

Основы математической обработки информации

Курс лекций для студентов

Егорова И.С., ХГУ им. Н.Ф. Катанова, 2016 г.
© Тюканов А.С. РГПУ им. А.И.Герцена, 2012 г.

Введение

- Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира (Фридрих Энгельс).
- Математика – это скопление абстрактных форм - математических структур: алгебраических, топологических и структур порядка (коллектив французских математиков под общим псевдонимом Николя Бурбаки)

Разделы современной математики

Сегодня в математике обычно выделяют следующие области:

- *математический анализ*
 - *дифференциальные уравнения*
 - *уравнения с частными производными*
 - *функциональный анализ и интегральные уравнения*
 - *теория функций комплексного переменного*
- *аналитическая геометрия*
- *линейная алгебра*
- *математическая логика*
- *теория вероятностей*
- *математическая статистика*
- *теория случайных процессов*
- *вариационное исчисление и методы оптимизации*
- *уравнения и методы математической физики*
- *вычислительная математика*
- *криптография*
- *теория кодирования и теория искусственного интеллекта*
- *компьютерная геометрия*
- *топология*
- *и др.*

Аксиоматический подход в математике

- В основе построения математической теории лежит аксиоматический метод. В основу научной теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные положения теории получаются, как логические следствия аксиом. Основными методами в математических исследованиях являются математические доказательства - строгие логические рассуждения.
- перечисление основных понятий;
- изложение определений;
- изложение аксиом;
- изложение теорем;
- доказательство этих теорем.

Аксиома – утверждение, принимаемое без доказательств.

Теорема – утверждение, вытекающее из аксиом.

Доказательство – составная часть дедуктивной системы, это есть рассуждение, которое показывает, что истинность утверждения вытекает логически из истинности предыдущих теорем или аксиом.

Математика на стыке наук

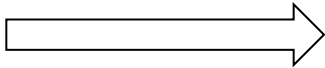
- математическая физика,
- математическая логика,
- математическая лингвистика,
- математическая экономика,
- математическая история
- и др.

Математика в естествознании

Направления в изучении объектов окружающего мира (направления познания):

- Экспериментальное
 - Теоретическое
 - Вычислительное
-

Экспериментальное направление

- Наблюдение
 - Эксперимент
- 
- Экспериментальные данные
-
- Математическая обработка результатов эксперимента (экспериментальных данных)
 - определение истинных значений измеряемых величин
 - определение вида функциональной зависимости исследуемых величин – построение *эмпирических зависимостей*
 - определение количественных характеристик (параметров) функциональных зависимостей
 - и т.д.

Теоретическое направление

- Выдвижение гипотезы и построение математической модели (в виде уравнений или неравенств)
- Исследование математической модели (решение математической задачи)
- Экспериментальная проверка (если возможно)
- Модификация модели

Основа теоретического подхода –
математическое моделирование

Вычислительное направление

- Выбор или построение математической модели
- Разработка численного алгоритма решения математической задачи
- Составление компьютерной программы
- Проведение вычислений с помощью компьютера
- Анализ результатов и их экспериментальная проверка (если возможно)

Модель + Алгоритм + Программа — основа
вычислительного эксперимента

Математическое моделирование

- **Модель** — это такой материальный или мысленно представленный объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект — оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.
- **Математическая модель** — это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики.
 - Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений.

Основные этапы математического моделирования

- **Построение модели.** На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект — явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.
- **Решение математической задачи, к которой приводит модель.** На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время. В некоторых случаях для решения математической задачи используют аналитические методы.
- **Интерпретация полученных следствий из математической модели.** Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.
- **Проверка адекватности модели.** На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.
- **Модификация модели.** На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

Математический язык

- Математика: мышление, чувствование и язык.
- Язык – это система условных знаков, принятых в некотором сообществе и обеспечивающая коммуникацию его членов.
- Язык математики как и любой другой язык состоит из совокупности высказываний (предложений). Математические высказывания это математические символы, объединенные формулой.

Математика – язык символов и формул.

Математический язык (продолжение)

- Язык в широком смысле – это словарь, грамматика, рассказы, повести, пьесы и романы, написанные на этом языке.
- В математическом языке:
 - словарь и грамматика – *математическая операционная система*
 - рассказы, повести и прочее – *математические модели*

Элементы теории множеств

- Множество – первичное понятие современной математики, это понятие не определяется через другие понятия а только поясняется.
- **Множество** –
 - «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью» (Георг Кантор, 1845-1918, немецкий математик, основатель теории множеств);
 - совокупность каких-либо объектов
- Объекты, входящие в множество – ***элементы множества***. Например: числа, буквы, люди и т.п.

Элементы теории множеств (продолжение)

- Множества, состоящие из конечного числа элементов – *конечные множества*
- Множества, состоящие из бесконечного числа элементов – *бесконечные множества*
- Обозначения:
 - Множества – A, B, X
 - Элементы множества – a, b, x

Элементы теории множеств (продолжение)

■ Обозначения:

$x \in X$ Объект x есть элемент множества X

$x \notin X$ Объект x не принадлежит множеству X

$A \subset B$ Множество A содержится в множестве B
(входит в множество B)

$\emptyset$ Пустое множество

Множества A и B называются **равными** ($A = B$), если они состоят из одинаковых элементов.

Элементы теории множеств (продолжение)

■ Числовые множества

- Множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Множество целых чисел $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Множество рациональных чисел Q
- Множество действительных чисел R

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Элементы теории множеств (продолжение)

Упражнения:

1. Какие из следующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой:
 - А – множество всех квадратов;
 - В – множество всех прямоугольников;
 - С – множество всех четырехугольников с прямыми углами;
 - D – множество всех прямоугольников с равными сторонами;
 - F – множество всех ромбов с прямыми углами

2. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?

