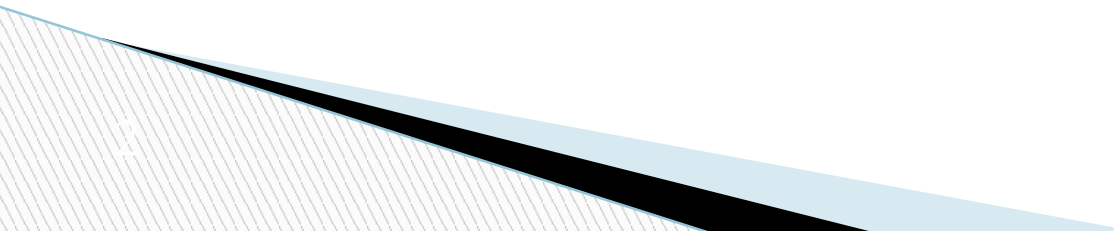


# КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

*ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
КИНЕМАТИКА*

ЛЕКЦИЯ 1

# План лекции

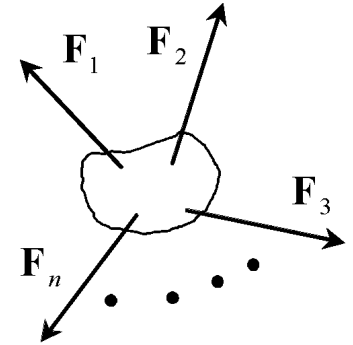
- **Введение**
  - **Способы задания движения**
  - **Скорость**
  - **Ускорение**
  - **Частные случаи движения**
  - **Заключение**
- 

# Введение

Мы изучили первый раздел курса ТМ - **СТАТИКУ**.

Основной результат

$$\begin{aligned} \text{ТЕЛО, СИЛЫ : } (\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \Rightarrow \\ (\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \approx 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) = 0 \end{aligned}$$



Если уравнения равновесия не выполнены, то тело будет двигаться!

Каким образом?

Ответ на этот вопрос будет дан в третьей части курса – в **динамике**.

Вторая часть курса – **кинематика**, нужна для того, чтобы разобраться с самим движением.

Причины движения (т.е. СИЛЫ) нас в кинематике интересоваться не будут!

# КИНЕМАТИКА

**наука, изучающая движение тел  
без учета действующих на них сил.**

## **Задачи кинематики:**

1. Научиться задавать движение тел
2. По заданным законам движения тел определять их кинематические характеристики (скорость, ускорение, ...)

