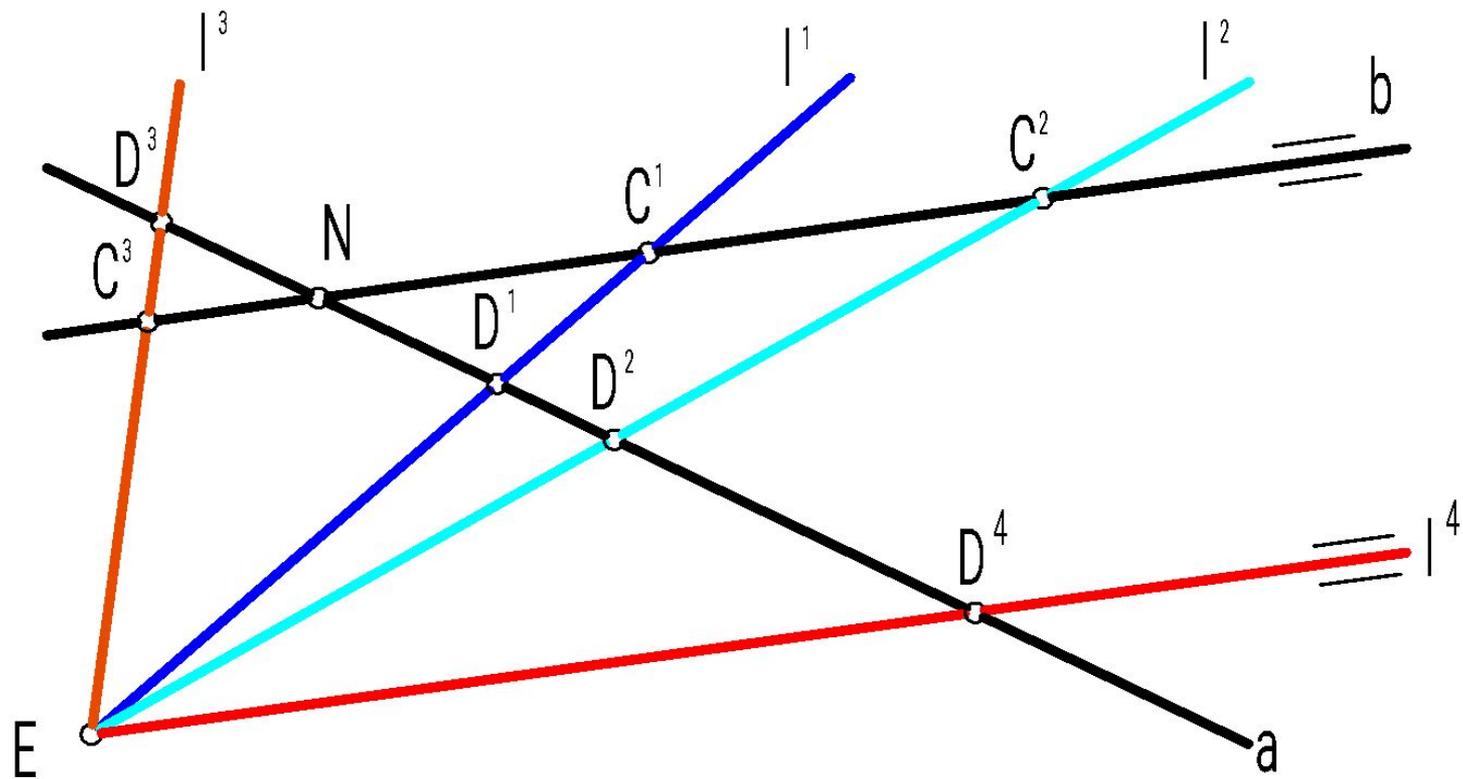
условно принято,

что параллельные между собой прямые

пересекаются

*в бесконечно удаленной точке F^∞ -
несобственной точке пространства.*

$$(m \parallel n) \Rightarrow (m \cap n = F^\infty)$$



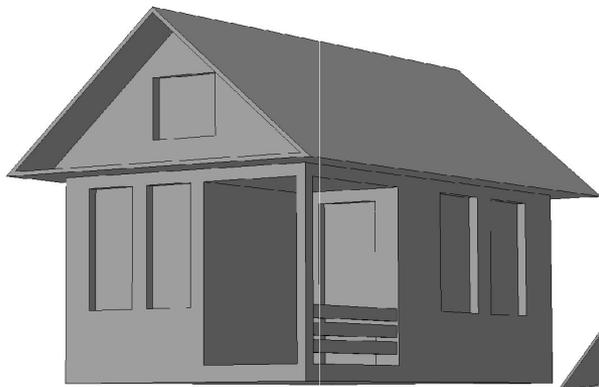
Тогда, если $l^4 \parallel b$, то $l^4 \cap b = C^\infty$.

Следовательно, точке D^4 прямой a однозначно соответствует несобственная точка C^∞ прямой b .

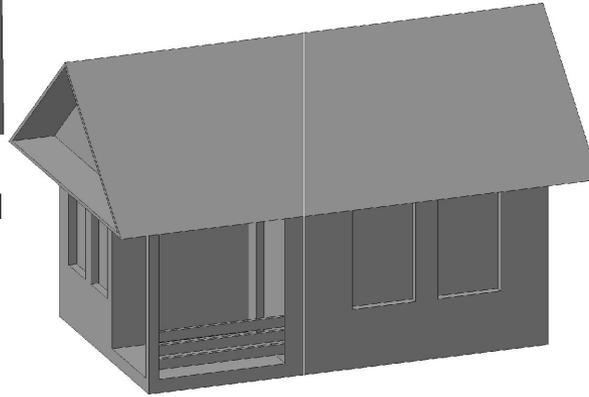
Евклидово пространство становится однородным.

***Евклидово пространство,
дополненное несобственными
элементами,
называют проективным.***

Метод проецирования



Перспективная проекция



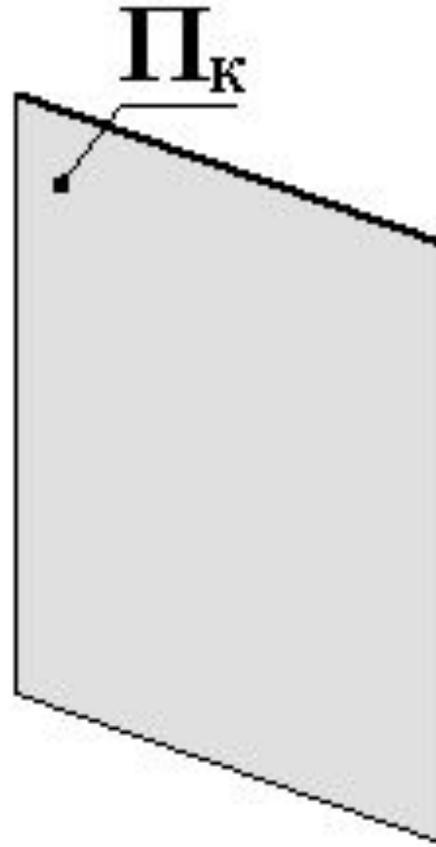
АксонOMETрическая проекция



Ортогональные проекции

Все изображения разные, но их объединяет то, что в основе их построения лежит один и тот же метод – **метод проецирования.**

Все изображения, построенные на основе метода проецирования, называются проекционными

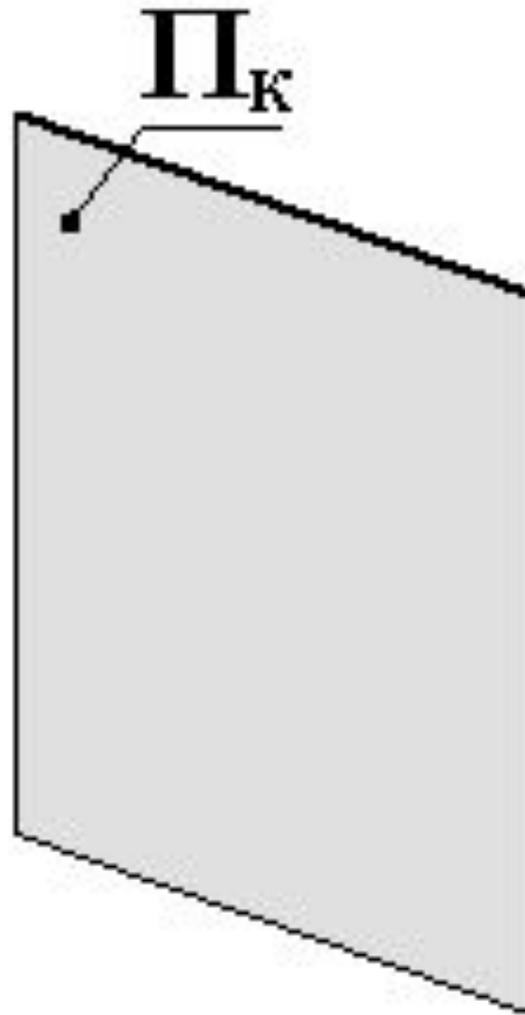


Задаем произвольную плоскость Π_k

Π_k – плоскость проекций

k – порядковый номер плоскости, $k = 1, 2, 3, \dots, n$

S

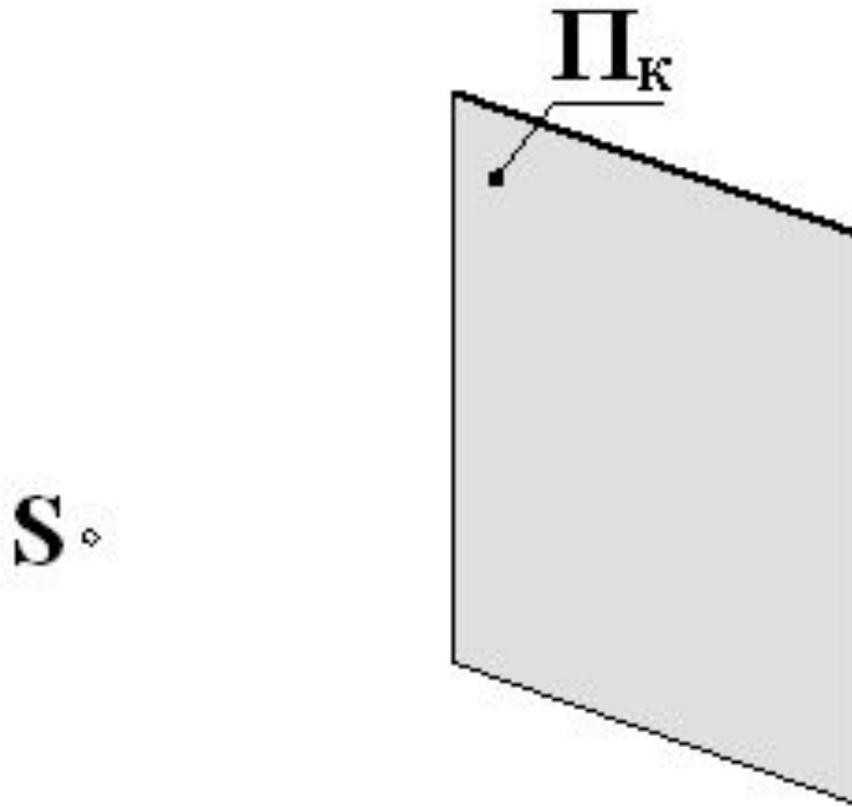


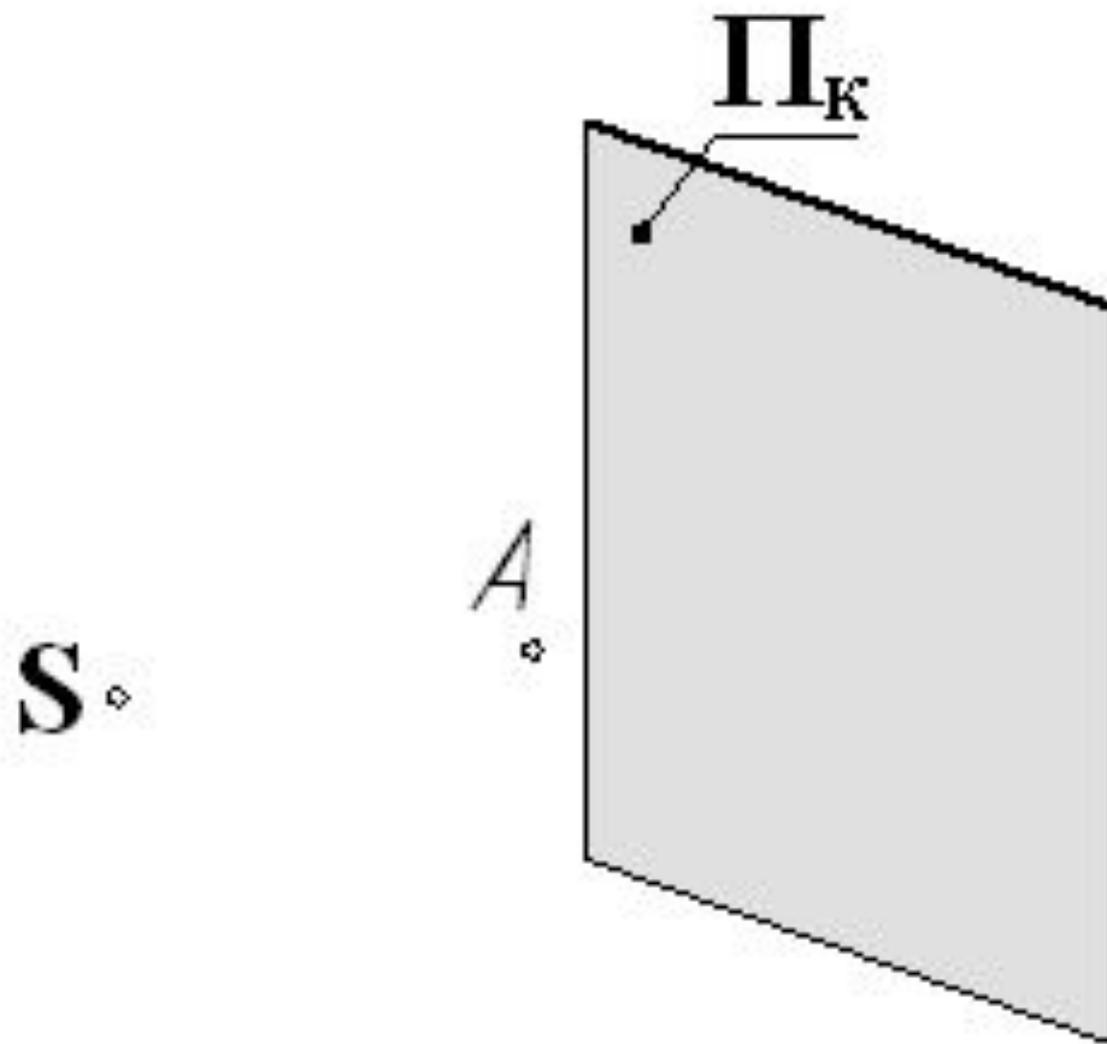
Задаем произвольную точку S
 S – центр проецирования