Алгебраические операции над множествами

- **Объединением множеств A и B** называется новое множество, которое обозначается $A \cup B$ и состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B , т.е

$$A \cup B = \{ x \in A \text{ или } x \in B \}$$

Например: $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

- **Пересечением множеств A и B** называется новое множество, которое обозначается $A \cap B$ и состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B , т.е.

$$A \cap B = \{ x \in A \text{ и } x \in B \}$$

Например: $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

Алгебраические операции над множествами

- **Разностью множеств A и B** называется новое множество, которое обозначается $A \setminus B$ и состоит из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B , т.е

$$A \setminus B = \{ x \in A \text{ и } x \notin B \}$$

Например: $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

- **Симметрическая разность $A \Delta B$** есть множество всех элементов, принадлежащих или A , или B (но не обоим вместе)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Например: $\{1,2,3\} \Delta \{2,3,4\} = \{1,4\}$

Алгебраические операции над МНОЖЕСТВАМИ

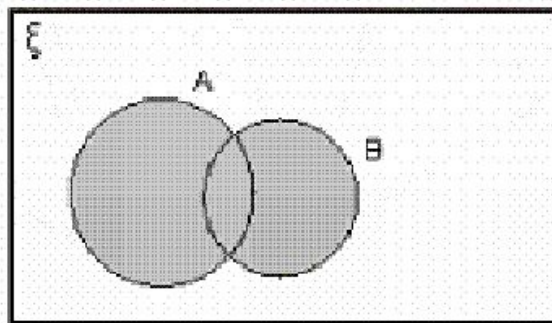
- **Декартовым произведением множеств A и B** называется новое множество, обозначаемое $A \times B$, элементами которого являются всевозможные пары (a, b) , где $a \in A$, $b \in B$, то есть $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$,

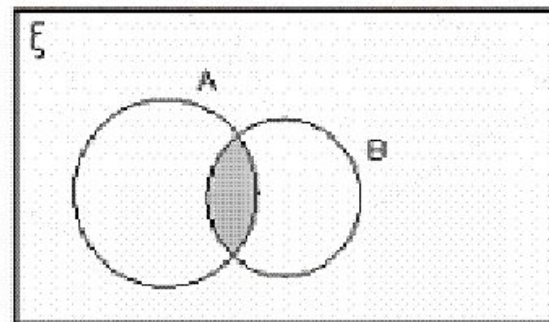
то $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4)\}$.

Отметим, что с декартовым произведением связано понятие координатной плоскости. Множество координат точек координатной плоскости является декартовым произведением $R \times R$, где R – множество действительных чисел – координаты точек по оси x и оси y , соответственно.

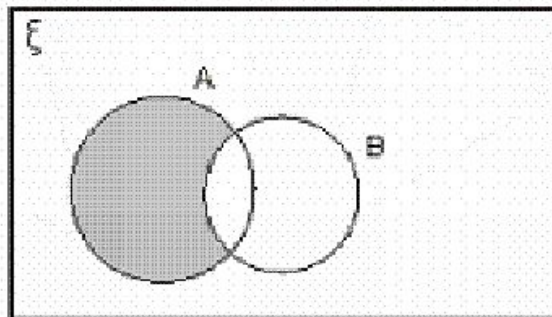
Алгебраические операции над множествами. Крути Эйлера или диаграммы Венна.



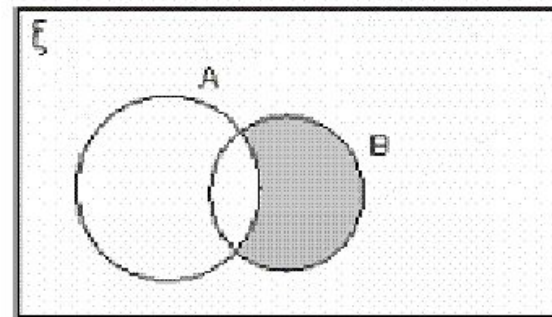
$A \cup B$ (shaded)



$A \cap B$ (shaded)

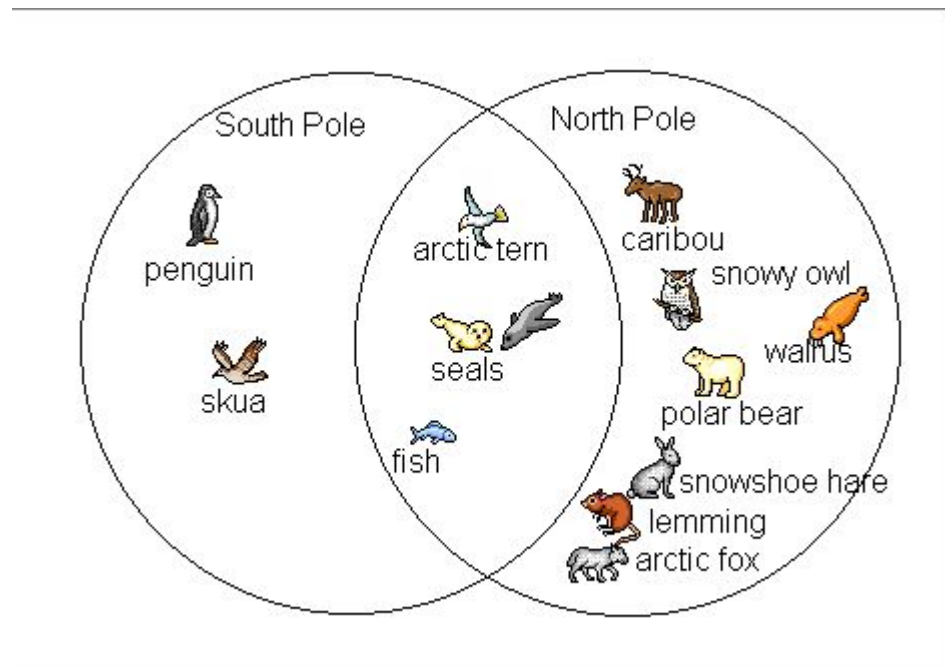


$A - B$ (shaded)



$B - A$ (shaded)

Алгебраические операции над множествами. Крути Эйлера или диаграммы Венна.



Алгебраические операции над множествами

Упражнения

1. Выпишите все подмножества множества $B = \{1, 2, 3\}$
2. Запишите множество A перечислением его элементов, если $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 < x < 8\}$
3. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Записать множества, представляющие:
 - а) объединение $A \cup B$;
 - б) пересечение $A \cap B$;
 - в) разность $A \setminus B, B \setminus A$;
 - г) симметрическую разность $A \Delta B, B \Delta A$;
 - д) декартово произведение $A \times B$.
4. Определить пересечением или объединением множеств $A = \{5, 7, 8\}$ и $B = \{1, 5, 6\}$ является множество $C = \{1, 5, 6, 7, 8\}$?
5. Проверить выполняется ли переместительный закон умножения для декартова произведения двух множеств, т.е. верно ли, что $A \times B = B \times A$? В качестве множеств A и B возьмите множества: $A = \{2\}$; $B = \{1, 3\}$.
6. Проверьте на примере множеств $A = \{2\}$; $B = \{1, 3\}$ и $C = \{4, 5\}$ выполняется ли сочетательный закон для декартова произведения, т.е. верно ли, что $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

Численность множества

Пусть A и B – конечные множества. Число элементов множества A условимся обозначать символом $m(A)$ и называть **численностью** множества A .