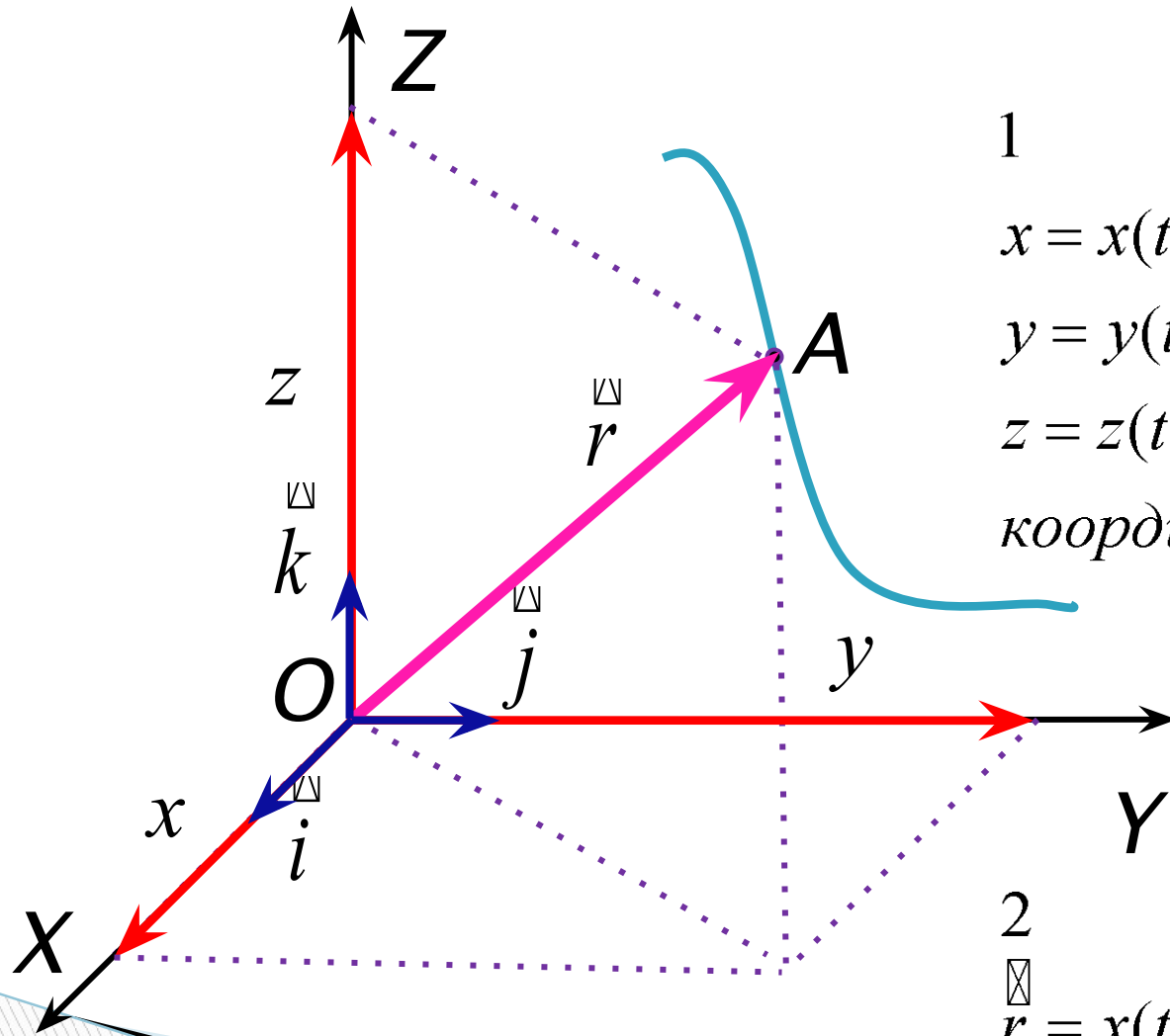
**Замечание.** Есть еще и обратная задача - по заданным кинематическим характеристикам тела определять закон его движения.

Решать эти задачи мы начнем с простейшего тела – материальной точки.

**Цель лекции: изучить кинематику точки.**

# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

*В прямоугольной декартовой системе  $Oxyz$*



1

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

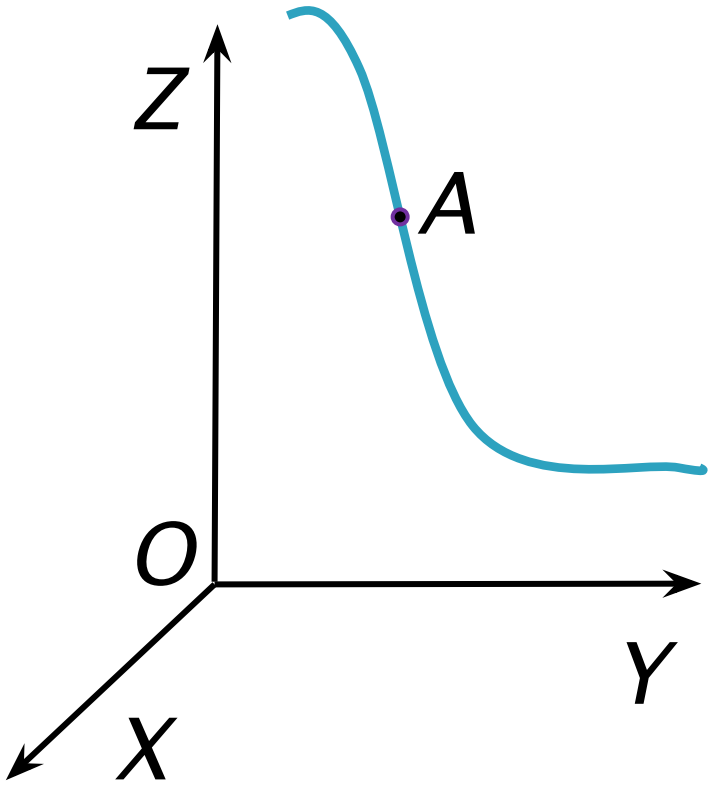
*координатный способ*

2

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$  – *векторный способ*

# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ



Траектория точки –  
геометрическое место  
положений, занимаемых  
ею при движении

**Замечание.** Не путать с другим  
«определением»: траектория – это  
линия, по которой движется точка.  
Траектория может быть лишь часть  
этой линии!!!