Аппарат проецирования

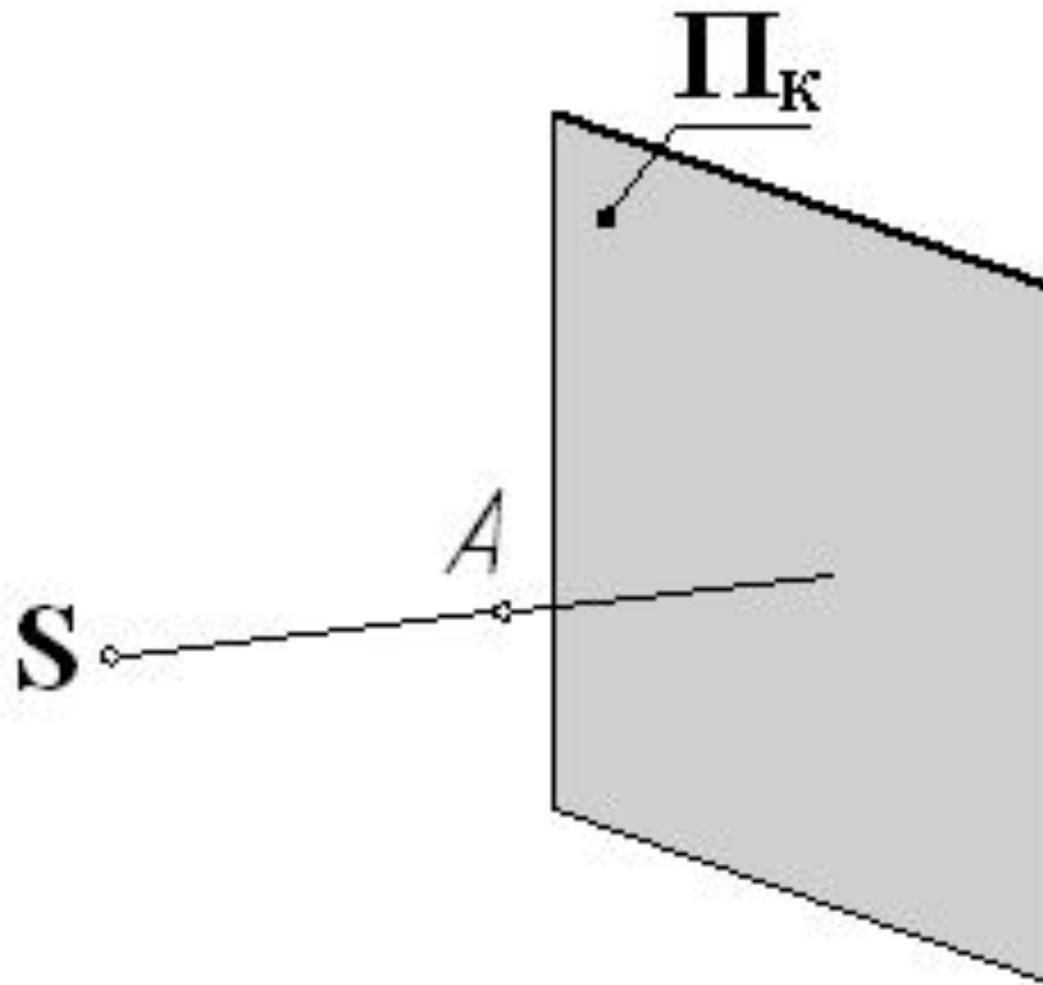
Π_K – плоскость проекций

S – центр проецирования



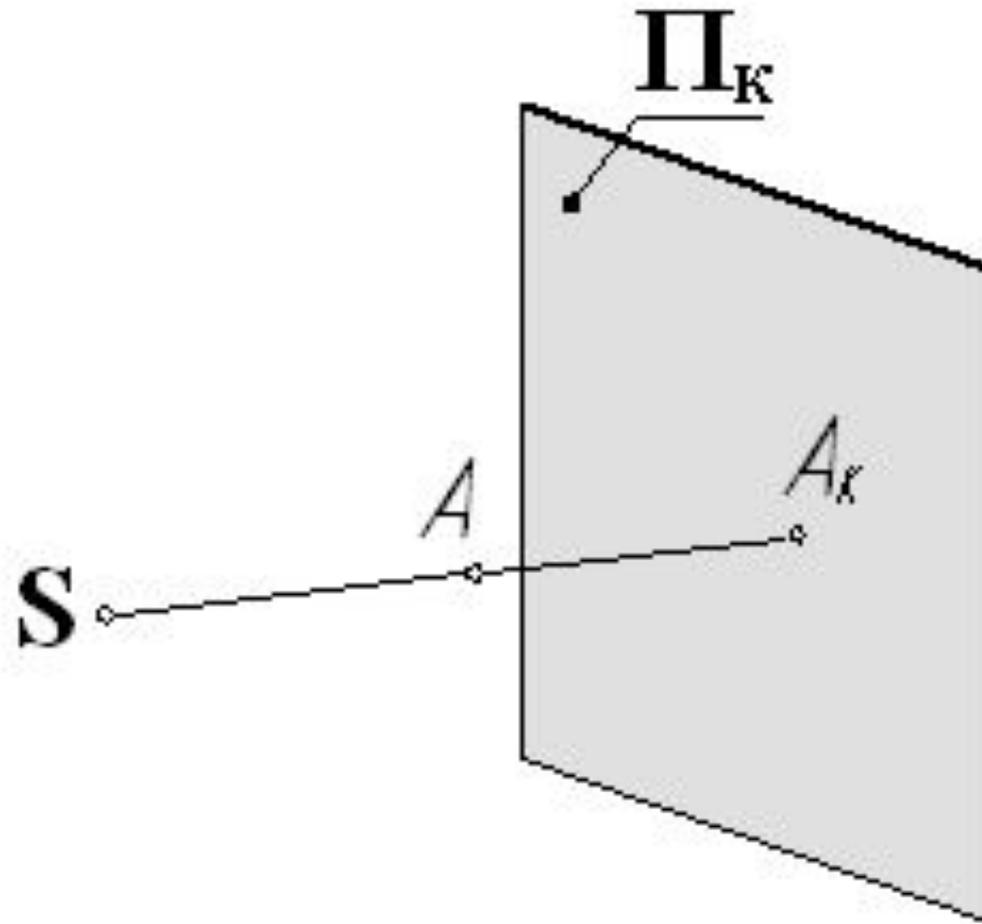


В качестве объекта взята произвольная точка A



Для получения изображения точки A на плоскости проекций Π_K проведем из центра проецирования S прямую SA .

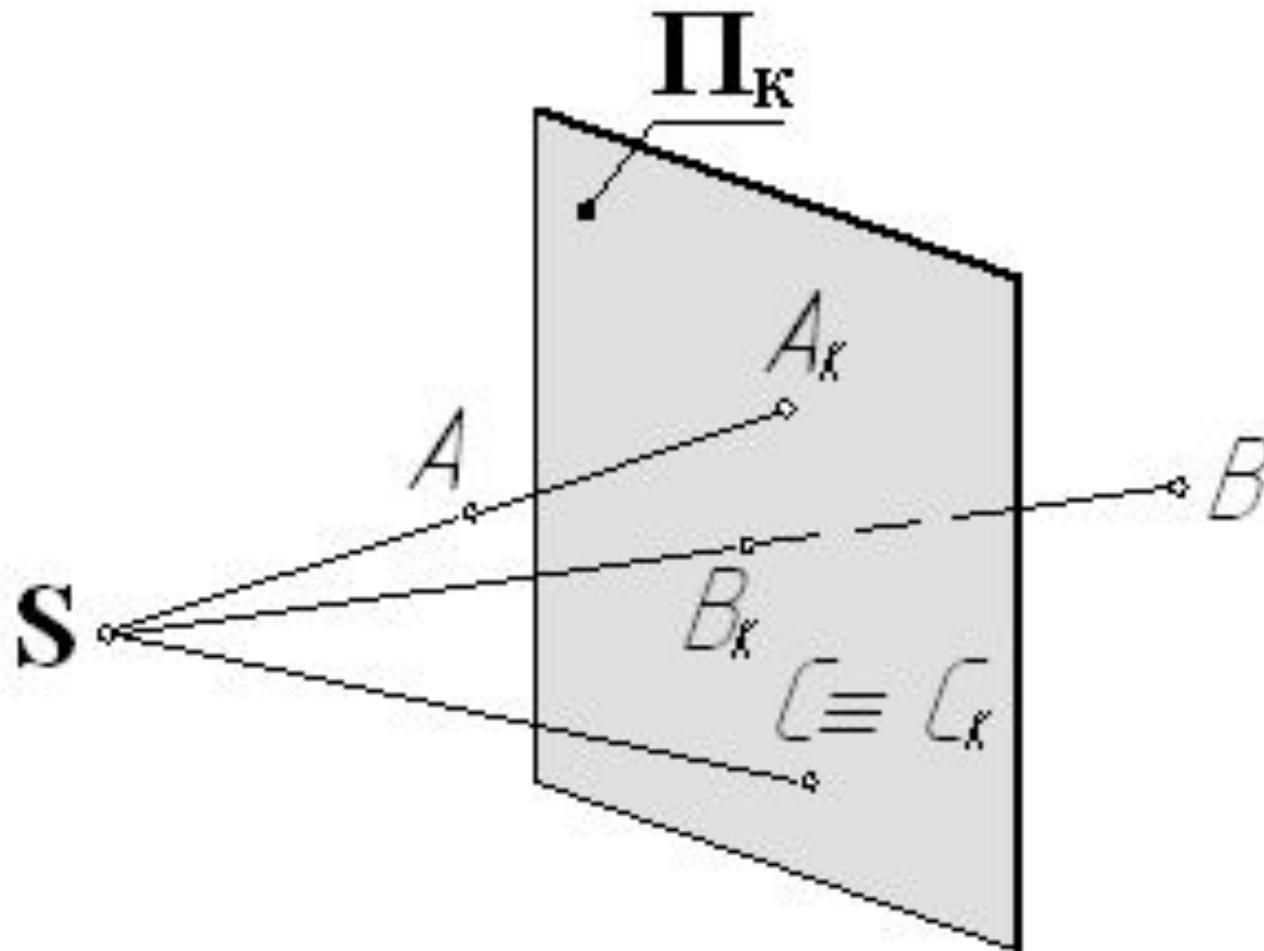
SA – проецирующая прямая (луч)



Определим точку пересечения проецирующей прямой SA с выбранной плоскостью проекций Π_K .

$$SA \cap \Pi_K = A_K$$

A_K – проекция точки A на плоскости проекций Π_K



Для любой точки пространства

$$SA \cap \Pi_K = A_K \quad SB \cap \Pi_K = B_K \quad SC \cap \Pi_K = C_K$$

$$SA \cap SB \cap SC \cap \dots = S$$

Метод проецирования

Π_K – плоскость проекций

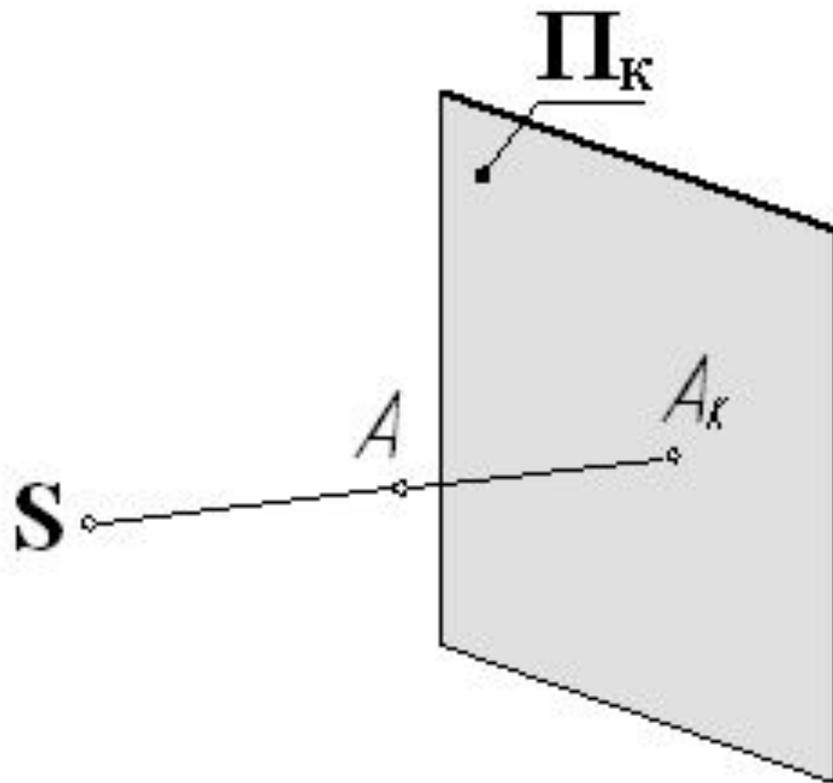
S – центр проецирования

SA – проецирующая
прямая

A – объект (точка)

$$SA \cap \Pi_K = A_K$$

A_K – проекция объекта (точки) A на плоскости проекций Π_K



Варианты метода проецирования

```
graph TD; A[Проецирование] --- B[Центральное]; A --- C[Параллельное]
```

Проецирование

Центральное

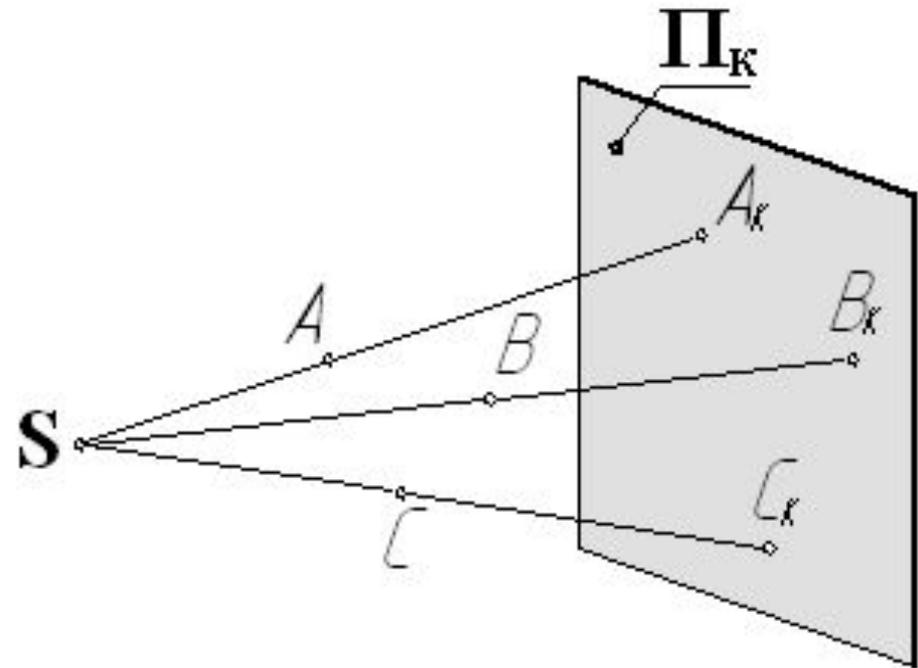
Параллельное

Центральное проецирование (коническое)

S (центр проецирования) –
реальная точка.

Расстояние от S до
плоскости проекций Π_K
измеримая величина.

$$SA \cap SB \cap SC \dots = S$$



Параллельное проецирование (цилиндрическое)

S (центр проецирования) –
несобственная точка.

$$S \equiv S^\infty$$

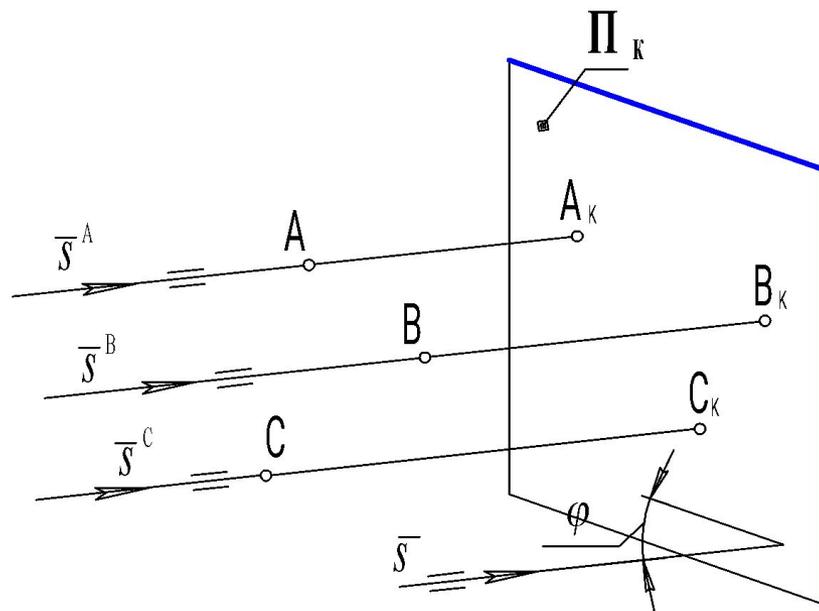
$$SA \cap SB \cap SC \dots = S^\infty$$

следовательно

$$S^\infty A \parallel S^\infty B \parallel S^\infty C \parallel \dots \parallel s$$

s – направление проецирования;

$$S^\infty \in s$$



Параллельное
проецирование

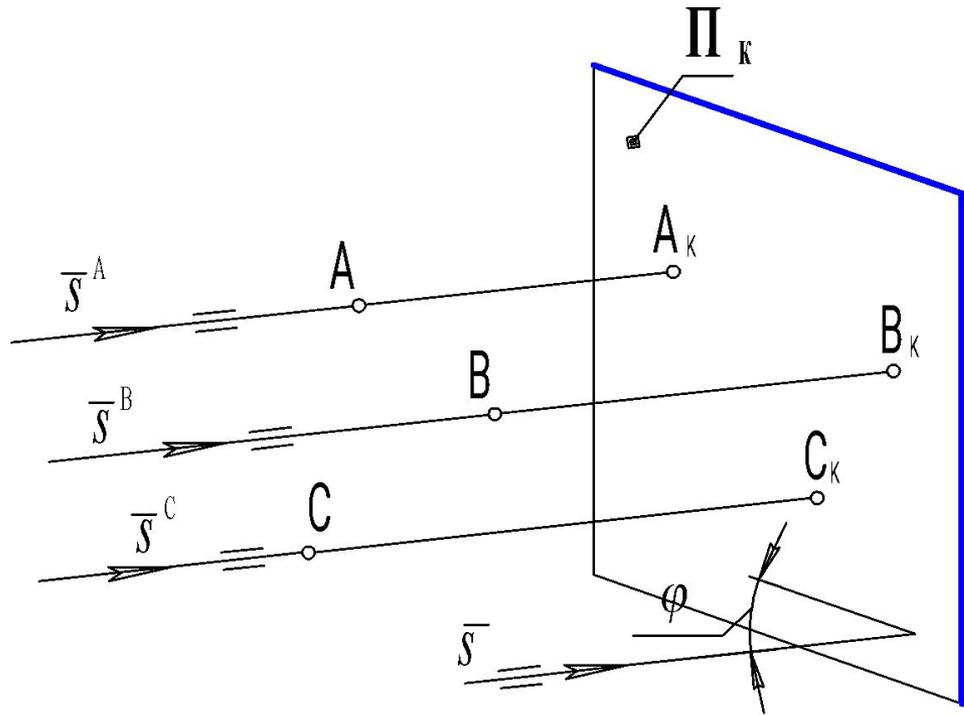
Косоугольное

Направление проецирования
не перпендикулярно
плоскости проекций

Прямоугольное

Направление проецирования
перпендикулярно
плоскости проекций

Параллельное проецирование



$$(s \wedge \Pi_k) = \angle \varphi$$

$\angle \varphi = 90^\circ \vee (s \perp \Pi_k) \Rightarrow$ проецирование
прямоугольное

(ортогональное)

$\angle \varphi \neq 90^\circ \vee (s \not\perp \Pi_k) \Rightarrow$ проецирование косоугольное