Число элементов объединения и разности двух конечных множеств:

Определим численность объединения множеств A и B .

Если множества A и B не пересекаются, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Таким образом, численность объединения конечных непересекающихся множеств равна сумме численностей этих множеств.

Если множества A и B пересекаются, то в сумме $m(A) + m(B)$ число элементов пересечения $A \cap B$ содержится дважды: один раз в $m(A)$, а другой – в $m(B)$. Поэтому, чтобы найти численность объединения $m(A \cup B)$, нужно из указанной суммы вычесть $m(A \cap B)$.

Таким образом: $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

Определим теперь численность разности множеств A и B .

Если множества A и B не пересекаются, то $A \setminus B = A$, и поэтому $m(A \setminus B) = m(A)$.

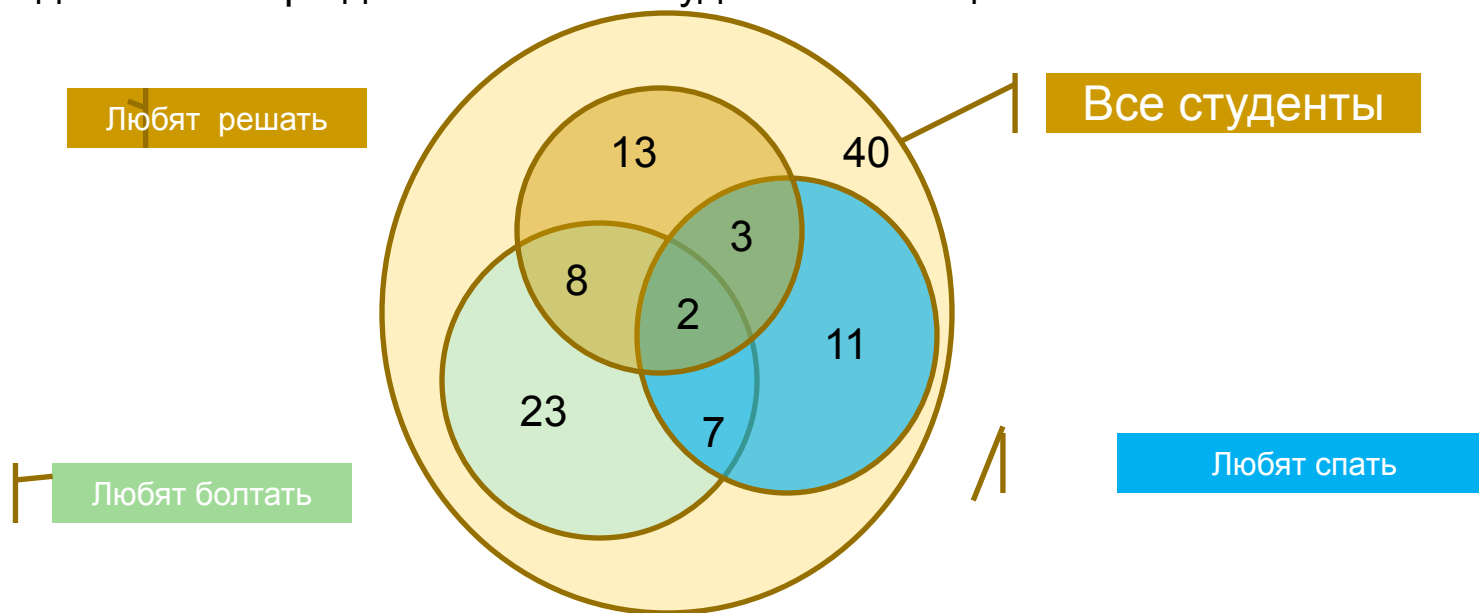
Если множества A и B пересекаются, то $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$.

Если $B \subset A$, то $A \cap B = B$, и, следовательно, $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$.

Использование теории множеств для решения задач

Задача 1

В группе 40 студентов. Из них 23 любят болтать на занятиях, 13 — решать задачи, 11 любят на занятиях спать. Среди тех, кто болтает на занятиях, постоянно засыпают — 7, а среди тех, кто решает задачи, засыпают только 3. Болтать и решать задачи умеют 8 человек; а 2 человека успевают на одной паре делать все три дела. Сколько студентов вообще ничего не любят?



Использование теории множеств для решения задач

Задача 2

В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение задачи:

Обозначим:

U – универсальное множество, т.е. множество всех туристов,

A – множество туристов, знающих английский язык,

B – множество туристов, знающих французский язык.

Необходимо найти количество туристов, не знающих ни одного языка, т.е. количество элементов множества $D = U \setminus (A \cup B)$.

Дано (по условию): $m(U) = 100$ (чел.)

$m(A) = 70$ (чел.)

$m(B) = 45$ (чел.)

$m(A \cap B) = 23$ (чел.)

Найти: $m(D) = m(U) - m(A \cup B) - ?$

Решение: Используя формулу, находим количество туристов, знающих хотя бы один язык:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 70 + 45 - 23 = 92, \quad \Rightarrow$$

количество туристов, не знающих ни одного языка:

$$m(D) = m(U) - m(A \cup B) = 100 - 92 = 8 \text{ (чел.)}$$

Ответ: 8 чел.

Использование теории множеств для решения задач

Задача 3

20 мальчиков поехали на пикник. При этом 5 из них обгорели, 8 были сильно покусаны комарами, а 10 остались всем довольны. Сколько обгоревших мальчиков не было покусано комарами? Сколько покусанных комарами мальчиков также и обгорели?

Задача 4

Из 40 предложений 30 содержат предлог «в», 27 предлог «на», в пяти предложениях нет ни того, ни другого. Сколько предложений содержат оба предлога?

Элементы дискретной математики

Элементы комбинаторики

- **Комбинаторика** – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.
- Например: сколько различных четырехзначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4 без повторения цифр?

Элементы комбинаторики

Основные правила комбинаторики

1. Правило сложения

Из пункта А в пункт Б можно добраться:

- ❑ самолетом (2 авиамаршрута)
- ❑ поездом (1 маршрут)
- ❑ автобусом (3 маршрута)

Общее число маршрутов $2+1+3=6$

Если элемент **А** можно выбрать **n** способами, а элемент **В** можно выбрать **m** способами, то выбрать **А или В** можно **n+m** способами.