Уравнения траектории

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ТОЧКИ

**Пример.** Точка двигалась в плоскости  $Oxy$  в течение 10 секунд.  
Определить ее траекторию, если

$$x(t) = 2t; \quad y(t) = 12t^2$$

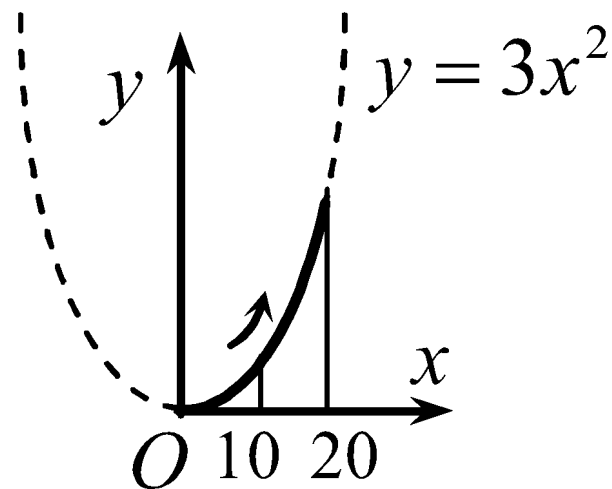
**Решение.** Заданные уравнения определяют траекторию в параметрическом виде. Для получения явного вида  $y=y(x)$  исключим параметр  $t$ .  
Получим:

$$t = x/2 \Rightarrow y = 3x^2. \quad t \in [0,10] \Rightarrow x \in [0,20]$$

**Ответ:**

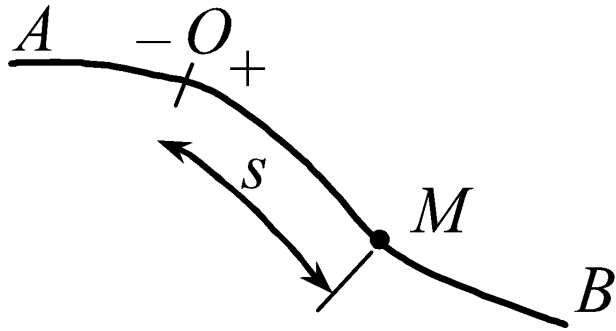
Траектория – часть параболы

$$y = 3x^2, \quad x \in [0,20]$$



# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

## *В естественной системе*



Пусть линия  $AB$ , по которой движется точка, известна. Тогда положение точки  $M$  на линии можно определить введя естественную координату  $s$ .