Проецирование

Центральное

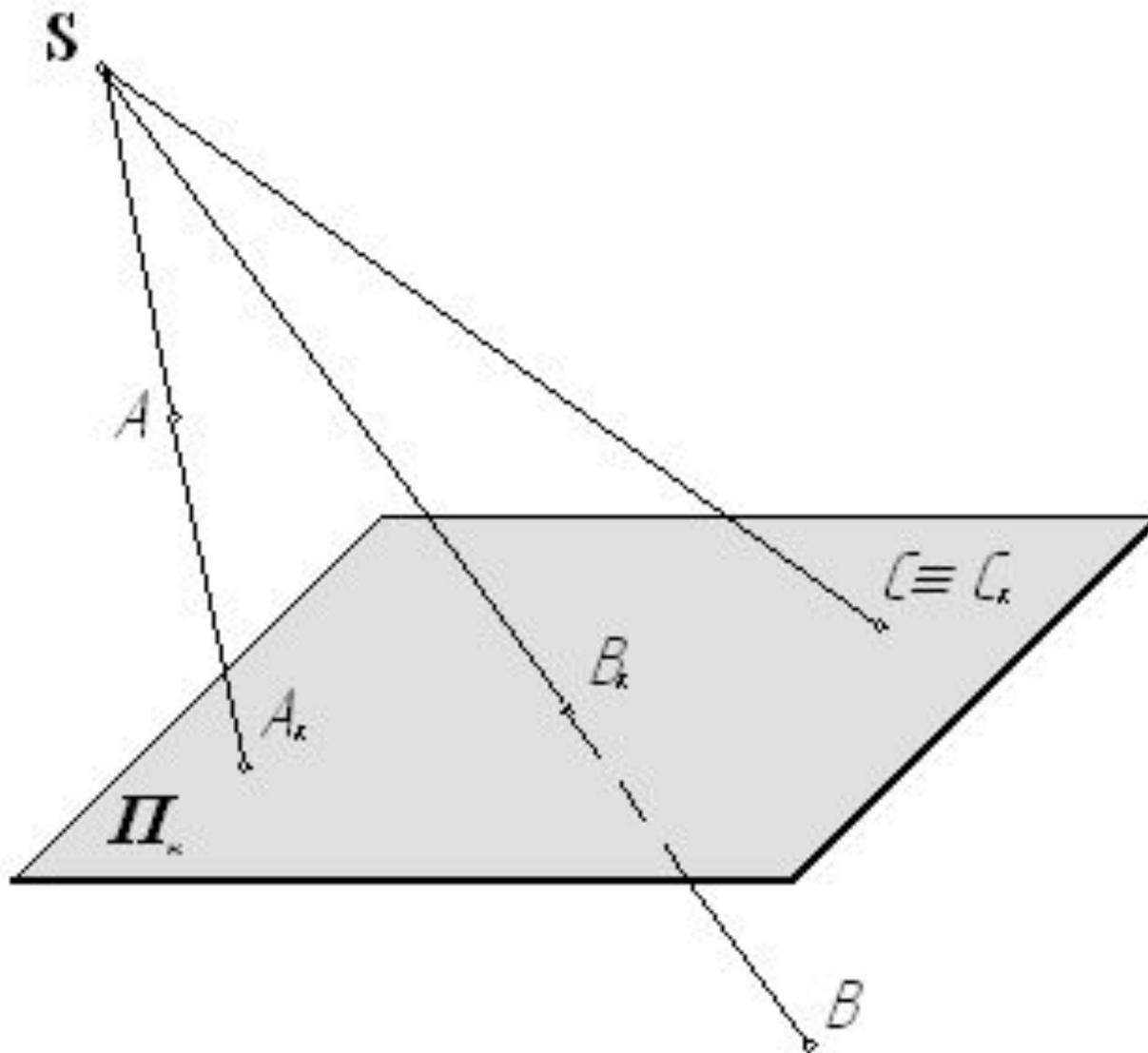
Параллельное

Косоугольное

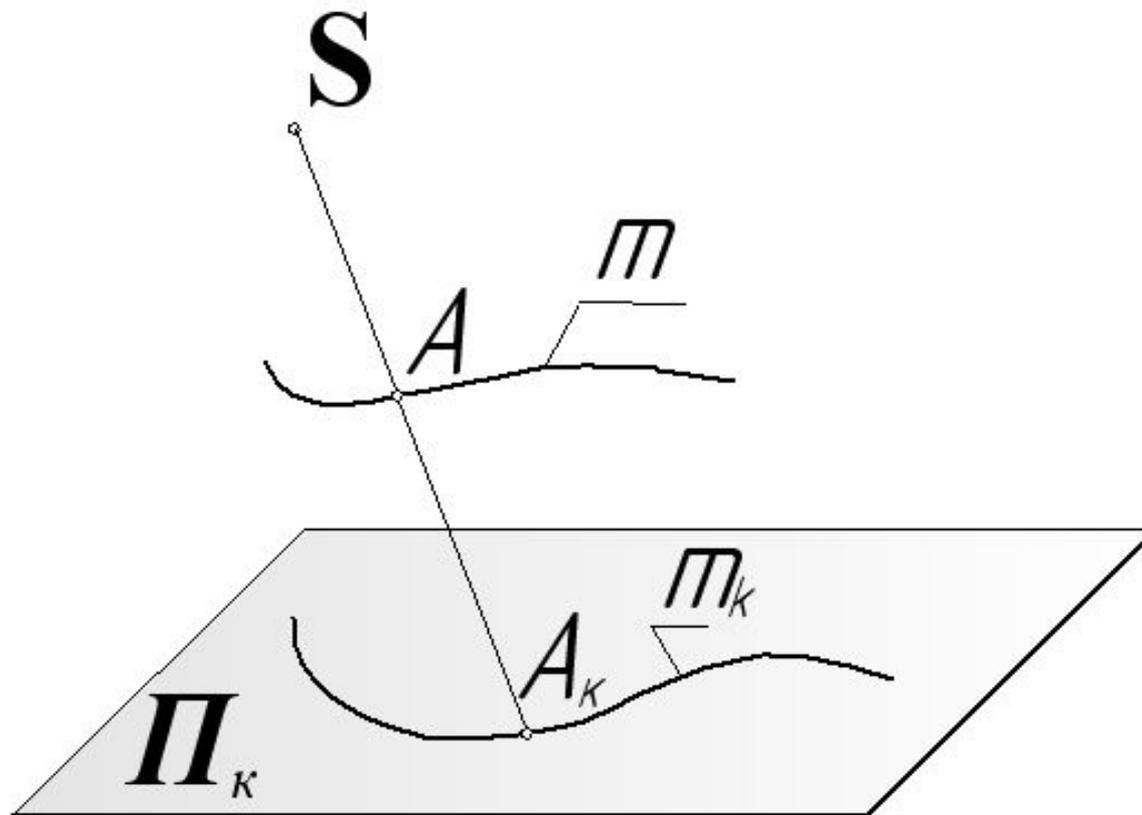
Прямоугольное

Свойства проецирования

Общие свойства проецирования

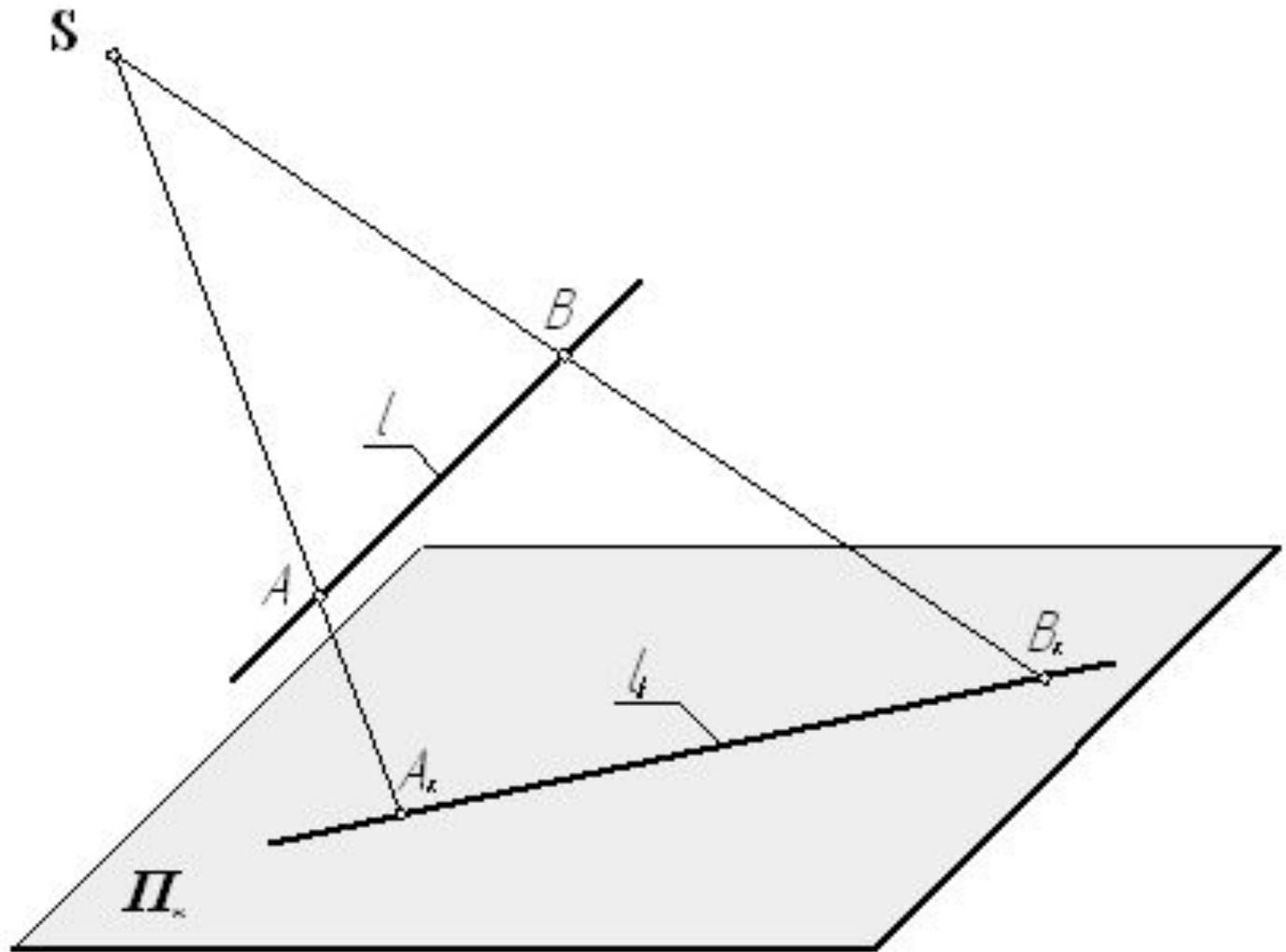


Проекция точки - точка

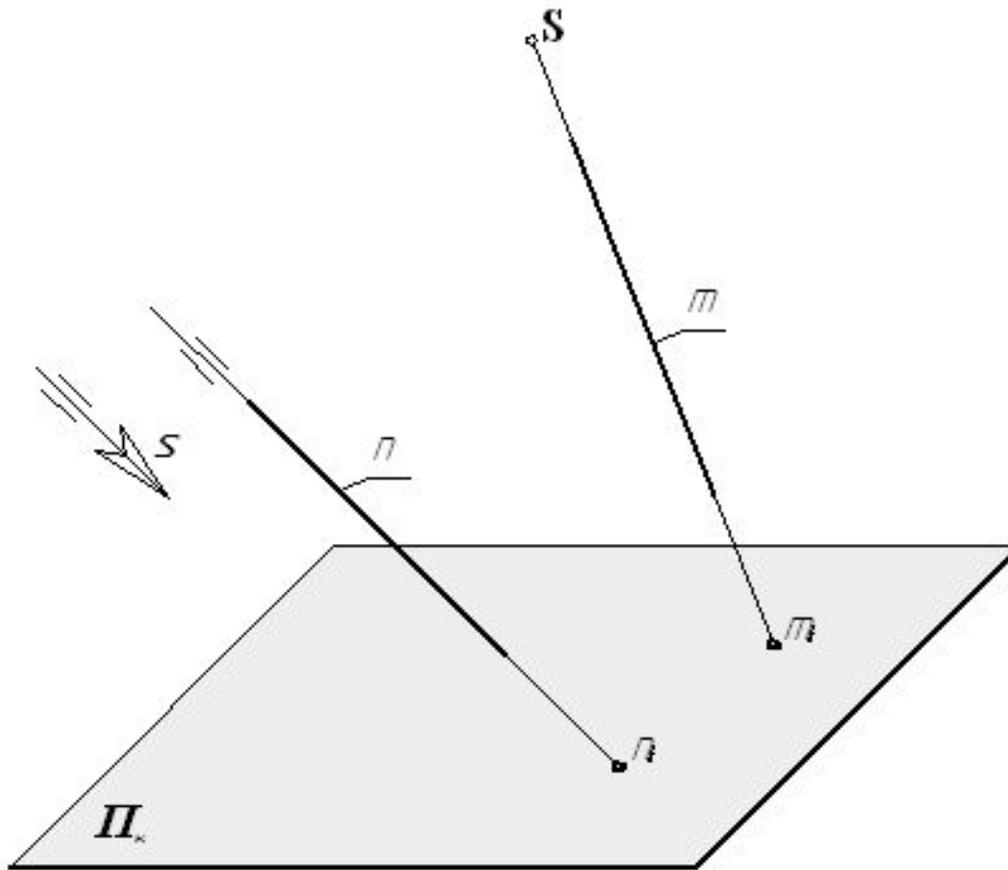


Если точка принадлежит линии, то проекции точки принадлежат одноименным проекциям этой линии.

$$A \in m \Rightarrow A_k \in m_k$$



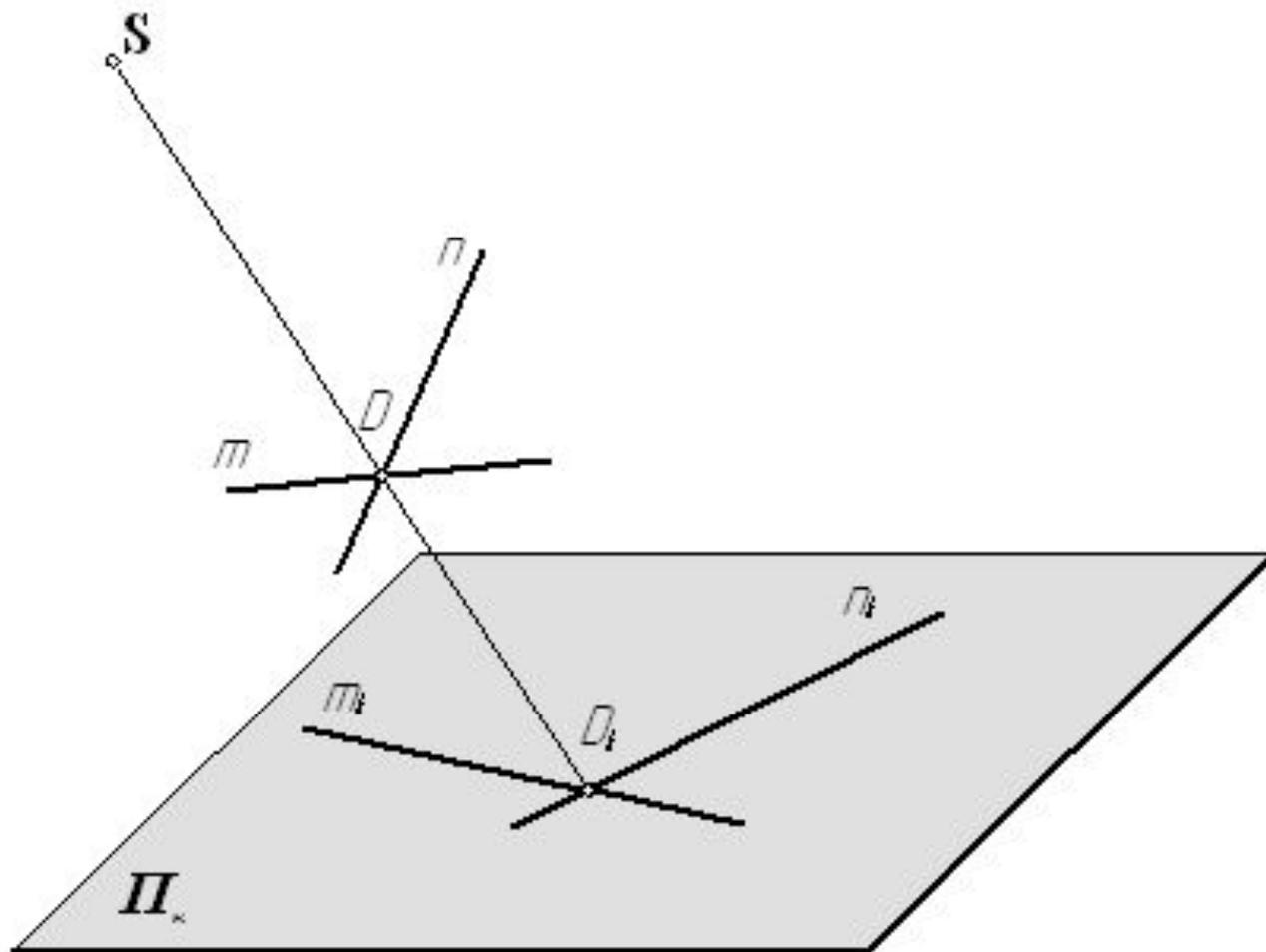
Проекция прямой, в общем случае, - прямая.



Если прямая проходит через центр проецирования S (или параллельна направлению проецирования s), то ее проекция вырождается в точку.