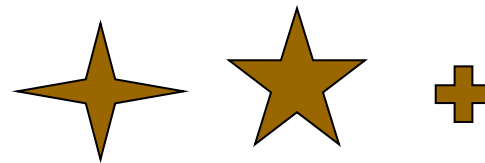
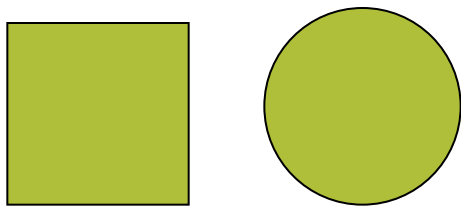
Основные правила комбинаторики

2. Правило умножения

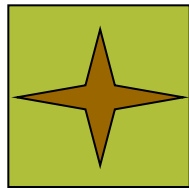
Если элемент A можно выбрать n способами и, при любом выборе A (то есть независимо), элемент B можно выбрать m способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Основные правила комбинаторики

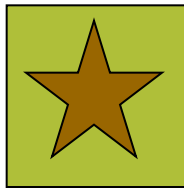
Правило умножения (пример)



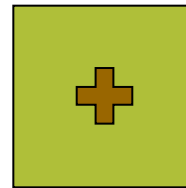
1)



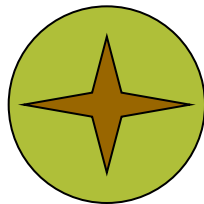
2)



5)



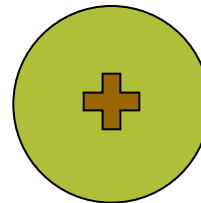
3)



4)



6)



$$2 \cdot 3 = 6 \text{ способов}$$

Элементы комбинаторики

■ Размещения

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

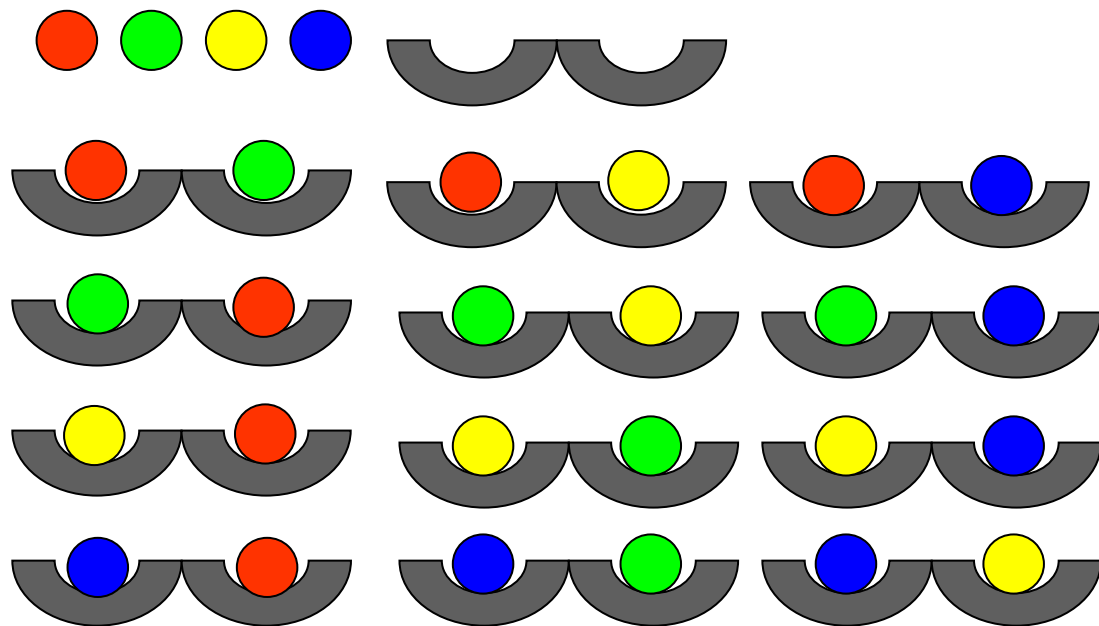
Размещением из n элементов по k элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее k различных элементов данного множества. Эти подмножества могут отличаться друг от друга составом элементов или порядком их следования.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ – факториал числа n , $0! = 1$

Основные правила комбинаторики

Число размещений (пример)



$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{24}{2} = 12$$

Элементы комбинаторики

■ Перестановки

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

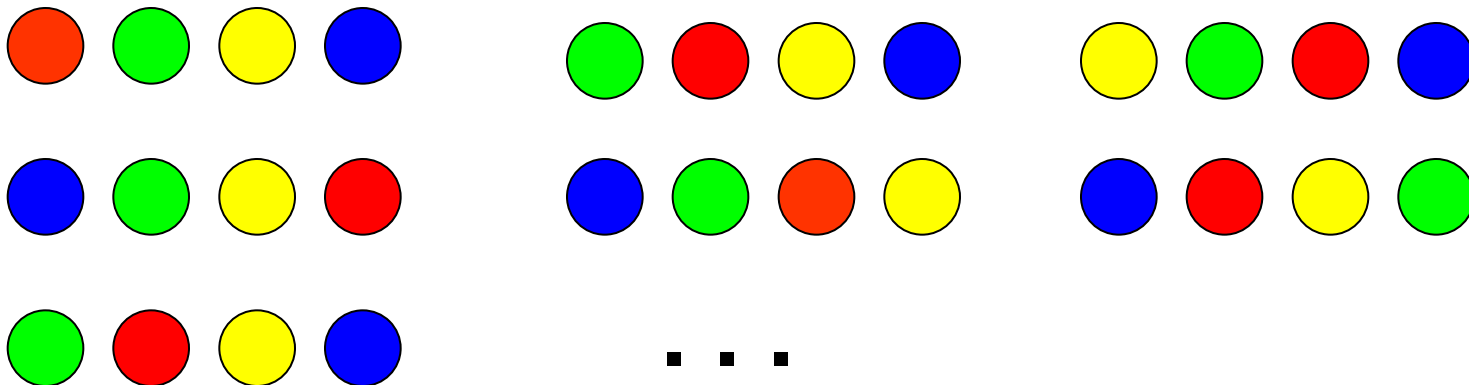
Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \quad \text{т.е. } P_n = n!$$

Основные правила комбинаторики

Число перестановок (пример)