$$s = \overset{\sphericalangle}{OM}; \quad s = s(t)$$

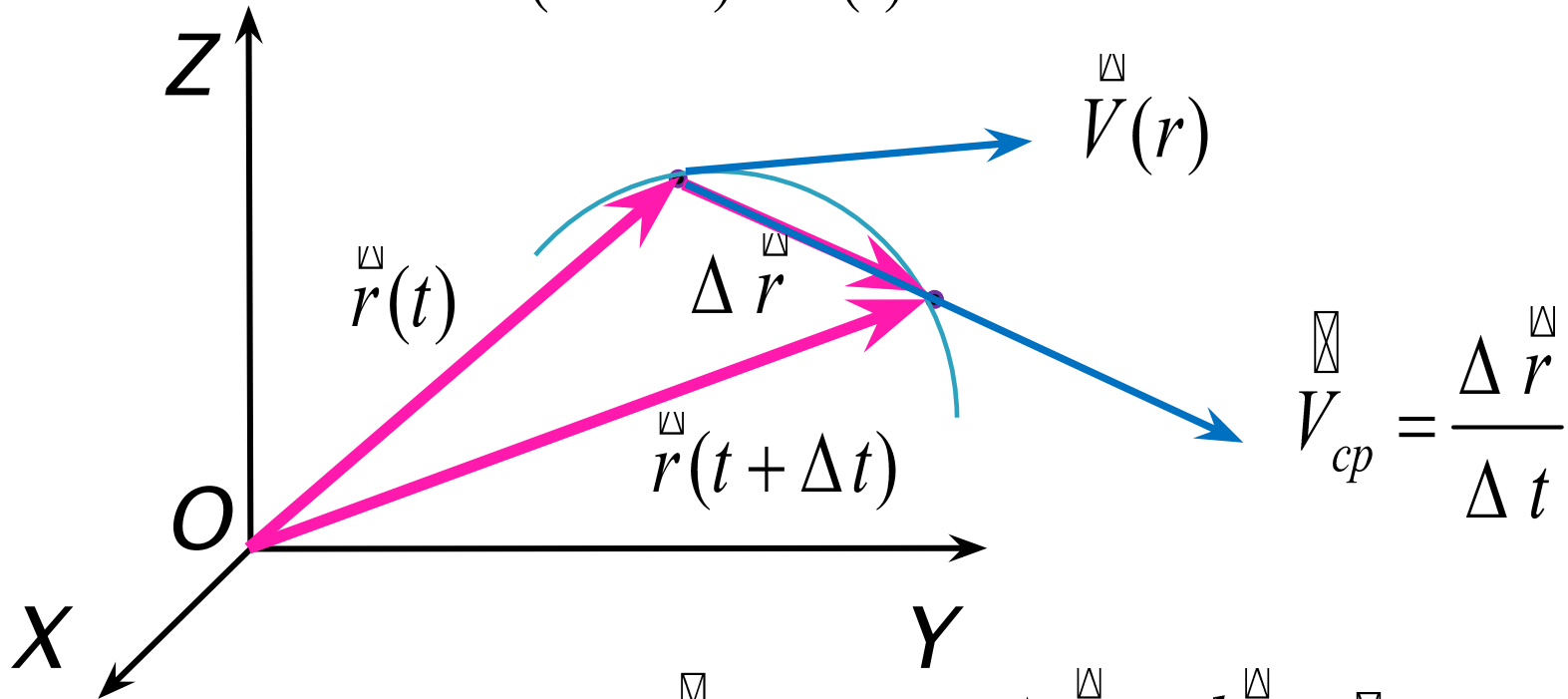
Такой способ задания движения называется *естественным*.

1. Уравнения траектории
2. Начало отсчета
3. Положительное направление
4. Закон движения  $s(t)$



# СКОРОСТЬ ТОЧКИ

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$



$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Вектор скорости точки  
направлен по касательной к ее траектории

# СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$$

$$V_x = \dot{x}$$

$$V_y = \dot{y}$$

$$V_z = \dot{z}$$



$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

# СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ. ПРИМЕР

Движение точки задано уравнением  $\vec{r} = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\vec{i} + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\vec{j}$

Определить уравнение траектории и скорость точки при  $t = 1$  с.

---

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad y(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{уравнение траектории}$$

(окружность)

# СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ. ПРИМЕР

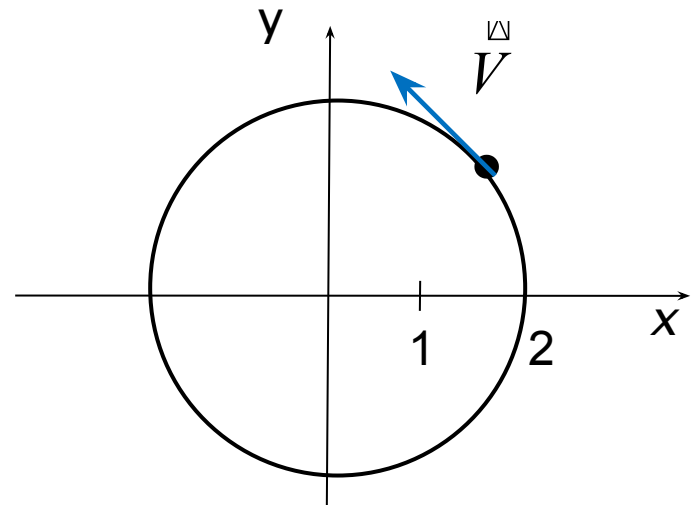
Движение точки задано уравнением  $\vec{r} = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\vec{i} + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\vec{j}$