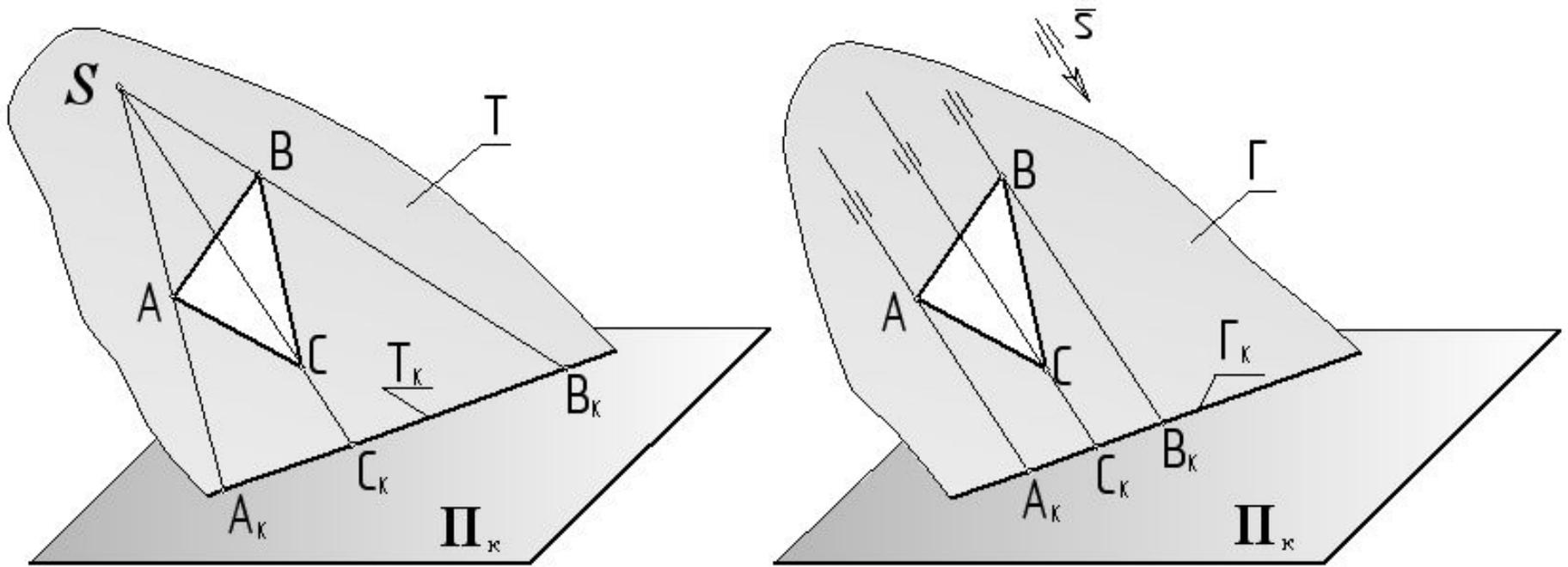
$$(S \in m) \vee (n \parallel \hat{s}) \Rightarrow (m_k \text{ и } n_k - \text{точка})$$

Такая прямая называется проецирующей.



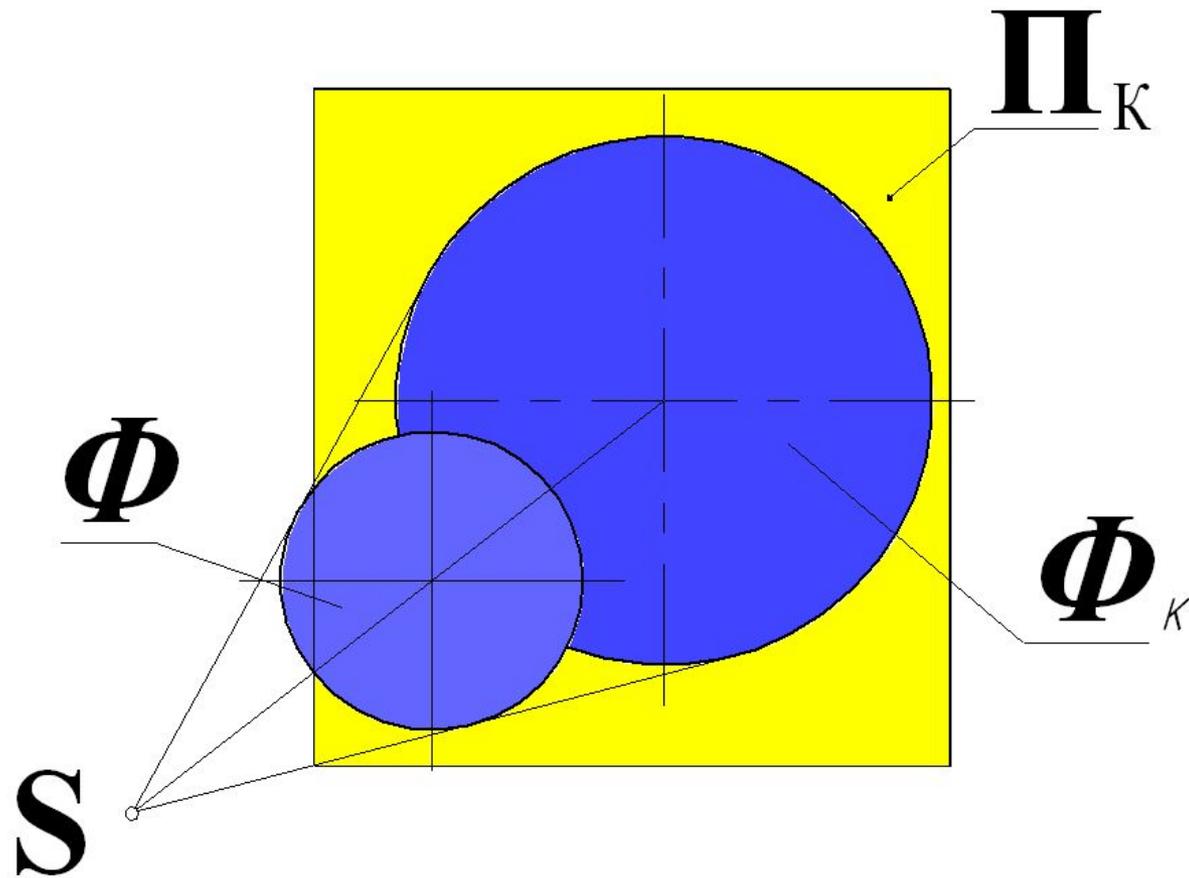
Если прямые пересекаются, то пересекаются и их проекции. Точки пересечения прямых и их проекций лежат на одной проецирующей прямой.

$$(m \cap n = D) \Rightarrow (m_k \cap n_k = D_k \wedge S \in DD_k)$$



Если плоскость проходит через центр проецирования (включает в себя) ($S \in T$), то проекция плоскости вырождается в прямую (T_k – прямая).

$S \in T \Rightarrow T_k$ – прямая
Такая плоскость называется проецирующей



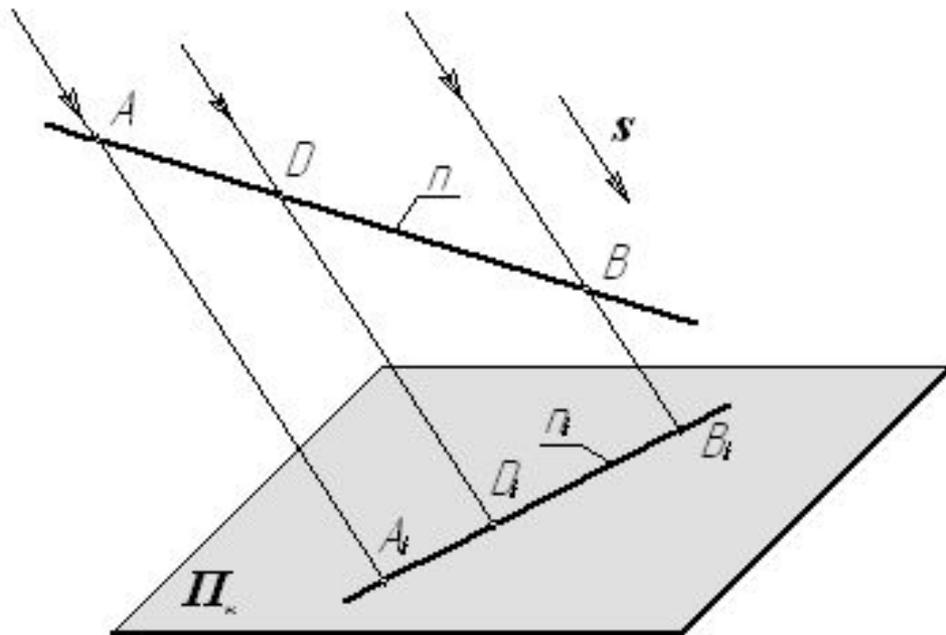
Если плоская фигура Φ параллельна плоскости проекций Π_K , то ее проекция Φ_K на эту плоскость подобна самой фигуре Φ .

$$\Phi \parallel \Pi_K \Rightarrow \Phi_K \sim \Phi$$

Инвариантные свойства параллельного проецирования

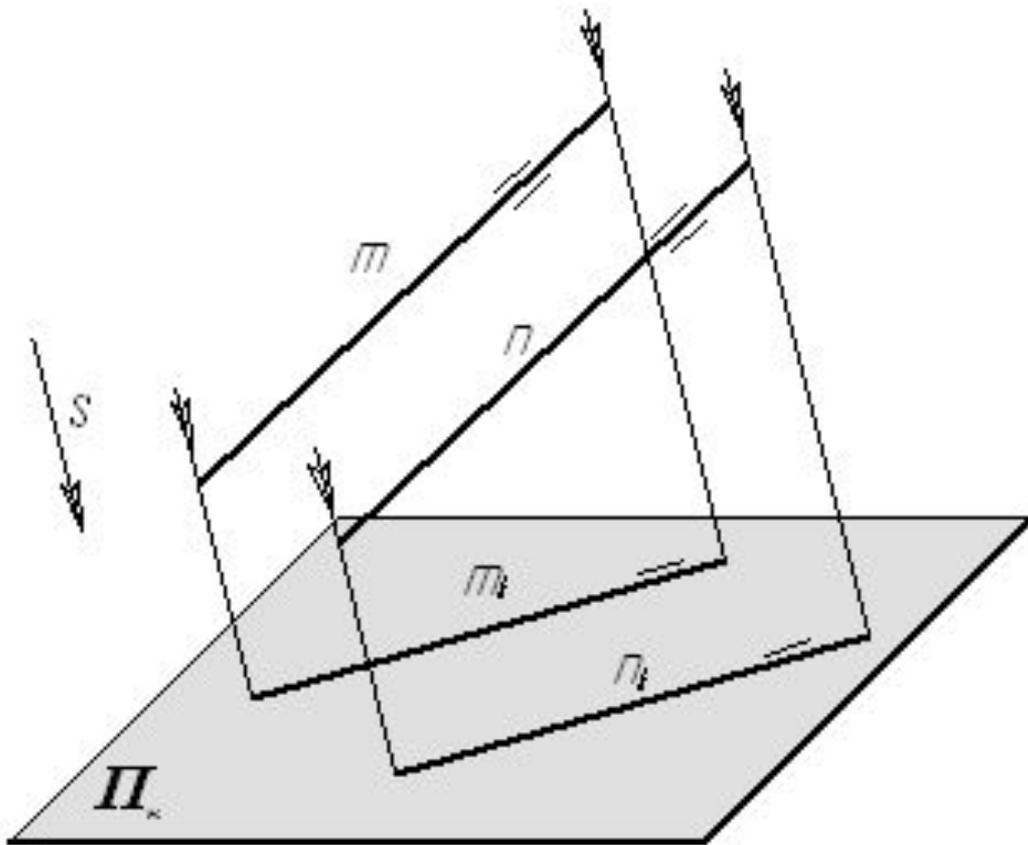
Если отрезок прямой разделен в заданном отношении, то в таком же отношении будет разделена и проекция этого отрезка.

$$AD : DB = A_K D_K : D_K B_K$$



Если прямые
параллельны, то их
одноименные
проекции также
параллельны.

$$(m \parallel n) \Rightarrow (m_k \parallel n_k)$$



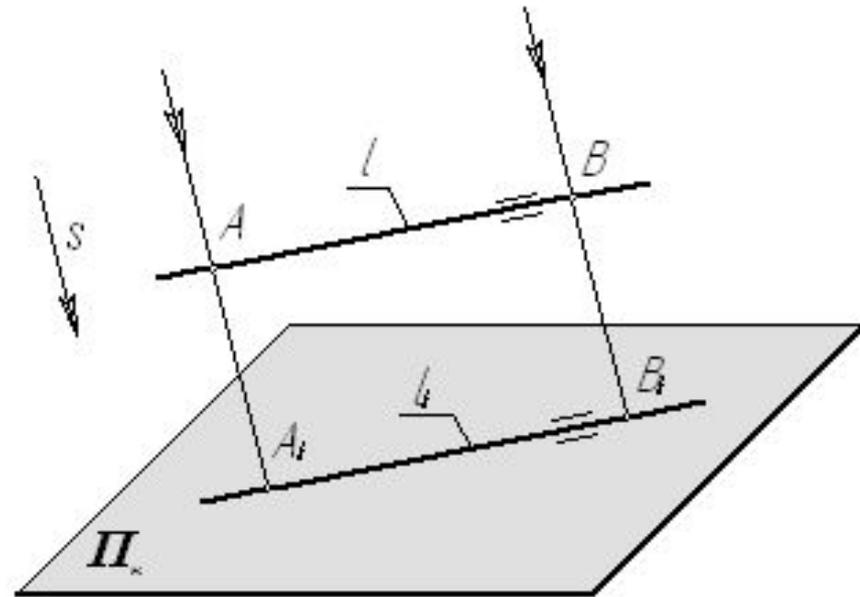
Если прямая параллельна плоскости проекций, то ее проекция на этой плоскости параллельна прямой, а отрезок, ей принадлежащий, отображается в истинную величину.

$$(l \parallel \Pi_k) \Rightarrow (l \parallel l_k)$$

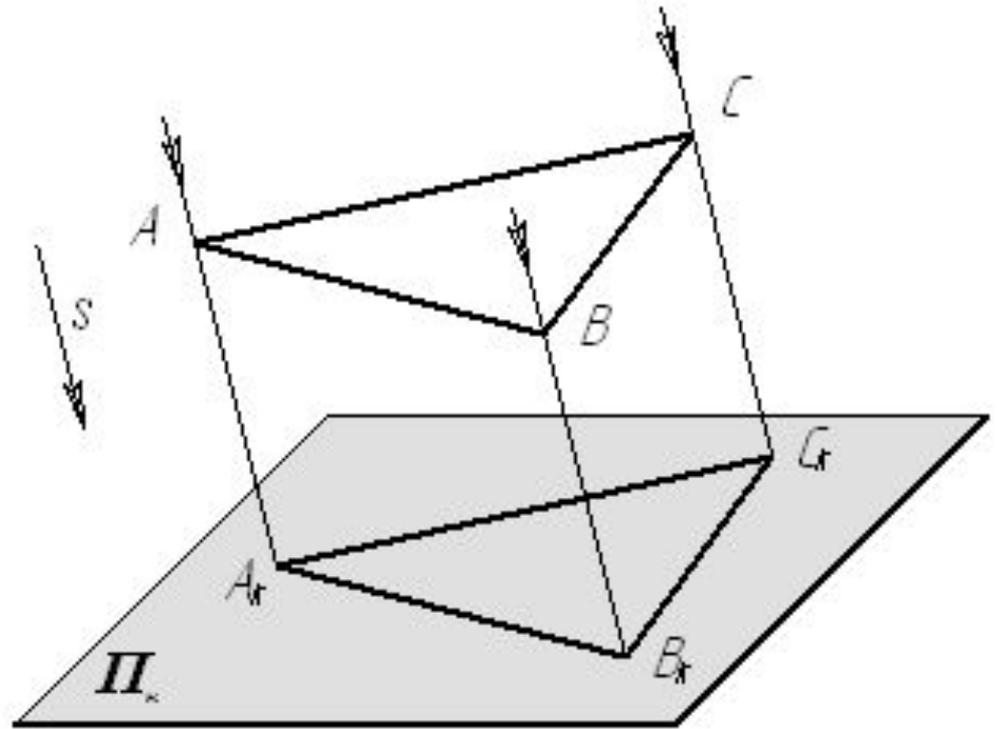
$$(AB \subset l) \Rightarrow (|AB| = |A_k B_k|)$$

Т.е. проекция отрезка конгруэнтна самому отрезку

$$A_k B_k \cong AB$$



Если плоская фигура параллельна плоскости проекций, то ее проекция на этой плоскости конгруэнтна самой фигуре.

