Теорема Виета

Подготовил учитель математики 34 школы Белгорода

Василисин С.В.

В математике существуют специальные приемы, с которыми многие квадратные уравнения решаются очень быстро и без всяких дискриминантов. Более того, при надлежащей тренировке многие начинают решать квадратные уравнения устно, буквально «с первого взгляда».

Квадратное уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$ называется приведенным. Обратите внимание: коэффициент при x^2 равен 1. Никаких других ограничений на коэффициенты не накладывается.

Примеры:
$x^2 + 7x + 12 = 0$ — это приведенное квадратное уравнение;
$x^2 − 5x + 6 = 0$ — тоже приведенное;

Задача. Преобразовать квадратное уравнение в приведенное:

$3x2 - 12x + 18 = 0;$

$-4x2 + 32x + 16 = 0;$

$1{,}5x2 + 7{,}5x + 3 = 0;$

$2x2 + 7x - 11 = 0$

- Разделим каждое уравнение на коэффициент при переменной **x2.** Получим**:**
- **3x2** − **12x + 18 = 0** ⇒ **x2** − **4x + 6 = 0 —** разделили все на **3;**
- −**4x2 + 32x + 16 = 0** ⇒ **x2** − **8x** − **4 = 0 —** разделили на −**4;**
- **1,5x2 + 7,5x + 3 = 0** ⇒ **x2 + 5x + 2 = 0 —** разделили на **1,5,** все коэффициенты стали целочисленными**;**
- **2x2 + 7x** − **11 = 0** ⇒ **x2 + 3,5x** − **5,5 = 0 —** разделили на **2.** При этом возникли дробные

Как видите, приведенные квадратные уравнения могут иметь целые коэффициенты даже в том случае, когда исходное уравнение содержало дроби. Теперь сформулируем основную теорему, для которой, собственно, и вводилось понятие приведенного квадратного уравнения:

- Теорема Виета. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение вида $x2 + bx + c = 0$. Предположим, что это уравнение имеет действительные корни $x1$ и $x2$. В этом случае верны следующие утверждения:
- $x1 + x2 = -b$. Другими словами, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при переменной x, взятому с противоположным знаком;
- $x1 \cdot x2 = c$. Произведение корней квадратного уравнения равно свободному коэффициенту.

- Примеры. Для простоты будем рассматривать только приведенные квадратные уравнения, не требующие дополнительных преобразований:
- **x2 − 9x + 20 = 0 ⇒ x1 + x2 = − (−9) = 9; x1 ·x2 = 20;** корни: **x1 = 4; x2 = 5;**
- **x2 + 2x − 15 = 0 ⇒ x1 + x2 = −2; x1 ·x2 = −15;** корни: **x1 = 3; x2 = −5;**
- **x2 + 5x + 4 = 0 ⇒ x1 + x2 = −5; x1 ·x2 = 4;** корни: **x1 = −1; x2 = −4.**

Теорема Виета дает нам дополнительную информацию о корнях квадратного уравнения. На первый взгляд это может показаться сложным, но даже при минимальной тренировке вы научитесь «видеть» корни и буквально угадывать их за считанные секунды.

- Задача. Решите квадратное уравнение:
- x2 − 9x + 14 = 0;
- x2 − 12x + 27 = 0;
- 3x2 + 33x + 30 = 0;
- −7x2 + 77x − 210 = 0.

- Попробуем выписать коэффициенты по теореме Виета и «угадать» корни:
- $x2 - 9x + 14 = 0$ — это приведенное квадратное уравнение.
- По теореме Виета имеем: $x1 + x2 = -(-9) = 9$; $x1 \cdot x2 = 14$. Несложно заметить, что корни — числа 2 и 7;
- $x2 - 12x + 27 = 0$ — тоже приведенное.
- По теореме Виета: $x1 + x2 = -(-12) = 12$; $x1 \cdot x2 = 27$. Отсюда корни: 3 и 9;
- $3x2 + 33x + 30 = 0$ — это уравнение не является приведенным. Но мы это сейчас исправим, разделив обе стороны уравнения на коэффициент $a = 3$. Получим: $x2 + 11x + 10 = 0$.
- Решаем по теореме Виета: $x1 + x2 = -11$; $x1 \cdot x2 = 10 \Rightarrow$ корни: -10 и -1;
- $-7x2 + 77x - 210 = 0$ — снова коэффициент при $x2$ не равен 1, т.е. уравнение не приведенное. Делим все на число $a = -7$. Получим: $x2 - 11x + 30 = 0$.
- По теореме Виета: $x1 + x2 = -(-11) = 11$; $x1 \cdot x2 = 30$; из этих уравнений легко угадать корни: 5 и 6.

- Разумеется, во всех размышлениях мы исходили из двух важных предположений, которые, вообще говоря, не всегда выполняются в реальных задачах:
- Квадратное уравнение является приведенным, т.е. коэффициент при x2 равен 1;
- Уравнение имеет два различных корня. С точки зрения алгебры, в этом случае дискриминант D > 0 — по сути, мы изначально предполагаем, что это неравенство верно.

- Таким образом, общая схема решения квадратных уравнений по теореме Виета выглядит следующим образом:
- Свести квадратное уравнение к приведенному, если это еще не сделано в условии задачи;
- Если коэффициенты в приведенном квадратном уравнении получились дробными, решаем через дискриминант. Можно даже вернуться к исходному уравнению, чтобы работать с более «удобными» числами;
- В случае с целочисленными коэффициентами решаем уравнение по теореме Виета;
- Если в течение нескольких секунд не получилось угадать корни, забиваем на теорему Виета и решаем через дискриминант.

- Задача. Решите уравнение: $5x2 - 35x + 50 = 0$.
- Итак, перед нами уравнение, которое не является приведенным, т.к. коэффициент $a = 5$.
- Разделим все на 5, получим: $x2 - 7x + 10 = 0$.
- Все коэффициенты квадратного уравнения целочисленные — попробуем решить по теореме Виета.
- Имеем: $x1 + x2 = -(-7) = 7$; $x1 \cdot x2 = 10$.
- В данном случае корни угадываются легко — это 2 и 5.
- Считать через дискриминант не надо.

- Задача. Решите уравнение: $-5x2 + 8x - 2,4 = 0$.
- Смотрим: $-5x2 + 8x - 2,4 = 0$ — это уравнение не является приведенным, разделим обе стороны на коэффициент $a = -5$.
- Получим: $x2 - 1,6x + 0,48 = 0$ — уравнение с дробными коэффициентами.
- Лучше вернуться к исходному уравнению и считать через дискриминант: $-5x2 + 8x - 2,4 = 0 \Rightarrow D = 82 - 4 \cdot (-5) \cdot (-2,4) = 16 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x1 = 1,2; x2 = 0,4$.