Определить уравнение траектории и скорость точки при  $t = 1$  с.

$$V_x = \dot{x} = -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad V_y = \dot{y} = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

$$V_x(1) = -0,52 \text{ м/с} \quad V_y(1) = 0,91 \text{ м/с}$$

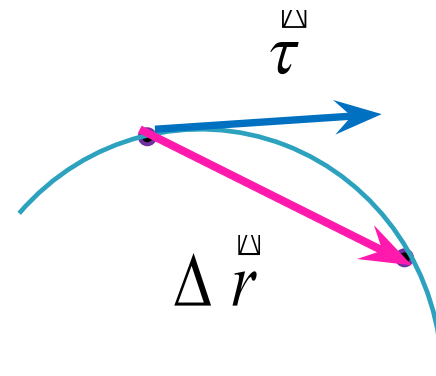
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 1,1 \text{ м/с}$$



# СКОРОСТЬ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = s\vec{\tau}$$

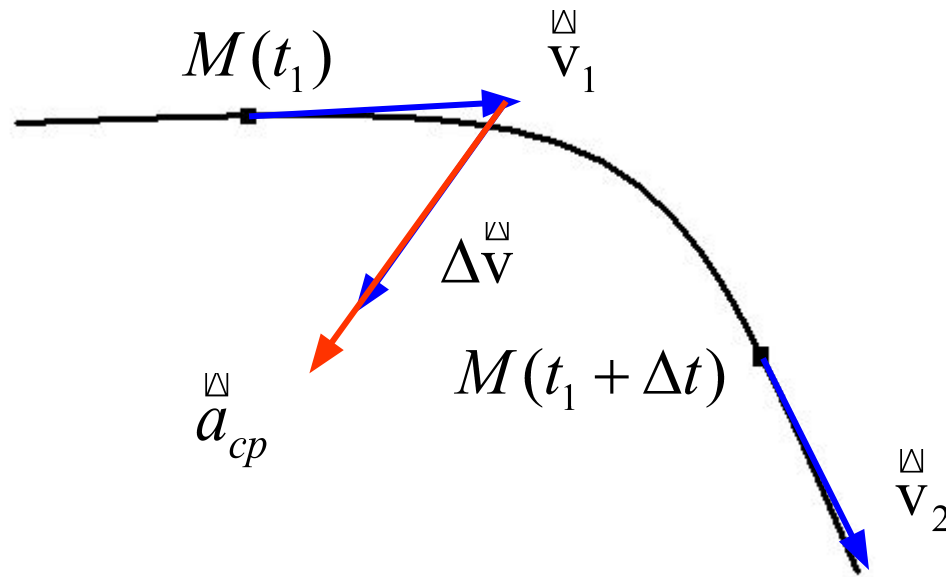
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$



$$V(t) = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

Вектор скорости точки направлен по касательной к ее траектории

# УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  ➔ приращение вектора скорости за время  $\Delta t$

$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  ➔ среднее ускорение – изменение скорости за единицу времени

# УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ВЕКТОРНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$



ускорение в данный момент  
времени  $t$

**Ускорение точки** — это векторная величина, характеризующая быстроту изменения ее скорости и равная первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени

# УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

в декартовой системе координат

вектор скорости  $\rightarrow \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