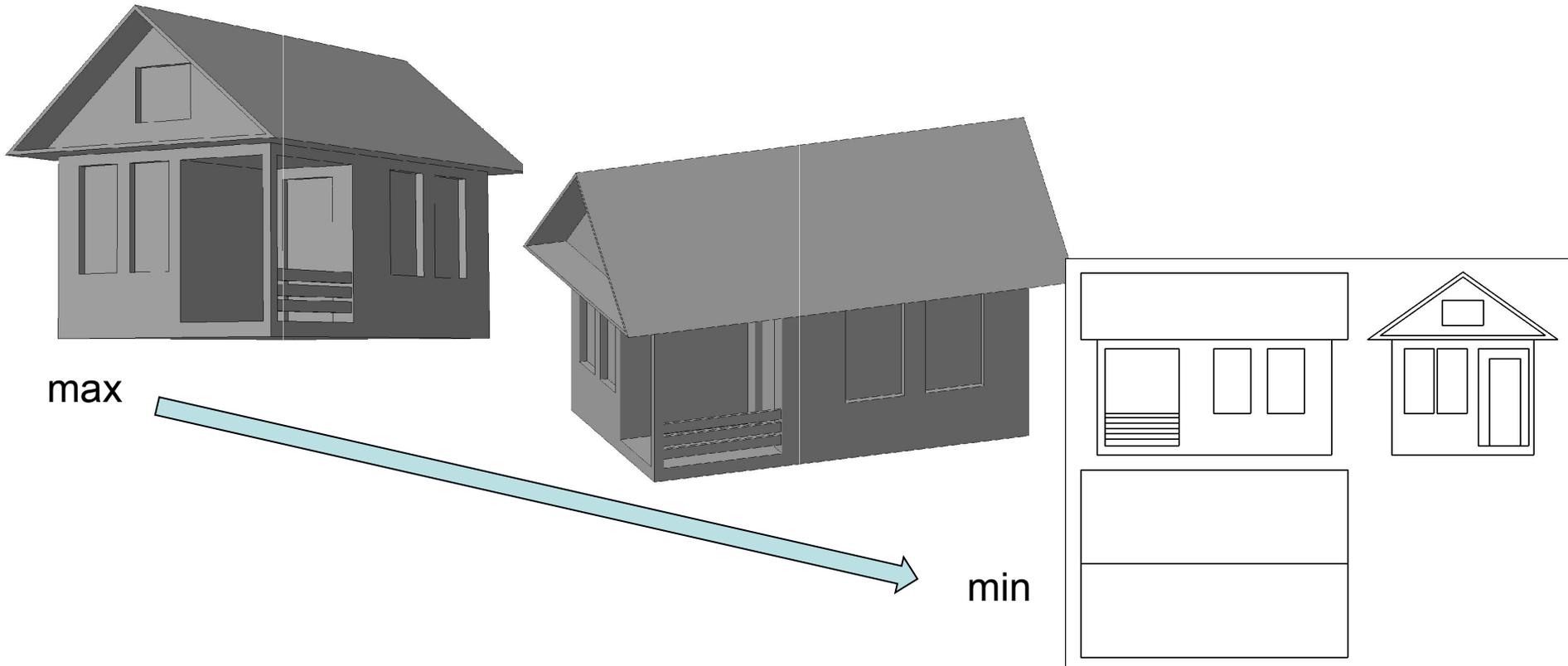


$$(\Phi(ABC) \parallel \Pi_k) \Rightarrow (\Phi_k(A_k B_k C_k) \cong \Phi(ABC))$$

**Требования,
предъявляемые
к проекционному
изображению**

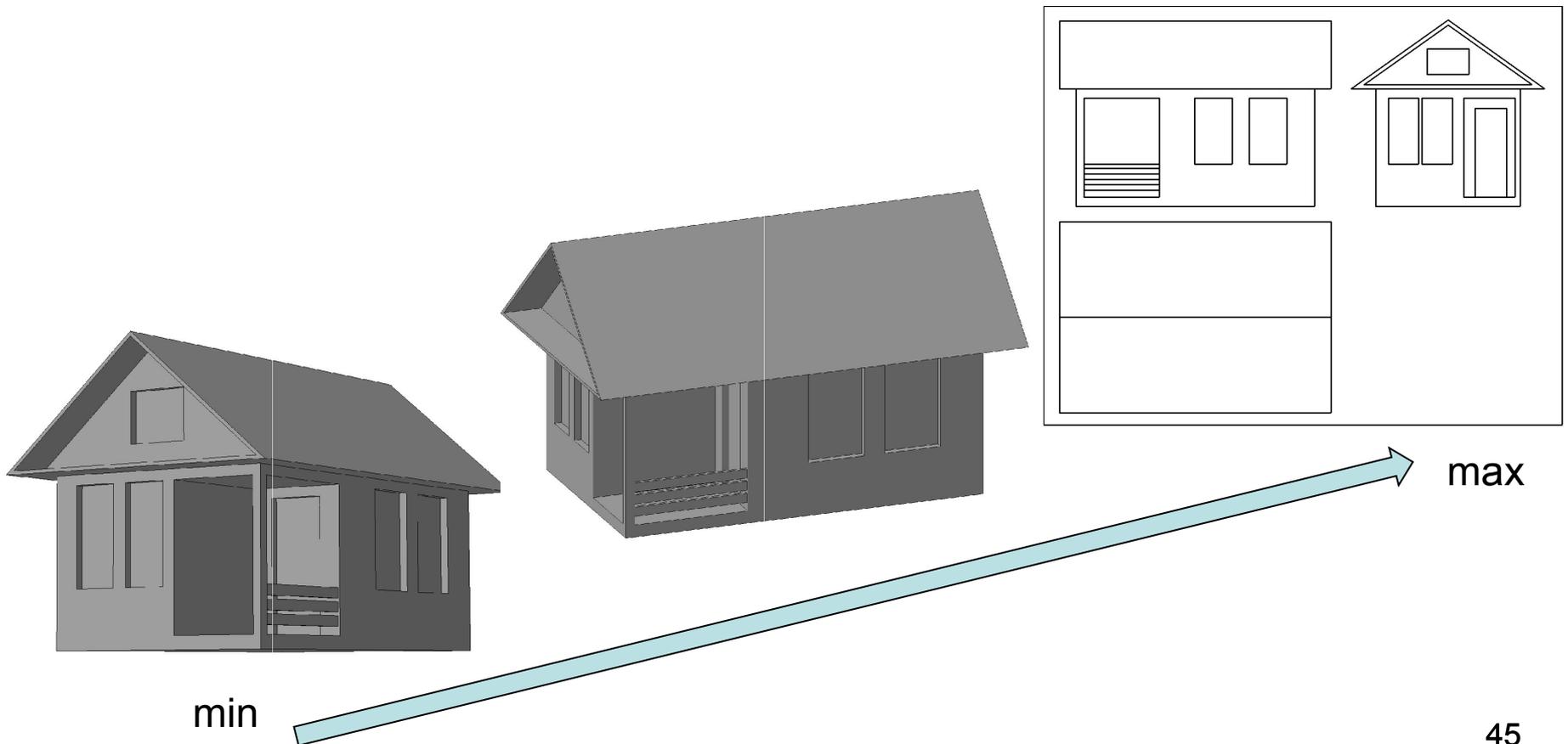
1. Наглядность

- Свойство, которое дает возможность по изображению представить внешнюю форму заданного объекта



2. Обратимость

- Свойство, на основе которого по изображению можно восстановить реальную форму объекта, его размеры и, если необходимо, положение заданного объекта в пространстве



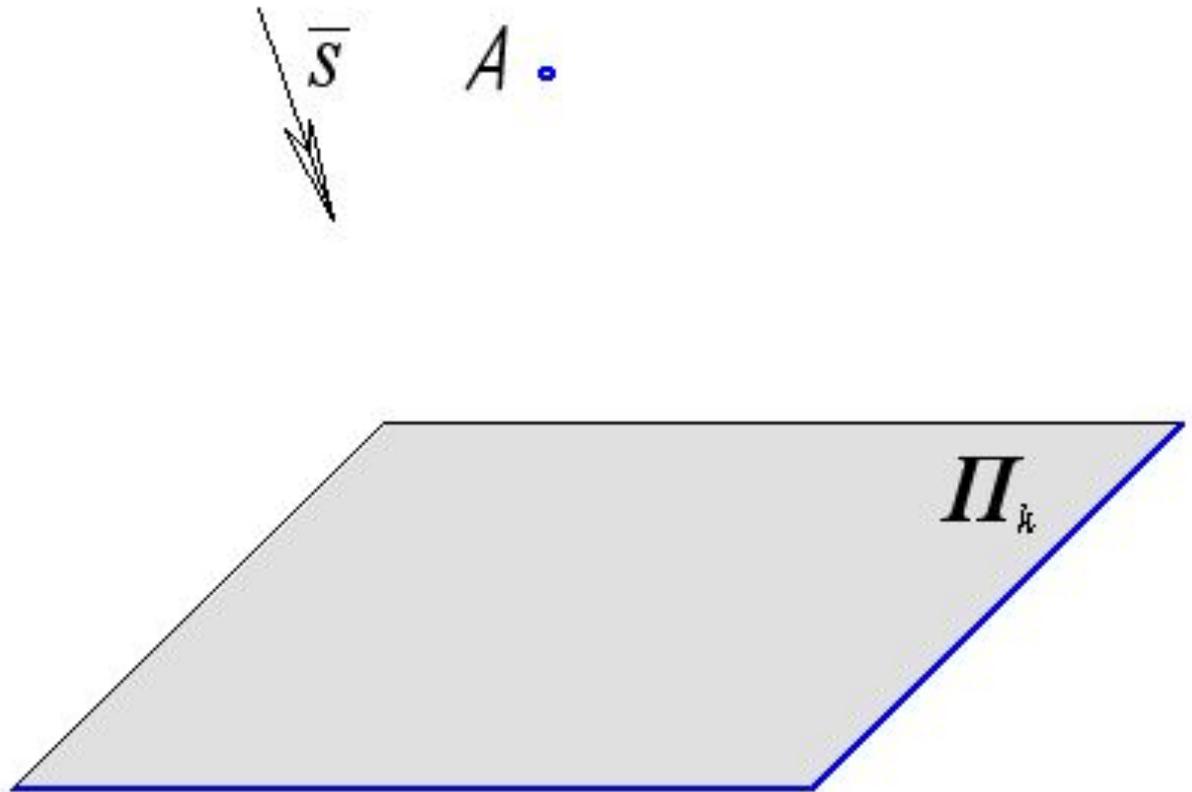
3. Единство правил построения изображения и правил его графического оформления

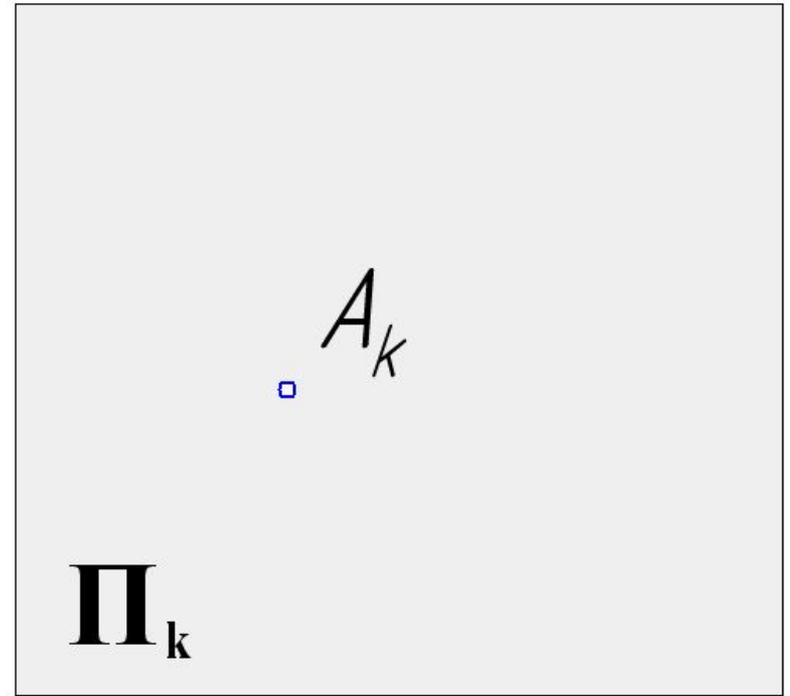
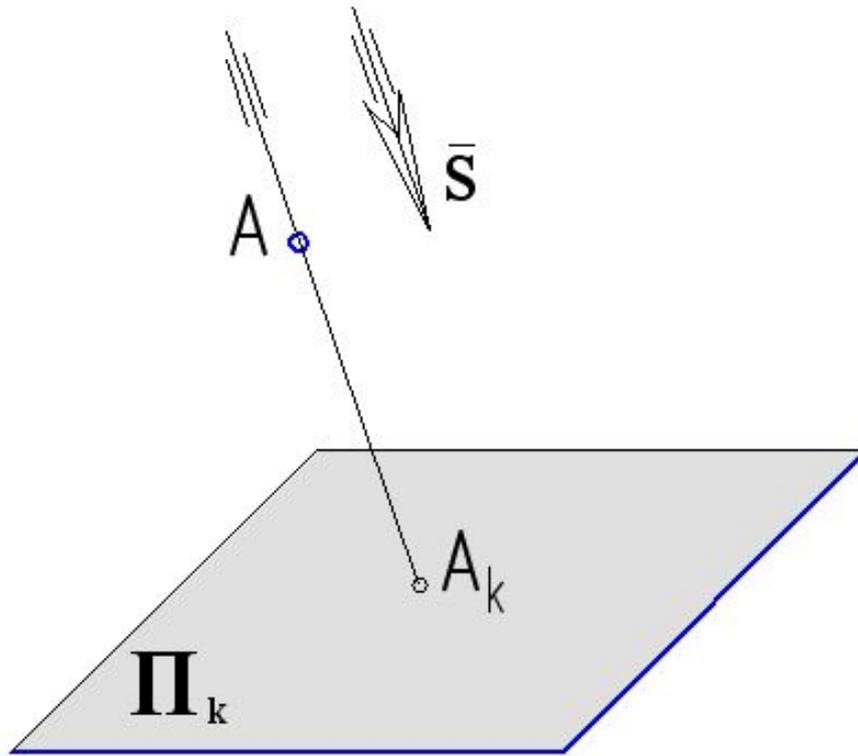
Выводы

- Выбор того или иного вида проекции определяется функциональным назначением получаемого изображения.
- Для презентаций определяющим свойством является наглядность изображения (перспективная или аксонометрическая проекция).
- Для разработки технологического процесса изготовления (строительства) объекта определяющим является обратимость изображения (ортогональные проекции).

Ортогональные проекции

Возьмем
произвольную
точку A и
плоскость
проекций Π_{κ} .

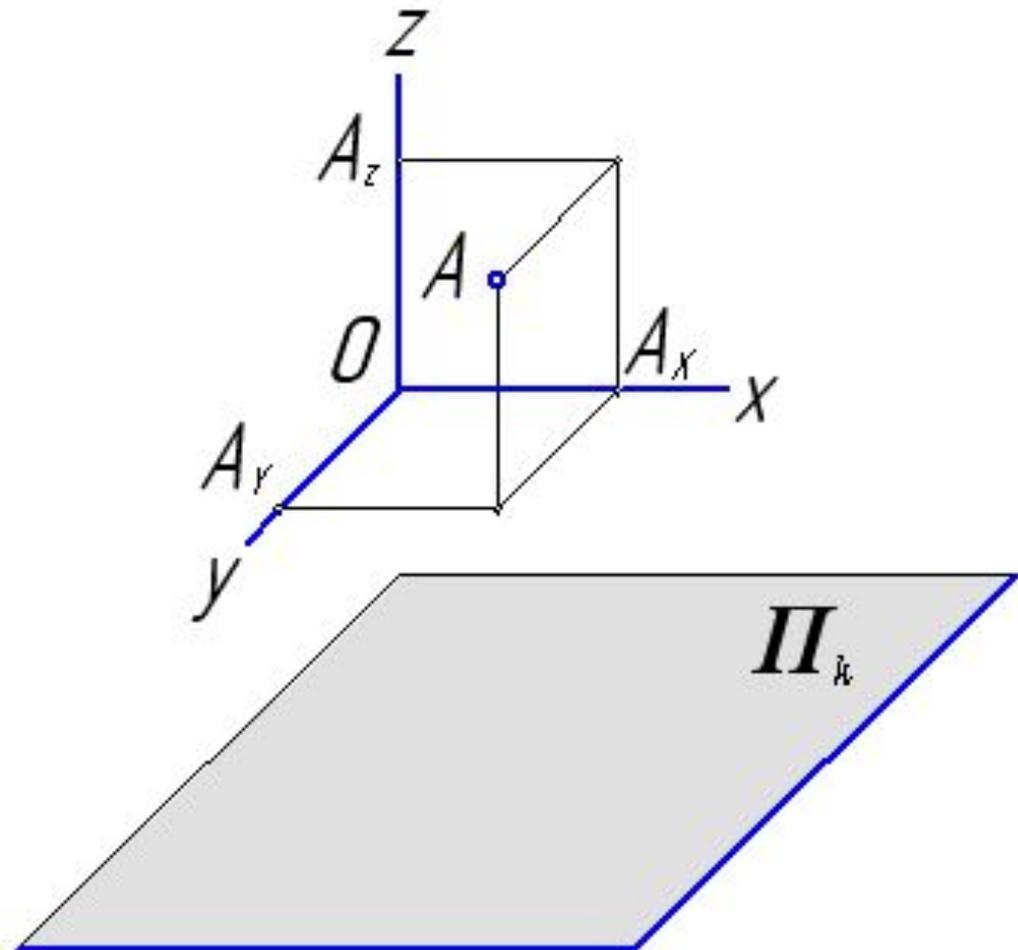




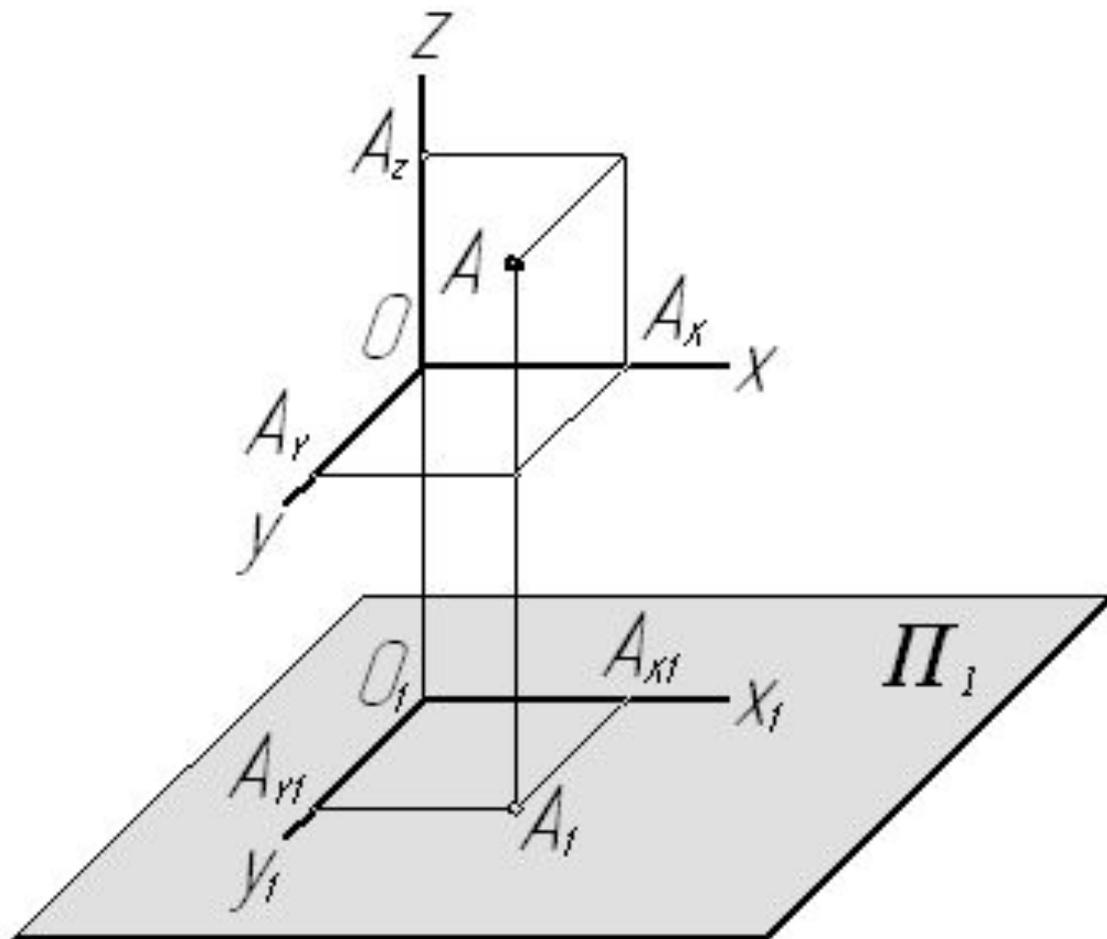
Спроецируем точку A на плоскость проекций Π_k по направлению \mathbf{s} .
 Полученная проекция A_k точки A не дает возможности точно определить положение самой точки A в пространстве, так как проекции A_k соответствует все множество точек, принадлежащих проектирующей прямой, проходящей через точку A