$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Элементы комбинаторики

■ Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

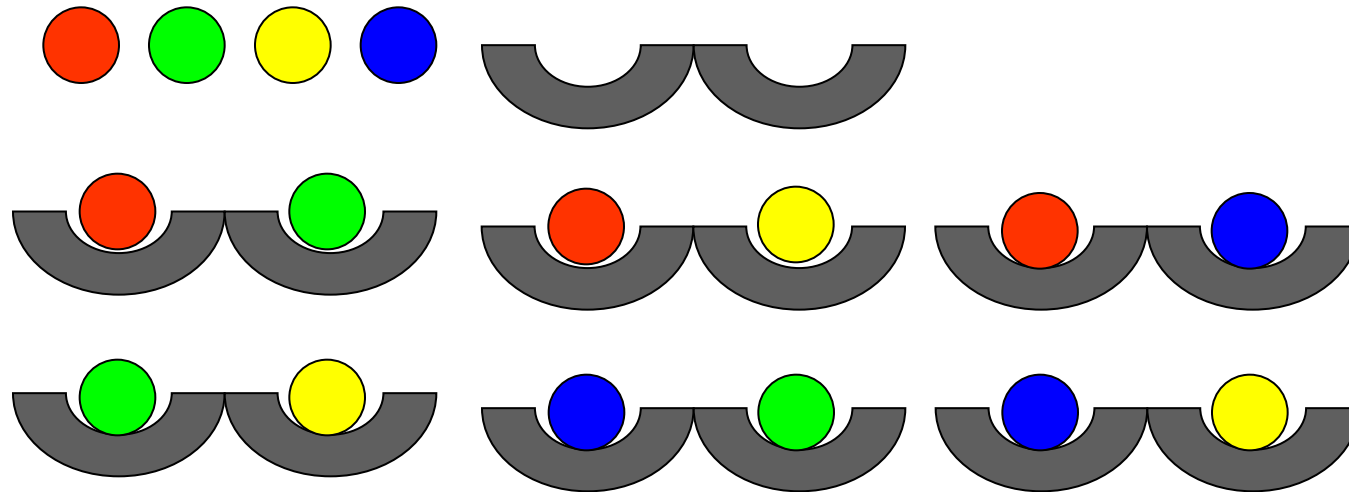
Сочетанием из n элементов по k элементов называется любое подмножество, которое содержит k различных элементов данного множества.

Различные сочетания отличаются друг от друга только составом элементов.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Основные правила комбинаторики

Число сочетаний (пример)



$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Элементы комбинаторики

Упражнения

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?
2. Сколькими способами восемь человек могут встать в очередь к театральной кассе?
3. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться?
4. Сколько слов (цепочек букв) можно образовать из букв слова **фрагмент**, если слова должны состоять из четырех букв? Сколько среди них таких, которые начинаются на букву «ф» и заканчиваются на букву «т»?
5. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Элементы комбинаторики

Задача на комбинированную выборку

■ **Задача:**

В колоде – 36 карт: четыре масти по девять карт (от шестёрки до туза). Сколько существует способов составить набор из шести карт так, чтобы в него вошли два короля, три десятки и одна дама?

В данной задаче важно определить, на какие сорта (классы) надо разбить всю совокупность, чтобы выбор осуществлялся из каждого класса в определенном количестве.

Схема рассуждений такова:

- **королей всего четыре, из них берем два, способов $C_4^2 = 6$;**
- **десяток всего четыре, из них берем три, способов $C_4^3 = 3$;**
- **дам всего четыре, из них берем одну, способов $C_4^1 = 4$,**

поскольку требуется сделать выбор и (1), и (2), и (3), то, по правилу умножения, число комбинированных наборов равно $6 \cdot 3 \cdot 4 = 72$.

Элементы комбинаторики

Возможные ошибки

- **Задача:**
Сколько существует вариантов выбрать шесть карт из колоды (36 карт) так, чтобы среди них была хотя бы одна дама?

Первый способ. Возьмём одну даму (4 варианта). В колоде осталось 35 карт. Выберем из них любые пять карт (324632 способов). По правилу умножения получим всего $4 \cdot 324632 = 1298528$ способов.

Второй способ. Рассмотрим все варианты выбора по шесть из 36 (сочетания по шесть из 36). Из них уберём все те варианты, в которых нет ни одной дамы (сочетания по шесть из 32). Получим всего – 1041600 способов.

В первом способе допущена грубая ошибка: некоторые наборы просчитываются по несколько раз. Например, если сначала выбрана дама пик, а затем дама червей и четыре туза, то это тот же набор, что и набор полученный выбором дамы червей, а затем дамы пик и четырёх тузов. Во втором способе все наборы просчитываются по одному разу. Второй ответ является верным.

Элементы комбинаторики

Задания на дом: 1) Составить таблицу 2) Придумать задачи

Размещения	Перестановки	Сочетания
Без повторений		
Определение. Размещениями из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов. Признаки: n различных элементов k различных мест порядок следования элементов на местах важен. Описание и формула: выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов можно $A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ способами.	Определение. Перестановками называют размещения из n элементов по n мест. n различных предметов, расположенных на n различных местах, можно переставить Признаки: n различных элементов n различных мест порядок следования элементов на местах важен. Описание и формула: ...	Определение: Признаки: Описание и формула...
С повторениями		
...	...	...

Элементы математической логики

- **Логика** – это наука о формах и законах правильного мышления. Она появилась приблизительно в IV веке до н. э. в Древней Греции. Ее создателем считается знаменитый древнегреческий философ и ученый Аристотель (предложил систему силлогизмов).
- **Математическая логика** (теоретическая логика, символическая логика) – раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики. Зарождение математической логики можно отнести к XVII в., когда возникла идея построения универсального языка для всей математики и формализации на базе такого языка математических доказательств.

Элементы математической логики

- По содержанию человеческое мышление бесконечно многообразно, но форм, в которых выражается это разнообразие, совсем немного!

Рассмотрим высказывания:

1) Все караси – это рыбы; Все треугольники – это геометрические фигуры; Все стулья – это предметы мебели.

□ **Все А – это В, где А и В – какие-либо объекты.**

2) Если наступает осень, то опадают листья; Если завтра пройдет дождь, то на улице будут лужи; Если вещество – металл, то оно электропроводно.

□ **Если А, то В.**

- Логика не интересуется содержанием мышления, она изучает только формы мышления; ее интересует не то, что мы мыслим, а то, как мы мыслим, поэтому она часто называется **формальной логикой**.