вектор ускорения  $\rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

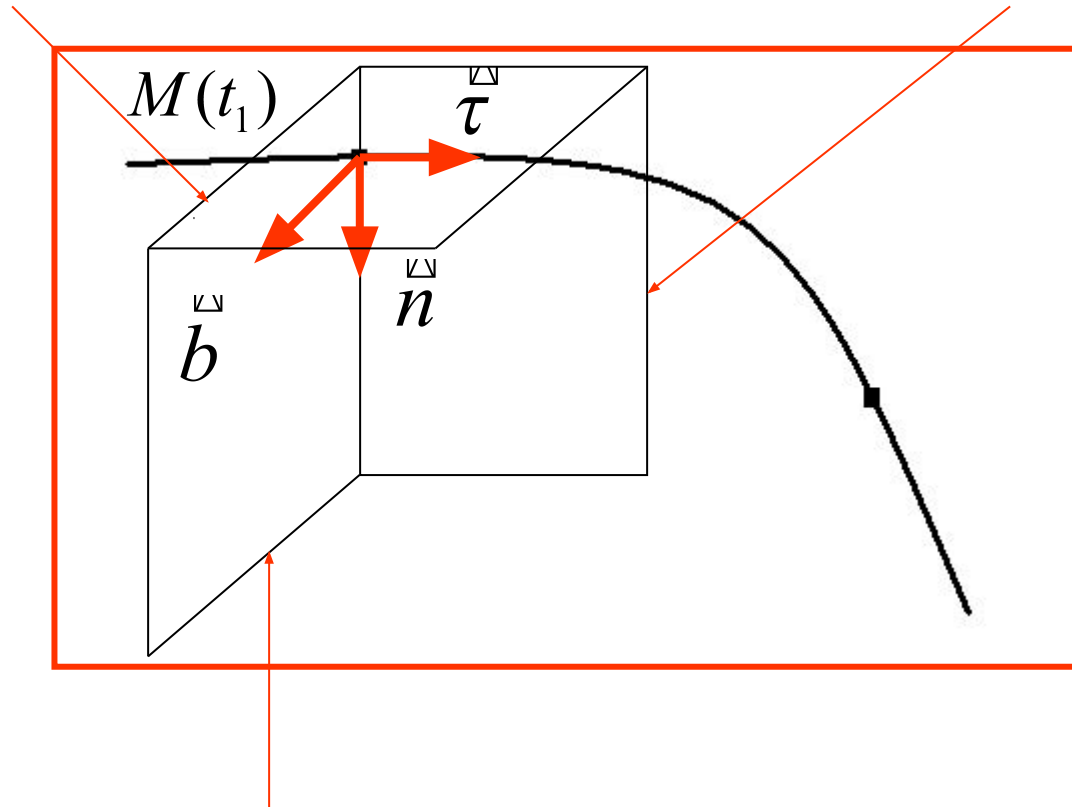
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



# УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

спрямляющая плоскость

соприкасающаяся плоскость

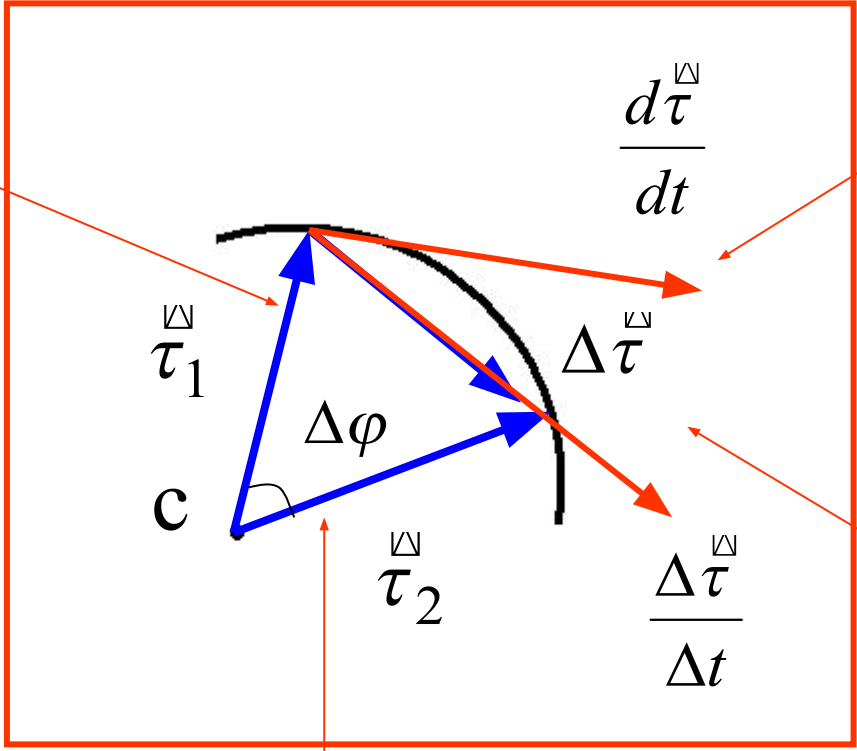


нормальная плоскость

# УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau \vec{e}_\tau) = \dot{\tau} \vec{e}_\tau + \tau \frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$$