**Одна проекция точки без дополнительных условий
 однозначно не определяет ее положение в пространстве**

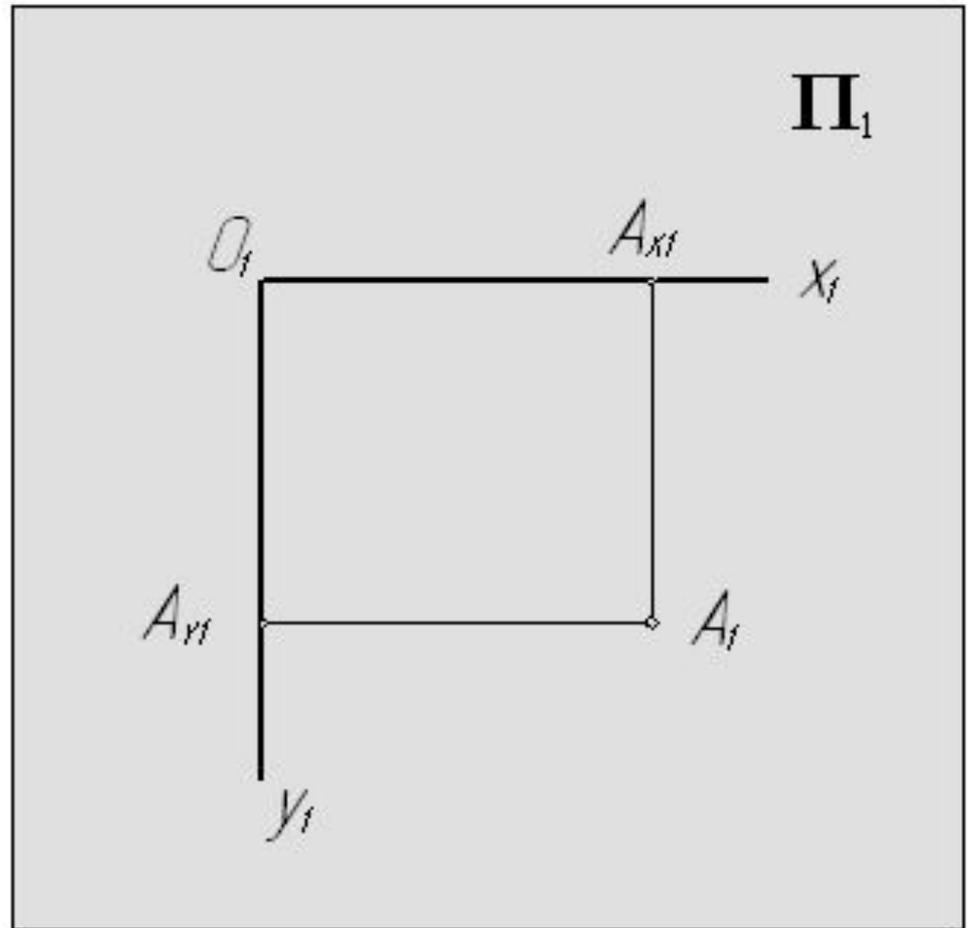
Введем пространственную ортогональную систему координат $Oxyz$ с условием, что координатная плоскость xOy будет параллельна плоскости проекций Π_1 . “Привяжем” точку A к выбранной системе координат.



Ортогонально
спроецируем
систему
координат
 $Oxyz$ и
связанную с
ней точку A на
плоскость
проекций Π_1 .

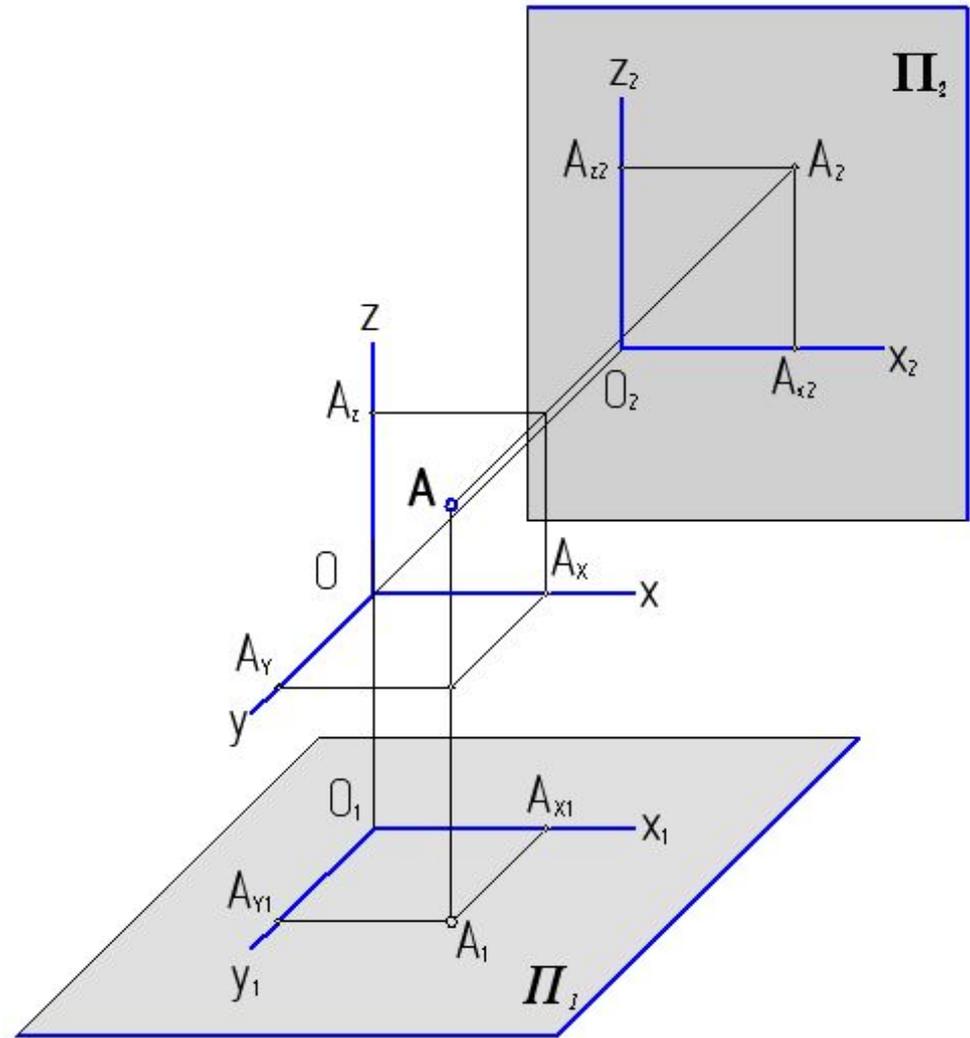


В этом случае на проекции мы имеем только две координаты точки A – x_A и y_A , но отображаемые в истинную величину. Координата z_A , определяющая высоту точки A , отсутствует.



Как было определено ранее, без дополнительных условий изображение необратимо

Введем вторую плоскость проекций Π_2 , параллельную координатной плоскости xOz . Ортогонально спроецируем точку A совместно с системой координат $Oxyz$ на плоскость проекций Π_2 . Как и в предыдущем случае получаем две координаты x_A и z_A в истинную величину. Т.е. мы получили все три координаты точки A в истинную величину.



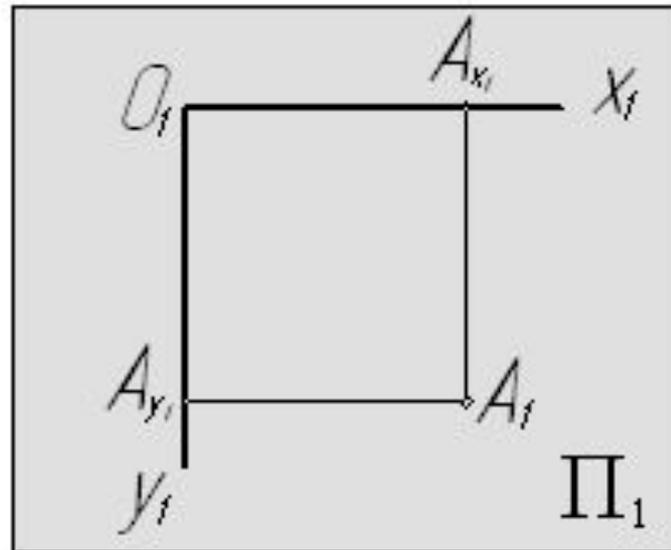
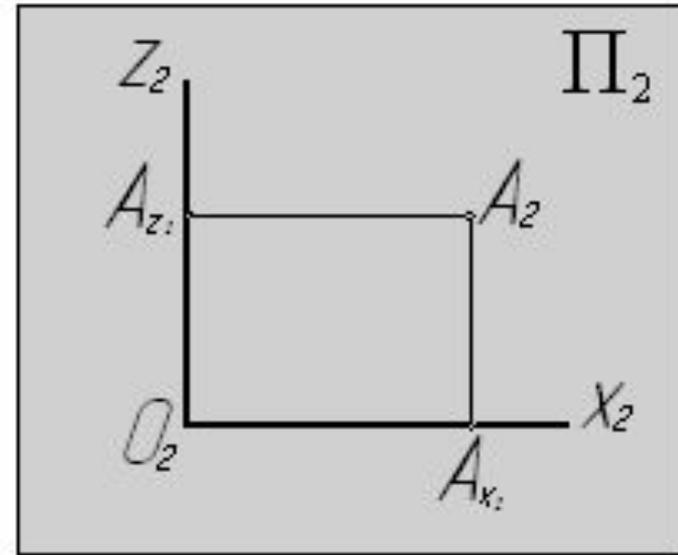
Но координатные
плоскости xOz и xOy
взаимно перпендикулярны.

$$xOz \perp xOy$$

Следовательно, плоскости
проекций Π_1 и Π_2 также
взаимно перпендикулярны

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

Следовательно:

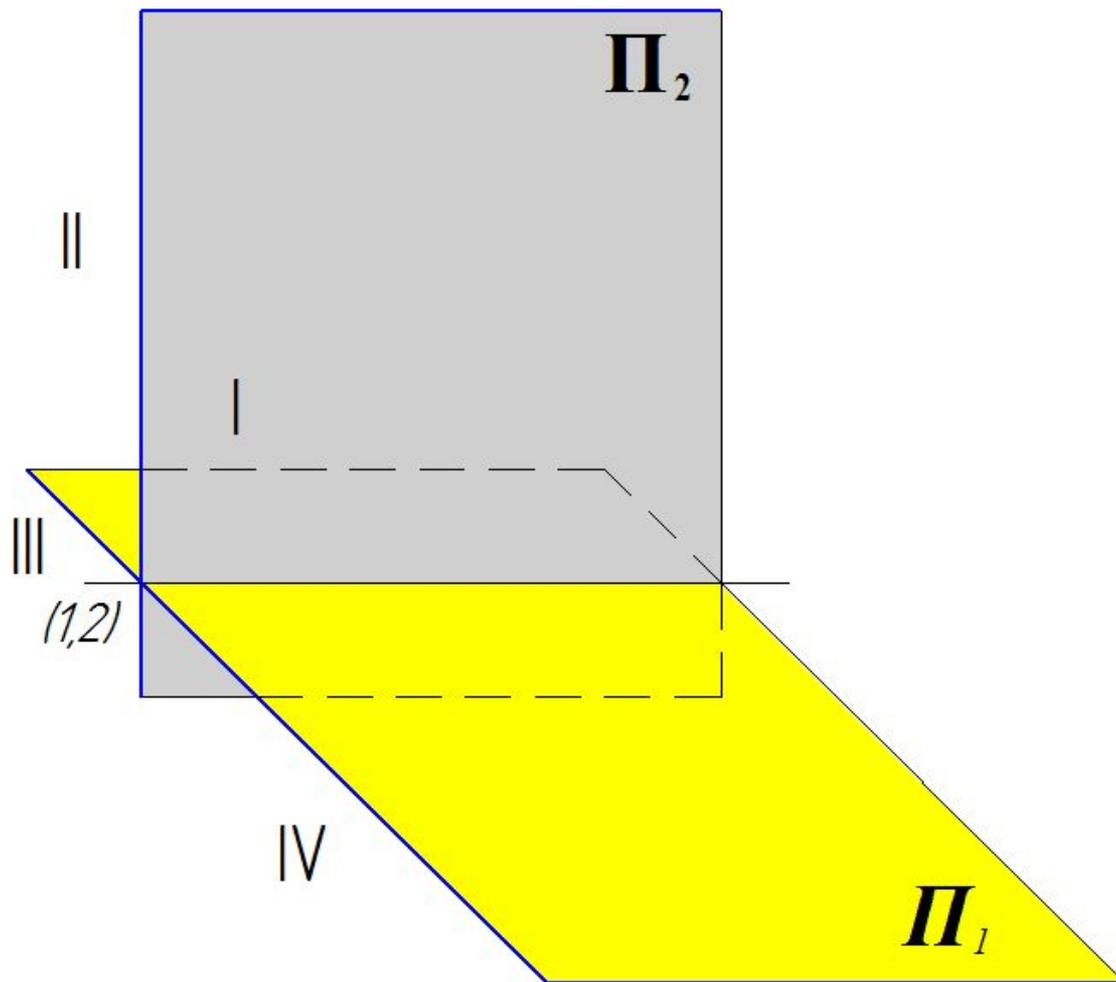


Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций однозначно определяют положение точки в пространстве и делают изображения обратимыми.

Метод Монжа

Ортогональная система двух плоскостей проекций

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$
$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = (1,2)$$



Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

Π_2 – фронтальная плоскость проекций

I, II, III, IV – четверти пространства

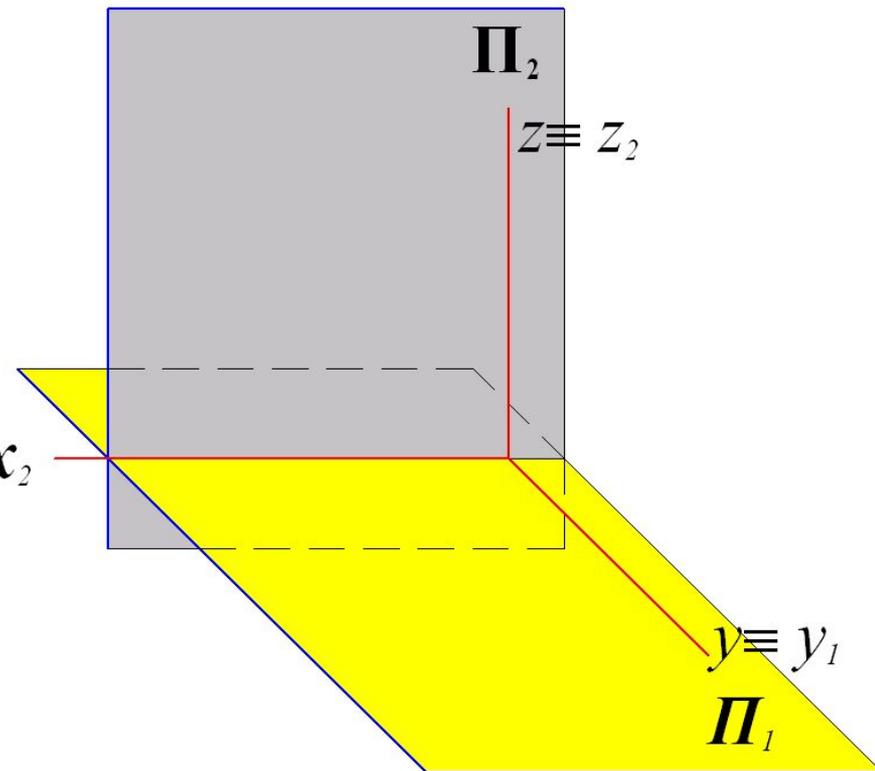
Пространственная
система
координат
совмещается с
плоскостями
проекций так,
чтобы