Элементы математической логики

- **Высказывание** – любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.
- Символическое обозначения высказываний – латинские буквы $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$

Логическое значение высказывания «истина» («ложь») обозначается или буквой «и», («л»), или цифрой 1, (0).

$$a = 1, b = 0, x = \text{«и»}, y = \text{«л»}$$

Элементы математической логики

Пример 1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

- 1) река Волхов впадает в озеро Ильмень;
- 2) всякий человек имеет брата;
- 3) пейте томатный сок!;
- 4) существует человек, который моложе своего отца;
- 5) который час?;
- 6) ни один человек не весит более 1000 кг;
- 7) $23 < 5$;
- 8) для всех действительных чисел x и y верно равенство $x + y = y + x$;
- 9) $x^2 - 7x + 12$;
- 10) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Решение. Легко видеть, что высказывания 4), 6), 8) – истинные, а высказывания 1), 2), 7) – ложные. Предложения 3), 5), 9), 10) не являются высказываниями.

Основные логические операции

1. Отрицание. *Отрицанием* высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается $\bar{x}$ и читается «не x » или «неверно, что x ».

Пусть x высказывание. Так как $\bar{x}$ также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания $\bar{x}$, то есть высказывание $\overline{\bar{x}}$, которое называется двойным отрицанием высказывания x . Ясно, что логические значения высказываний $\overline{\bar{x}}$ и x совпадают.

Например для высказывания «Волга впадает в Балтийское море» отрицанием будет высказывание : «Неверно, что Волга впадает в Балтийское море» или «Волга не впадает в Балтийское море», а двойным отрицанием будет высказывание: «Неверно, что Волга не впадает в Балтийское море».

Основные логические операции

2. **Конъюнкция** (логическое умножение). *Конъюнкцией* двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x , y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x , y обозначается символом $x \& y$ или $(x \wedge y)$, читается « x и y ». Высказывания x , y называются членами конъюнкции.

Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2 и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Основные логические операции

3. Дизъюнкция (логическое сложение). *Дизъюнкцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x, y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x, y обозначается символом $x \vee y$, читается « x или y ». Высказывания x, y называются членами дизъюнкции.

Например, высказывание «В треугольнике DFE угол D или угол E острый» истинно, так как обязательно истинно хотя бы одно из высказываний: «В треугольнике DFE угол D острый», «В треугольнике DFE угол E острый».

Основные логические операции

4. Импликация. *Импликацией* двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y – ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний x , y обозначается символом $x \rightarrow y$, читается «если x , то y » или «из x следует y ». Высказывание x называют условием или посылкой, высказывание y – следствием или заключением, высказывание $x \rightarrow y$ – следованием или импликацией.

Например, высказывание «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3», очевидно, истинно, так как здесь истинна посылка «Число 12 делится на 6» и истинно заключение «Число 12 делится на 3».

Основные логические операции

5. Эквиваленция. *Эквиваленцей* (или эквивалентностью) двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний x, y обозначается символом $x \leftrightarrow y$, читается «для того, чтобы x , необходимо и достаточно, чтобы y » или « x тогда и только тогда, когда y ». Высказывания x, y называются членами эквиваленции.

Например, эквиваленция «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle P = \angle Q$ » является истинной, так как высказывания «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ $\angle P = \angle Q$ » либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Основные логические операции

Пример 2. Пусть a – высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b – высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

$$1) a \wedge \bar{b}; \quad 2) a \rightarrow b; \quad 3) \bar{b} \leftrightarrow \bar{a}.$$

Решение. а) «Студент Иванов изучает английский язык и не успевает по математической логике»; б) «Если студент Иванов изучает английский язык, то он успевает по математической логике»; в) «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык».

Основные логические операции

Упражнения:

1.8. Пусть p и q обозначают высказывания:

p – «Я учусь в школе»,

q – «Я люблю математику».

Прочтите следующие сложные высказывания:

1) $\bar{p}$; 2) $\bar{\bar{p}}$; 3) $p \& q$; 4) $p \& \bar{q}$; 5) $\bar{p} \& q$; 6) $\bar{p} \& \bar{q}$; 7) $\overline{p \& q}$.

1.9. Какие из следующих импликаций истинны:

1) если $2 \times 2 = 4$, то $2 < 3$;

2) если $2 \times 2 = 4$, то $2 > 3$;

3) если $2 \times 2 = 5$, то $2 < 3$;

4) если $2 \times 2 = 5$, то $2 > 3$?

Основные логические операции

Таблицы истинности

Таблица истинности для логического отрицания имеет вид:

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Логические значения остальных операций описываются следующей таблицей:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Формулы алгебры логики

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Например, из трех высказываний x , y , z можно построить высказывания

$$(x \& y) \vee \bar{z} \quad \text{и} \quad x \rightarrow \overline{(y \vee (x \& z))}.$$

Первое из них есть дизъюнкция конъюнкции x , y и отрицания высказывания z , а второе высказывание есть импликация, посылкой которой является высказывание x , а заключением – отрицание дизъюнкции высказывания y и конъюнкции высказываний x , z .

Все высказывания можно разделить на простые (или элементарные) и составные (или сложные).

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется *формулой алгебры логики*.

Формулы алгебры логики

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

В связи с этим формулы

$$(x \& y) \vee \bar{z} \quad \text{и} \quad x \rightarrow \overline{(y \vee (x \& z))}$$

могут быть записаны так:

$$x \& y \vee \bar{z} \quad \text{и} \quad x \rightarrow \overline{y \vee x \& z}.$$

Формулы алгебры логики

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Например, логическим значением формулы $\overline{x \& y} \vee \bar{z}$ в случае, если $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ будет истина, то есть $\overline{x \& y} \vee \bar{z} = 1$.

Упражнение:

1.15. Пусть $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. Определить логические значения нижеследующих сложных высказываний:

- | | |
|--|---|
| 1) $x \wedge (y \wedge z)$; | 2) $(x \wedge y) \wedge y$; |
| 3) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$; | 4) $x \wedge y \rightarrow z$; |
| 5) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \bar{y})$; | 6) $((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$. |

Использование таблиц истинности

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Например: Составить таблицу истинности для формулы: $a \vee \bar{b}$

a	b	$\bar{b}$	$a \vee \bar{b}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

Легко видеть, что, если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же, таблица содержит 2^n строк.