Момент времени  $t$



Момент времени  $t + \Delta t$

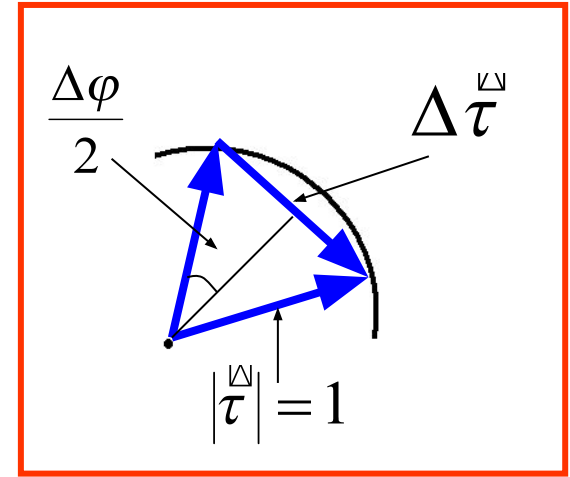
$$\frac{d\tau}{dt} \perp \vec{v}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \left| \frac{d\tau}{dt} \right| \cdot \vec{n}$$

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$$

# УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} \right|$$



При малых  $\Delta\varphi \rightarrow \sin(\Delta\varphi/2) \cong \Delta\varphi/2$

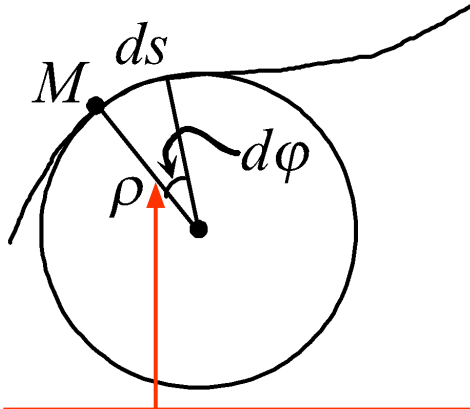
$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{2 \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v\vec{\tau}) = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \varphi \vec{n} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Касательное ускорение