$$xOz \equiv \Pi_2,$$

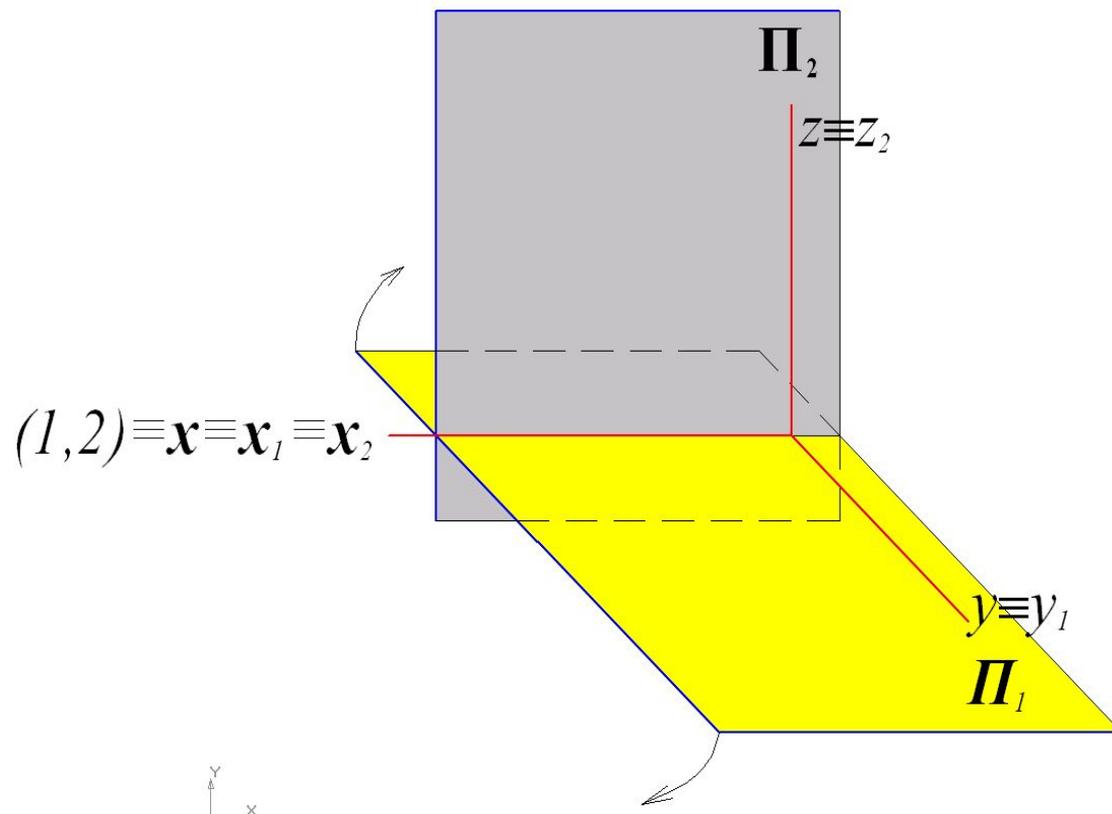
$$xOy \equiv \Pi_1,$$

$$x \equiv (1,2)$$

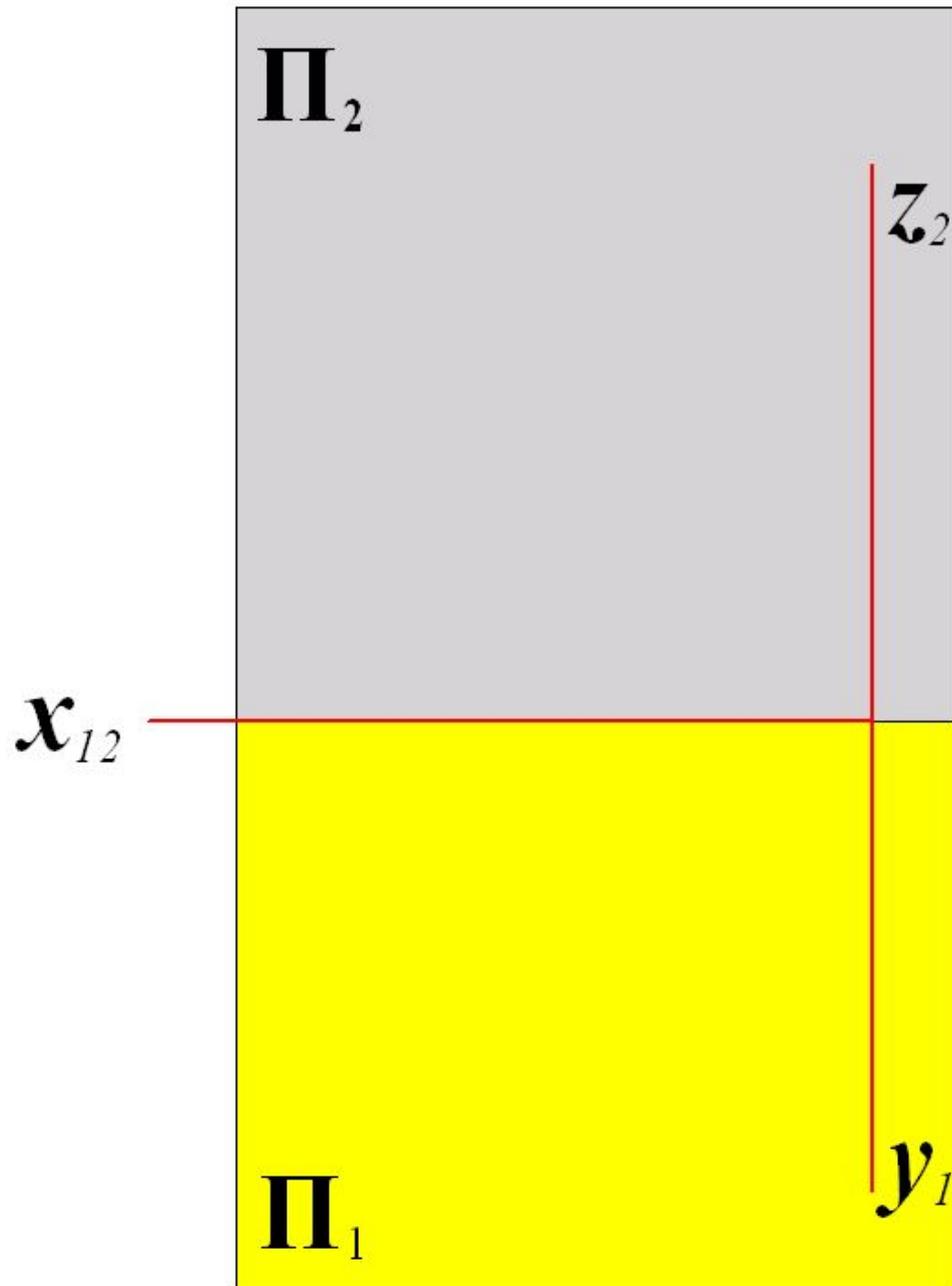
$$(1,2) \equiv \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_2$$



Для получения
плоскостного
чертежа
горизонтальную
плоскость
проекций Π_1
поворачивают
вокруг линии
пересечения $(1,2)$
до совмещения с
плоскостью Π_2 .



Плоскости
проекций Π_1 и Π_2
совмещены в одну
общую плоскость.



Так как плоскости проекций бесконечны, то их границы не оказывают.

Координатные оси y и z также не показываются.

В дальнейшем, когда не требуется знать положение объекта в пространстве относительно системы координат $Oxyz$, ось $x_{1,2}$ также может не изображаться. Получаем безосную систему.



Ортогональная система трех плоскостей проекций

Вводится третья
плоскость проекций

Π_3 – профильная

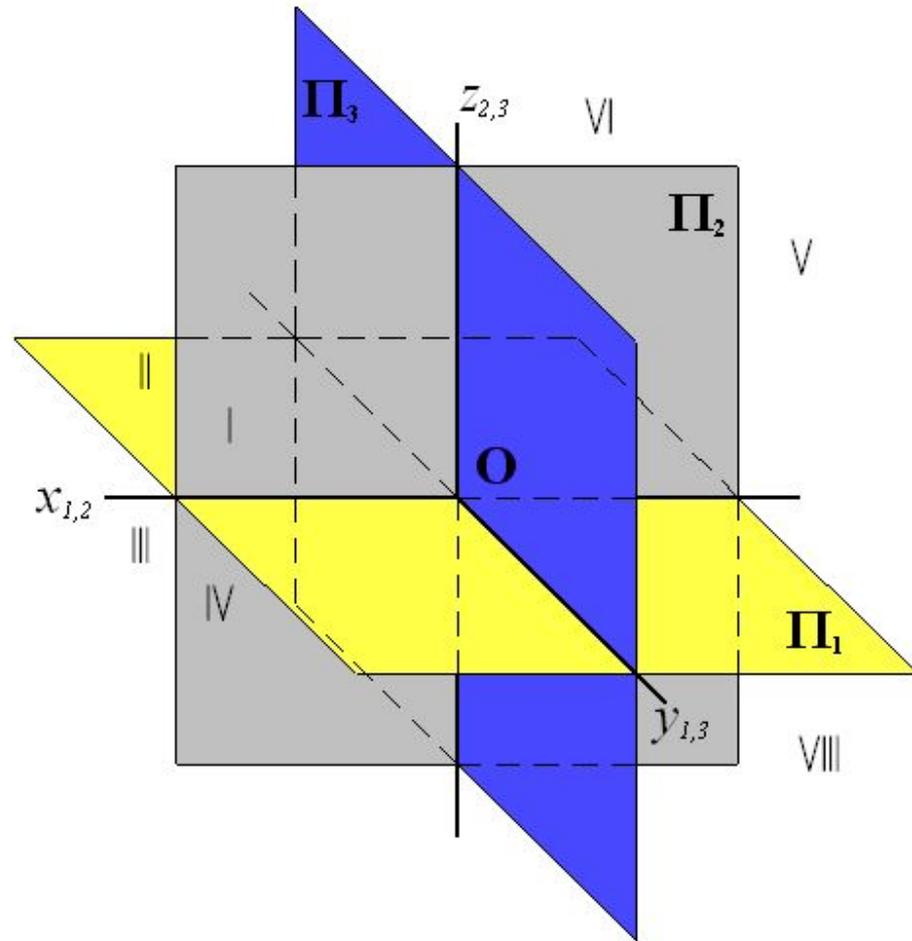
$\Pi_3 \equiv yOz$

$\Pi_3 \perp \Pi_1$ и $\Pi_3 \perp \Pi_2$;

$\Pi_3 \cap \Pi_1 = (1,3), (1,3) \equiv y \Rightarrow y_{1,3}$

$\Pi_3 \cap \Pi_2 = (2,3), (2,3) \equiv z \Rightarrow z_{2,3}$

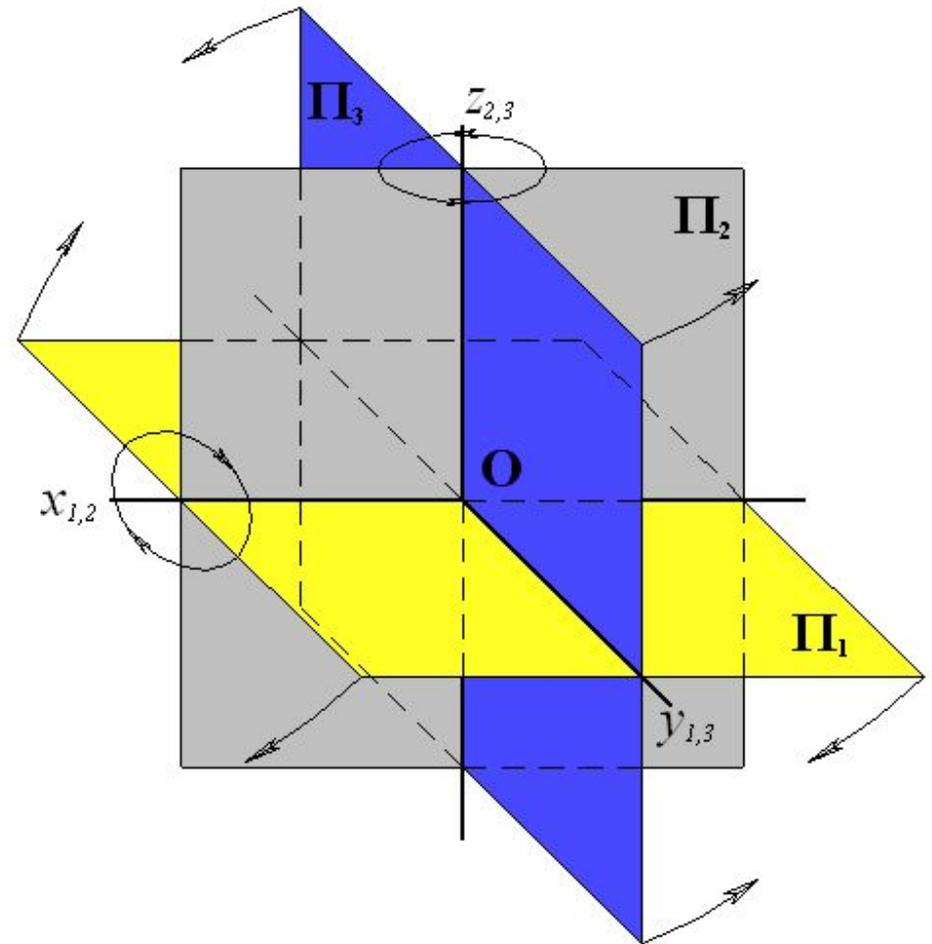
$\Pi_2 \cap \Pi_1 = (1,2), (1,2) \equiv x \Rightarrow x_{1,2}$



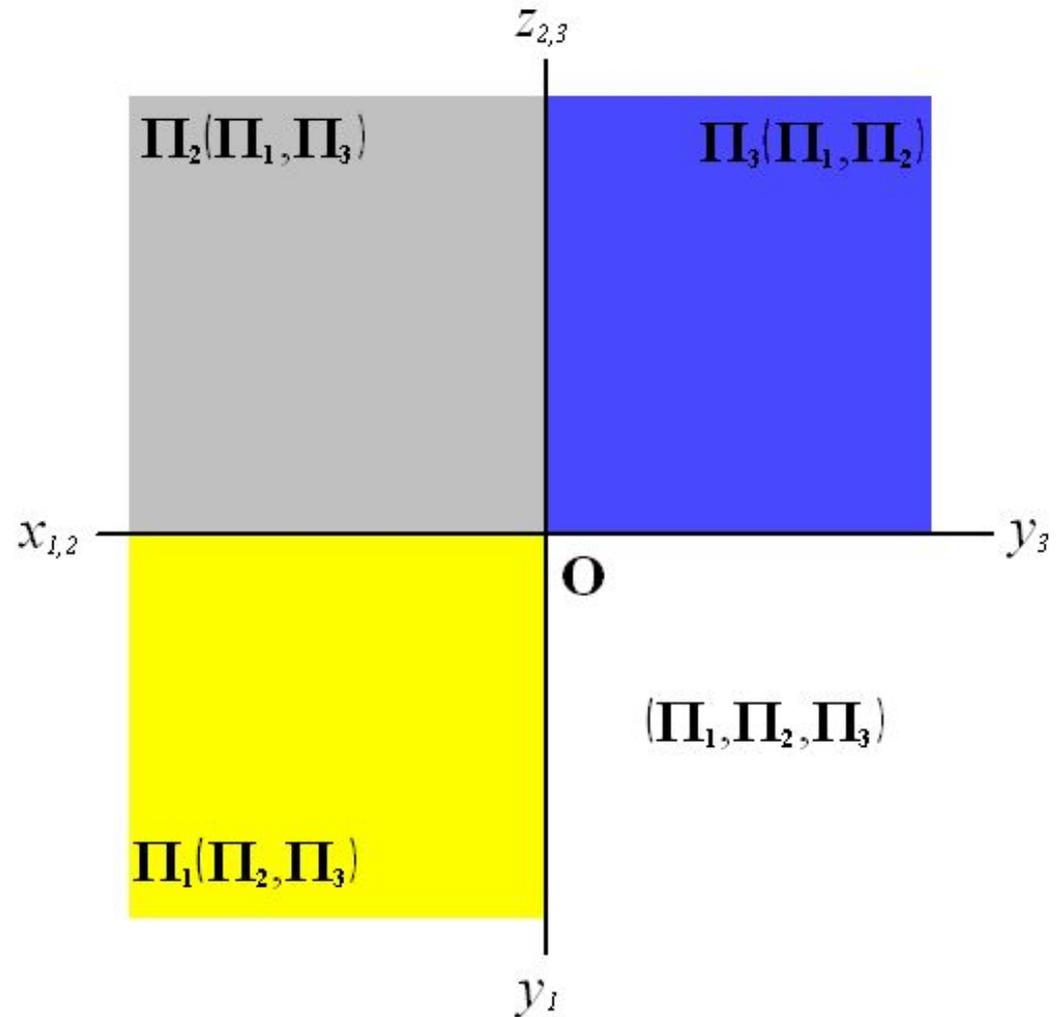
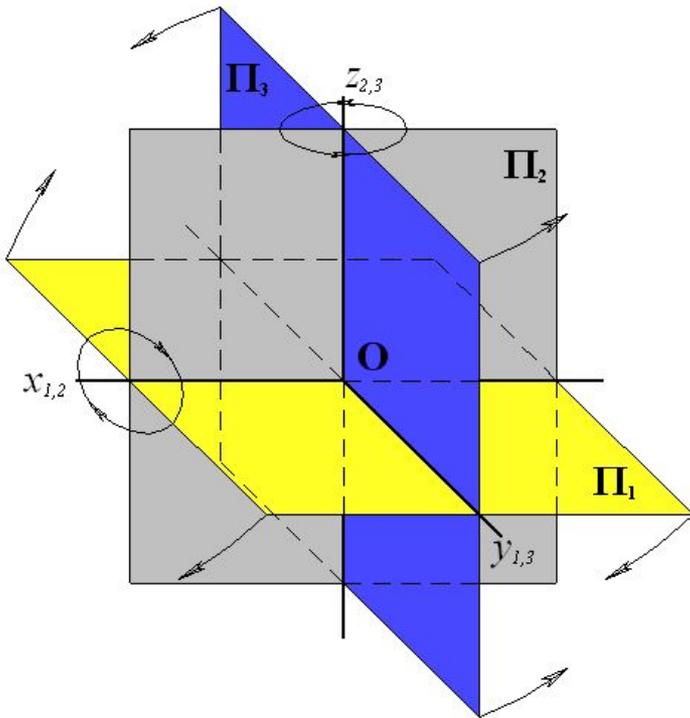
Пространство разделено на 8 частей - **октантов**

Для перехода от трехмерного изображения к плоскостному- двумерному выполняют следующие действия:

- Положение фронтальной плоскости проекций Π_2 не изменяют;
- горизонтальную плоскость проекций Π_1 поворачивают вокруг оси $x_{1,2}$ до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2 ;
- профильную плоскость проекций Π_3 поворачивают вокруг оси $z_{2,3}$ также до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2 .