Использование таблиц истинности

Например, для формулы $\bar{x} \vee y \rightarrow x \& \bar{y}$ таблица истинности имеет вид:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee y$	$x \& \bar{y}$	$\bar{x} \vee y \rightarrow x \& \bar{y}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Равносильности алгебры логики

Определение. Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них высказываний ($A \equiv B$).

$$x \& 1 \equiv x.$$

$$x \vee 1 \equiv 1.$$

$$x \& 0 \equiv 0.$$

$$x \vee 0 \equiv x.$$

$$x \& \bar{x} \equiv 0 \quad - \text{ закон противоречия.}$$

$$x \vee \bar{x} \equiv 1 \quad - \text{ закон исключенного третьего.}$$

$$x \& y \equiv y \& x.$$

$$x \vee y \equiv y \vee x.$$

$$x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z).$$

$$x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z).$$

Равносильности алгебры логики

1.20. Доказать равносильность:

$$1) (x \vee y) \& (x \vee \bar{y}) \equiv x;$$

$$2) x \vee (\bar{x} \& y) \equiv x \vee y;$$

Решение логических задач

Пример 1. Попробуем вспомнить победителей прошлогоднего турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

1. Антон был вторым, а Борис – пятым.
2. Виктор был вторым, а Денис – третьим.
3. Григорий был первым, а Борис – третьим.
4. Антон был третьим, а Евгений – шестым.
5. Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

Решение логических задач

Решение. Будем обозначать высказывания зрителей символом X_y , где X – первая буква имени участника турнира, а y – номер места, которое он занял в турнире.

Так как в паре высказываний каждого зрителя одно истинно, а второе ложно, то будут истинными дизъюнкции этих высказываний

$$A_2 \vee B_5 \equiv 1, B_2 \vee D_3 \equiv 1, \Gamma_1 \vee B_3 \equiv 1, A_3 \vee E_6 \equiv 1, B_3 \vee E_4 \equiv 1.$$

Но тогда будет истинной и формула

$$L \equiv (A_2 \vee B_5) \& (B_2 \vee D_3) \& (\Gamma_1 \vee B_3) \& (A_3 \vee E_6) \& (B_3 \vee E_4).$$

Путем простых равносильных преобразований легко показать, что $L \equiv A_3 \& B_5 \& B_2 \& \Gamma_1 \& E_4$. Но $L \equiv 1$ и, значит, $A_3 \equiv 1$, $B_5 \equiv 1$, $B_2 \equiv 1$, $\Gamma_1 \equiv 1$, $E_4 \equiv 1$, что и дает ответ на вопрос задачи.

Табличный метод решение задач

Табличный метод решения логических задач весьма удобен при установлении истинности одного из нескольких высказываний, сделанных участниками задачи и содержащих описание их действий.

Пример:

Иванов, Петров и Сидоров подозреваются в совершении преступления. В ходе следствия они дали следующие показания:

Иванов: Петров виновен, а Сидоров – нет.

Петров: Если Иванов виновен, то виновен и Сидоров. (Они всегда действуют сообща).

Сидоров: Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

Необходимо установить:

- а) Совместимы ли показания всех троих подозреваемых, т.е. могут ли они быть одновременно истинны?
- б) Предполагая, что показания всех обвиняемых истинны, укажите, кто виновен, а кто нет?
- в) Если все трое невиновны, то кто лжесвидетельствует?

Табличный метод решение задач

Решение.

Обозначим через I высказывание «Виноват Иванов», P — «Виноват Петров», S — «Виноват Сидоров». Именно эти высказывания являются простыми, исходными. Тогда показания подозреваемых описываются следующими формулами алгебры высказываний:

Иванов: $P \& \neg S$

Петров: $I \rightarrow S$.

Сидоров: $\neg S \& (I \vee P)$.

Построим таблицу истинности, поместив в ее первые три столбца значения исходных высказываний I , P , S , а в следующие столбцы – значения высказываний подозреваемых и вспомогательных формул (ниже).

Теперь ответим на вопросы задачи.

а) Показания Иванова, Петрова и Сидорова одновременно истинны, т.е. имеют значение 1, в шестой строке таблицы. Таким образом, показания всех подозреваемых совместны.

б) Если показания всех обвиняемых истинны (пункт а) – шестая строка таблицы), то в этом случае $P=1$, а $I=0$ и $S=0$, т.е. виновен Петров, а Иванов и Сидоров – невиновны.

в) И, наконец, если все подозреваемые невиновны $P=0$, $I=0$, $S=0$ (восьмая строка), то лишь Петров говорит правду, а Иванов и Сидоров по какой-то причине лжесвидетельствуют.

Табличный метод решение задач

Исходные высказывания			Вспомогательные формулы		Утверждения			Пункты задачи
					Иванова:	Петрова:	Сидорова:	
I	P	S	$\neg S$	$I \vee P$	$P \& \neg S$	$I \rightarrow S$	$\neg S \& (I \vee P)$	
1	1	1	0	1	0	1	0	
1	1	0	1	1	1	0	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	1	1	1	а), б)
0	0	1	0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	1	0	в)

Основы теории вероятностей

- **Теория вероятностей** – раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям.
- **Методы теории вероятностей** широко применяются при математической обработке результатов измерений, а также в экономике, страховом деле, массовом обслуживании.
- Зарождение основных понятий теории вероятностей – попытка создания **теории азартных игр** (Б.Паскаль, П. Ферма, Х.Гюйгенс)
- Основной вклад в развитие внесли: Я.Бернулли, П.Лаплас, К. Гаусс, П.Чебышев, А.Марков, А.Ляпунов, А. Колмогоров и др.

Основные понятия теории вероятностей

Понятие о случайном событии

Опыт, эксперимент, наблюдение, повторяемое многократно называют *испытанием*.

Например: бросание монеты, бросание игральной кости (кубика).

Результат (исход) испытания называется *событием*. Событиями являются выпадение герба или цифры, появление того или иного числа очков.

Виды событий: *достоверные, случайные, невозможные.*

Для обозначения событий используют большие буквы латинского алфавита: А, В, С и т.д.

Основные понятия теории вероятностей

Определение. Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Определение. Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Определение. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Определение. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Основные понятия теории вероятностей

Определение вероятности

Вероятность события A – число $P(A)$, характеризующее возможность появления этого события. По определению,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Классическое определение вероятности: если событие A происходит в результате одного из M равновероятных исходов, при общем числе исходов равном N , то

$$P(A) = M/N$$

Рассчитанная таким образом вероятность называется *априорной*.

Статистическое определение вероятности:

Отношение $p = m/n$ числа m появлений события A при n испытаниях называется *частотой* этого события. С ростом n частота события приближается к вероятности P этого события.

Основные понятия теории вероятностей

Алгебра событий

Определение. Суммой событий A и B называется событие $C = A+B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B .

Например, появление четной грани игральной кости есть сумма трех событий: выпадение 2, или 4, или 6.

Определение. Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A , и событие B .