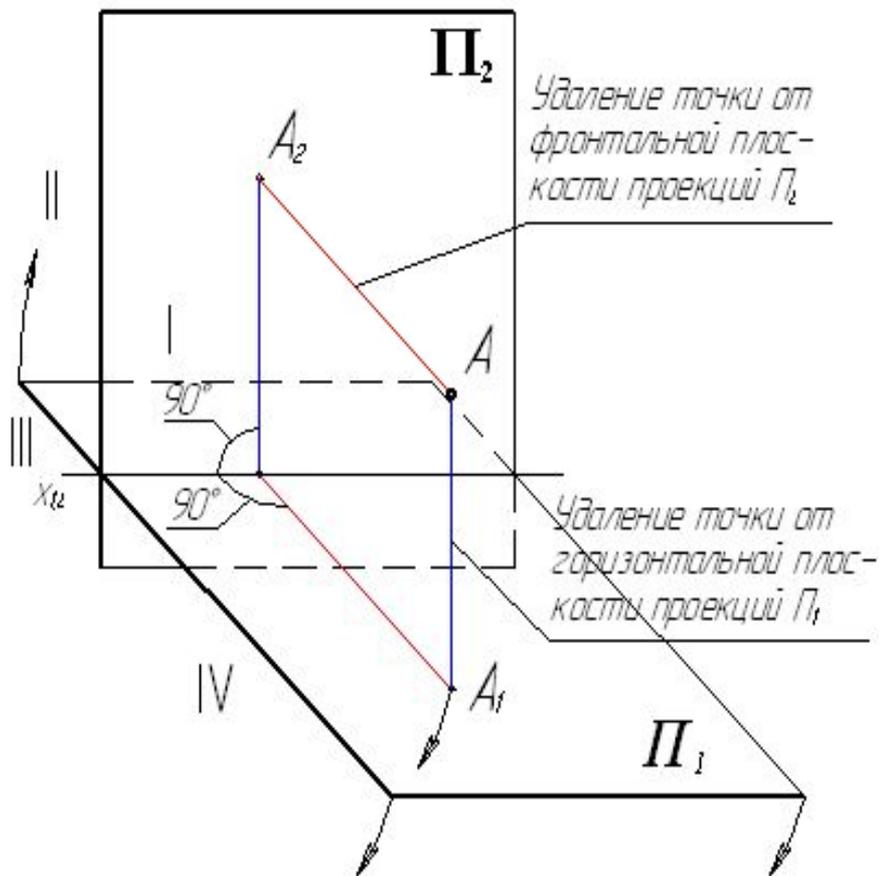
Все три плоскости
проекций совмещены в
одну общую плоскость



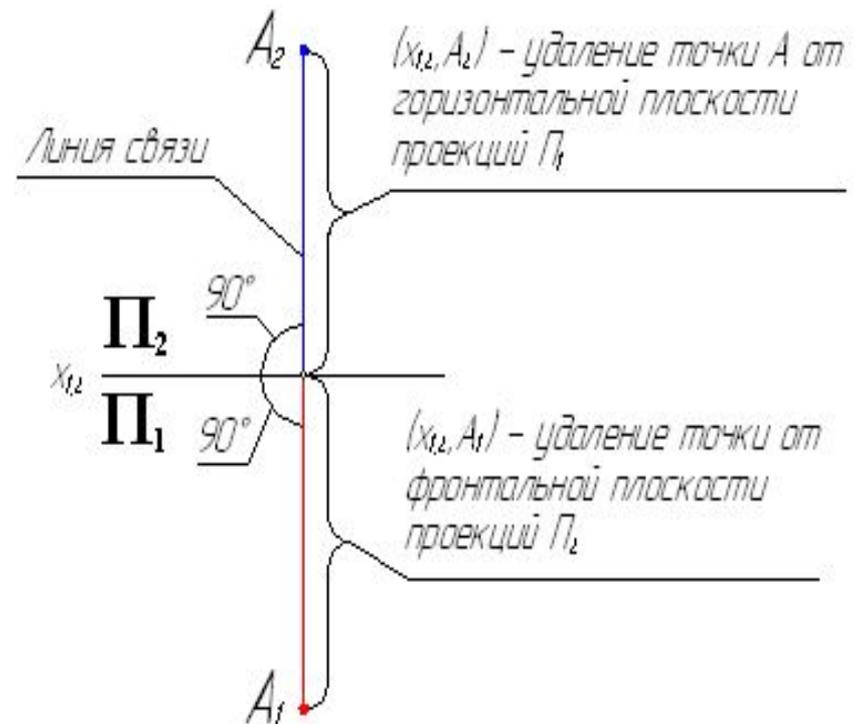
Проецирование точки

Точка в I-ой четверти

Наглядное изображение



Плоскостное изображение -
Эпюр



Горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси $x_{1,2}$

$$A_1 A_2 \perp x_{1,2}$$

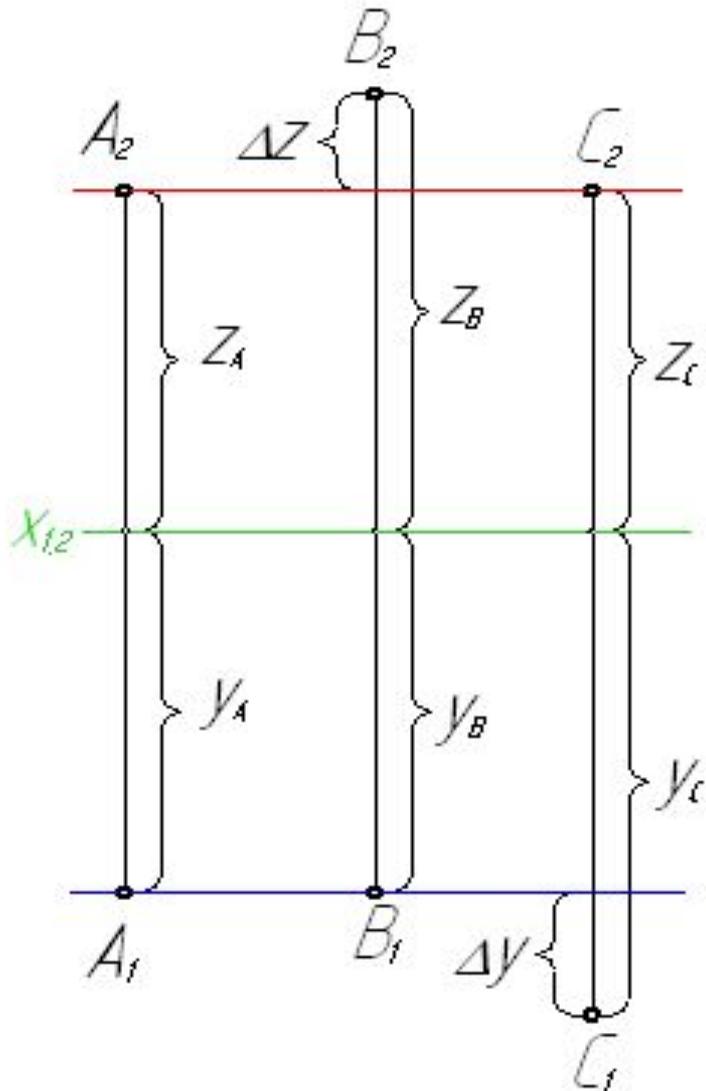
Расстояние от оси $x_{1,2}$ до горизонтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до фронтальной плоскости проекций.

$$(x_{1,2}, A_1) = (A, \Pi_2) - \textit{\underline{глубина}}$$

Расстояние от оси $x_{1,2}$ до фронтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до горизонтальной плоскости проекций.

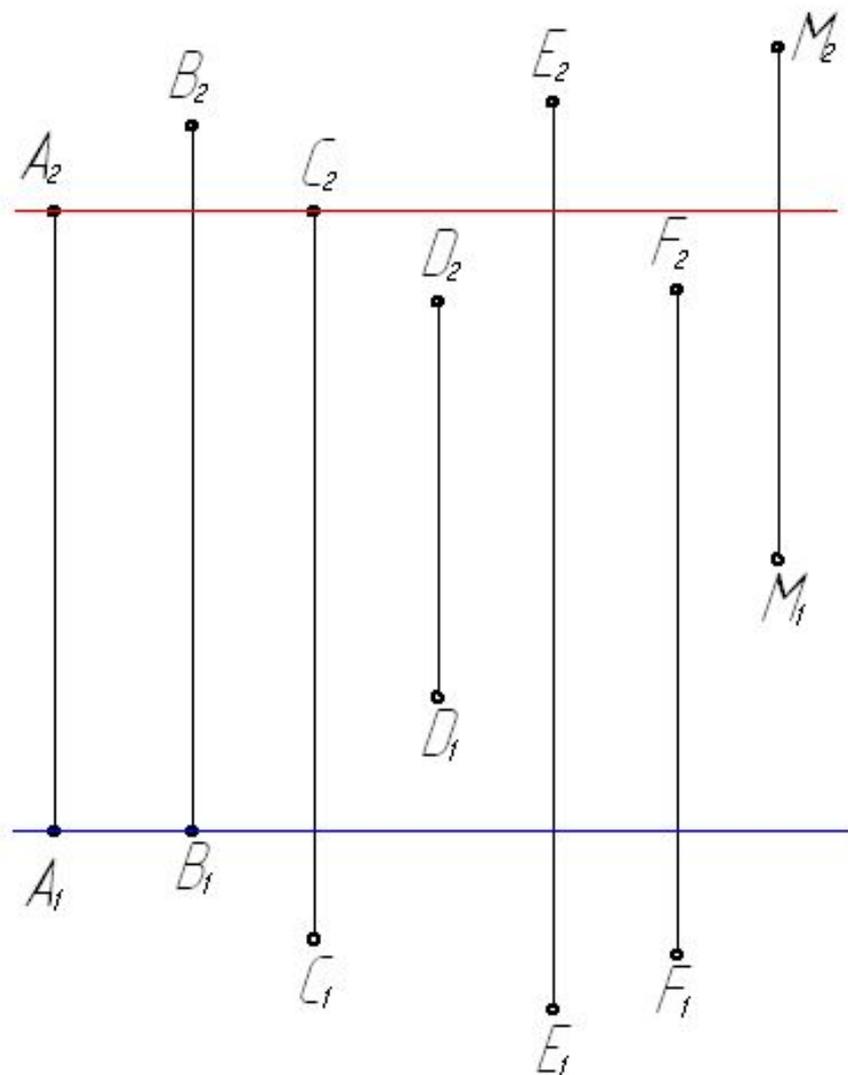
$$(x_{1,2}, A_2) = (A, \Pi_1) - \textit{\underline{высота}}$$

Абсолютные и относительные координаты точки



- $Z_A, Z_B, Z_C, Y_A, Y_B, Y_C$ – абсолютные координаты;
- $\Delta z, \Delta y$ – относительные координаты (приращения).

Безосный эпюр

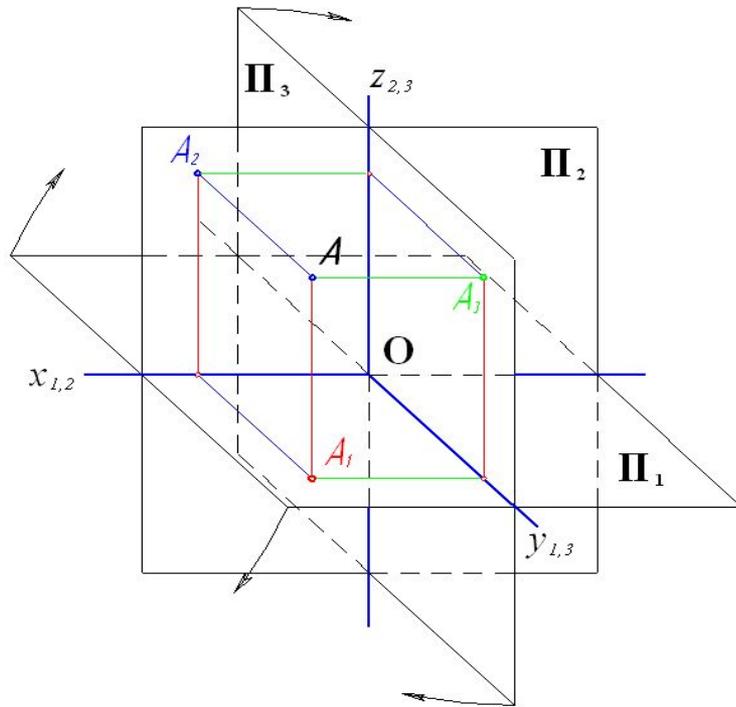


- Точка В выше точки А;
- Точка С перед точкой А;
- Точка D ниже точки А и за точкой А;
- Точка Е выше точки А и перед точкой А;
- Точка F ниже точки А и перед точкой А;
- Точка М выше точки А и за точкой А.

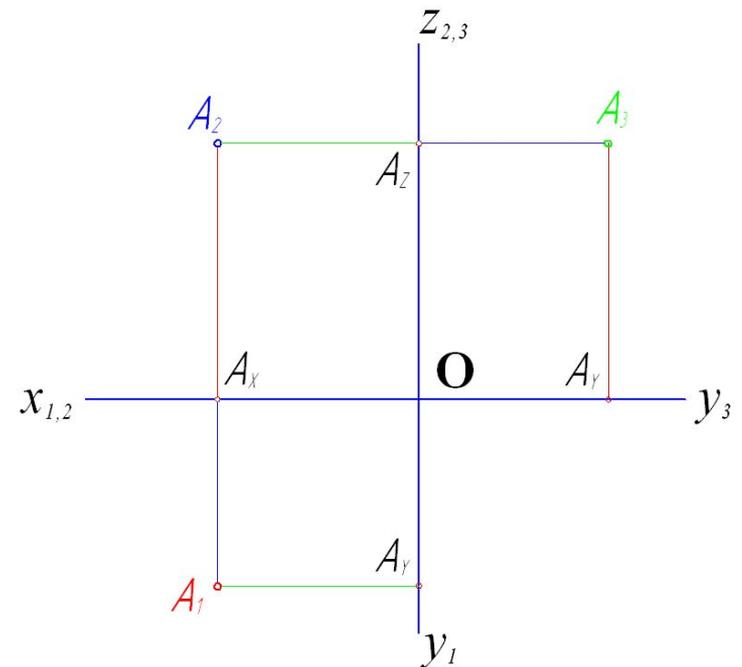
Проецирование точки в системе трех ортогональных плоскостей проекций

Точка в первом октанте

Наглядное изображение



Эпюр

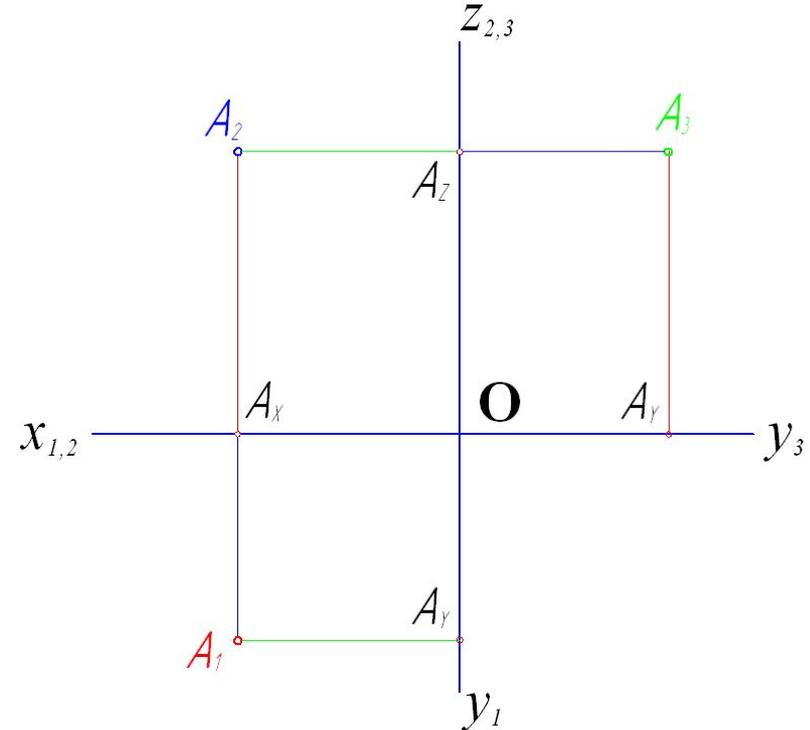


$$\left. \begin{aligned} (A, \Pi_1) &= (A_2, x_{1,2}) = z_A \\ (A, \Pi_2) &= (A_1, x_{1,2}) = y_A \\ (A, \Pi_3) &= (A_2, z_{2,3}) = x_A \end{aligned} \right\}$$

абсолютные координаты точки

Условия, которым должен удовлетворять эюр точки, расположенной в любой части пространства, в системе трех ортогональных плоскостей проекций:

- $A_1A_2 \perp x_{1,2}$
- $A_2A_3 \perp z_{2,3}$
- $(A_1, x_{1,2}) = (A_3, z_{2,3})$



Переход от эпюра в начертательной геометрии к безосному чертежу