Основные понятия теории вероятностей

Теорема сложение вероятностей

Если события A и B – несовместные, то вероятность суммы этих событий равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Если события A и B – совместные, то вероятность суммы этих событий равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема умножения вероятности

Если события A и B – независимые, то вероятность произведения этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Если события A и B – зависимые, то вероятность произведения этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$P_A(B)$ – условная вероятность (вероятность события B при условии, что произошло событие A).

Основы теории вероятностей

Примеры задач на подсчет вероятностей

1. Игральную кость подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что а) шестерка не появится ни разу; б) шестерка появится хотя бы 1 раз?
2. Два стрелка стреляют в одну цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0.8, а вторым – 0.5. Стрелки стреляют одновременно. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков? Какова вероятность, что оба стрелка поразят цель одновременно?
3. В ящике имеются 7 белых и 5 черных шаров. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность того, что: а) оба вынутых шара черные; б) вынутые шары разного цвета?

-
- *Случайная величина (СВ)* – величина, которая в результате опыта принимает одно заранее неизвестное значение

Примеры:

- количество очков, выпадающих при бросании игрального кубика;
 - число посетителей аптеки в течение случайно взятого дня;
 - температура больного в наугад выбранное время суток;
 - рост случайно выбранного студента.
-

Виды случайных величин (СВ)

- Дискретные СВ (ДСВ) – СВ, значения которых можно пересчитать (например: число звонков на станцию скорой помощи в течение часа или количество очков, выпадающих при бросании игрального кубика);
- Непрерывные СВ (НСВ) – значения которых непрерывно заполняют какой-либо промежуток (их нельзя пересчитать). Например: давление крови человека, температура его тела или состав крови.

Закон распределения СВ

*Основная задача теории вероятностей, оперирующей случайными величинами, – это определение **закона распределения случайной величины, то есть установление соответствия между возможными значениями случайной величины и вероятностью наблюдения этих значений.***

Числовые характеристики СВ

- *Математическое ожидание $M(X)$ – это центральная точка, вокруг которой рассеяны все значения случайной величины X .*
- Математическое ожидание дает представление о среднем значении случайной величины.

Найти математическое ожидание случайной величины X можно по следующим формулам:

а) если X -- дискретная случайная величина, то
$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i ;$$

б) если X - непрерывная случайная величина, то
$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx .$$

Свойства математического ожидания:

1) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, где X и Y – случайные величины.

2) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, где X и Y – случайные величины.

3) $M(CX) = CM(X)$, где C – постоянная величина.

Дисперсия

Дисперсия $D(X)$ – это характеристика степени разброса случайной величины относительно ее среднего значения. Она находится как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Размерность дисперсии $D(X)$ равна размерности случайной величины, возведенной в квадрат: $[D(X)] = [X^2]$.

Найти дисперсию случайной величины X можно по следующим формулам:

а) если X -- дискретная случайная величина, то $D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 p_i$;

б) если X - непрерывная случайная величина, то $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx$.

Свойства дисперсии

1) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, где X и Y – случайные величины.

2) $D(CX) = C^2 D(X)$, где C – постоянная величина.

3) $D(X) = M(x^2) - (M(x))^2$.

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma \quad (\sigma = \sqrt{D})$$

Основные понятия математической статистики (МС)

- *Математическая статистика* – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей

- **Генеральная совокупность** – совокупность всех объектов, подлежащих изучению.
- **Сплошное наблюдение** – изучение всех объектов генеральной совокупности.
- **Выборочное наблюдение** – изучение n объектов (*выборки*), извлеченных случайным образом из генеральной совокупности.
- **Объем выборки** – количество элементов в выборке.

-
- *Варианта* (x_i) – наблюдаемое значение
 - *Частота* (n_i) - число наблюдений значения
 - *Относительная частота* (n_i/n) – отношение частоты к объему выборки
-

Описательная статистика

- *Меры центральной тенденции*

Мода (M_o) – наиболее часто встречающееся значение в ряду данных. Выборка может иметь два значения моды (бимодальная выборка) и более двух (полимодальная)

Пример: 3,3,5,7,8,9,5,0

$M_{o1}=3$, $M_{o2}=5$

-
- **Среднее арифметическое значение** – отношение суммы всех значений изучаемого признака к числу слагаемых.
-

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{n} \rightarrow$$

-
- **Медиана (Me)**– разбивает ряд на две равные части.

Для определения медианы сначала **ряд упорядочивают** (записывают в порядке возрастания или убывания), а затем выбирают **значение, стоящее посередине**.

Если значений четное количество, то медиана равна среднему арифметическому двух значений, стоящих посередине

Меры изменчивости

- Размах - разница между максимальным и минимальным значениями.
- Дисперсия – мера разброса данных относительно среднего

Вариационный размах:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x - \bar{x})^2}{n}$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Первичное описание исходных данных

- **Вариационный ряд** – таблица, отражающая зависимость между видами исходов проводимого опыта и количеством тех или иных исходов.
- **Полигон частот** – ломанная линия, соединяющая точки с координатами (x_i, n_i)

В таком виде изучать выработку рабочих тоже не очень удобно из-за обилия числовых данных. Поэтому разобьем варианты на отдельные интервалы, т.е. проведем их *группировку*.

Число интервалов m следует брать не очень большим, чтобы после группировки ряд не был громоздким, и не очень малым, чтобы не потерять особенности распределения признака.

Согласно *формуле Стерджеса* рекомендуемое число интервалов $m = 1 + 3,322 \lg n$, а *величина интервала (интервальная разность, ширина интервала)*

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n},$$

где $x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значениями признака.

При изучении вариационных рядов наряду с понятием частоты используется понятие *накопленной частоты* (обозначаем $n_i^{\text{нак}}$). Накопленная частота показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x . Отношение накопленной частоты $n_i^{\text{нак}}$ к общему числу наблюдений n назовем *накопленной частотой* $w_i^{\text{нак}}$

Гистограмма служит только для изображения интервальных вариационных рядов и представляет собой ступенчатую фигуру из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значений признака $k_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, и высотами, равными частотам (частостям) n_i (w_i) интервалов. Если соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой, то можно получить полигон того же распределения.

Кумулятивная кривая (кумулята) — кривая накопленных частот (частостей). Для дискретного ряда кумулята представляет ломаную, соединяющую точки $(x_i, n_i^{\text{нак}})$ или $(x_i, w_i^{\text{нак}})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Для интервального вариационного ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината — накопленной частоте (частости), равной нулю. Другие точки этой ломаной соответствуют концам интервалов.