Нормальное ускорение

# УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ



Радиус кривизны траектории

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

угловая скорость вектора  $\tau$

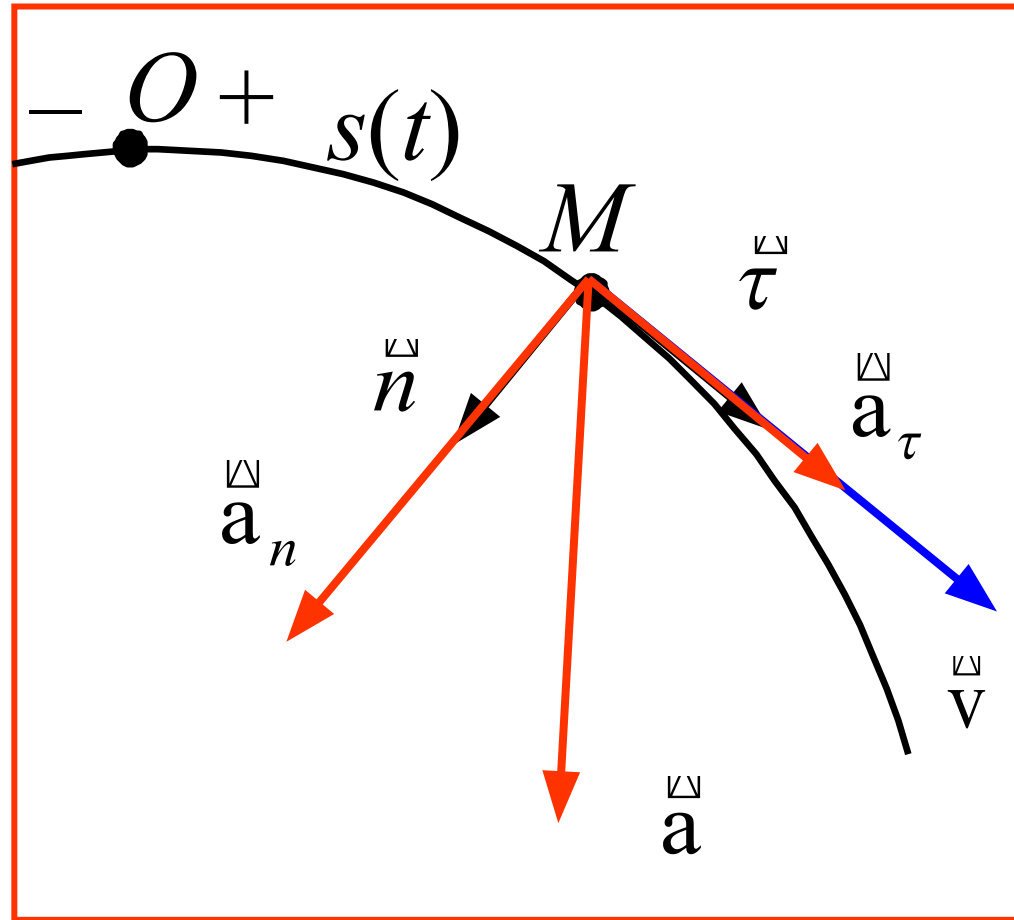
$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$ds = \rho d\varphi \rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad \dot{\varphi} = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \omega = \frac{v}{\rho} \rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho$$

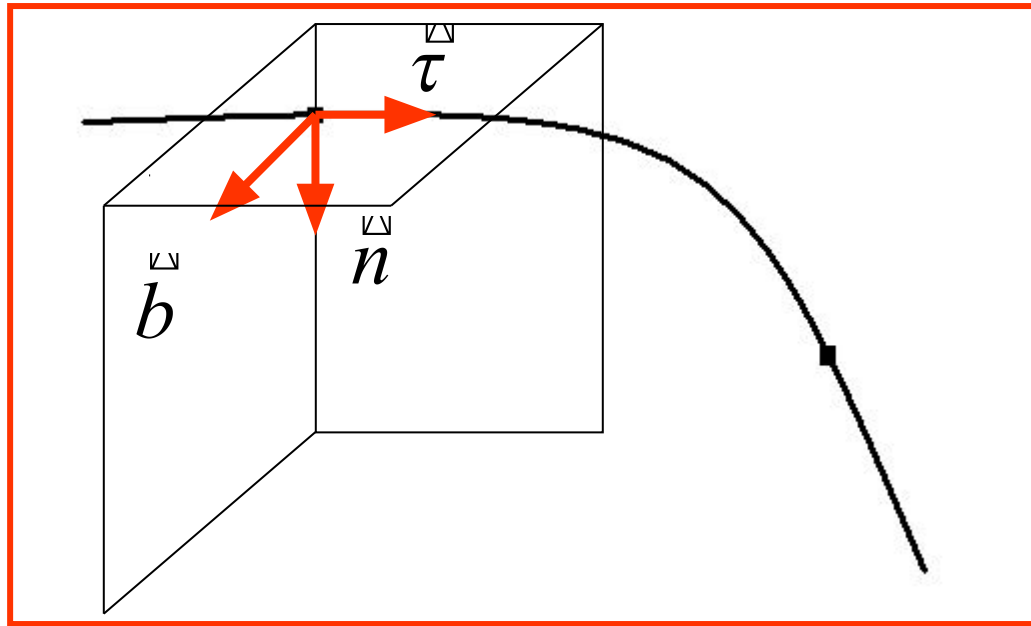
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \dot{\tau} + \omega^2 \rho \mathbf{n}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

# УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ



# ПРОЕКЦИИ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ НА ОСИ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА



$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} + v_n \vec{n} + v_b \vec{b}$$

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} + a_b \vec{b}$$

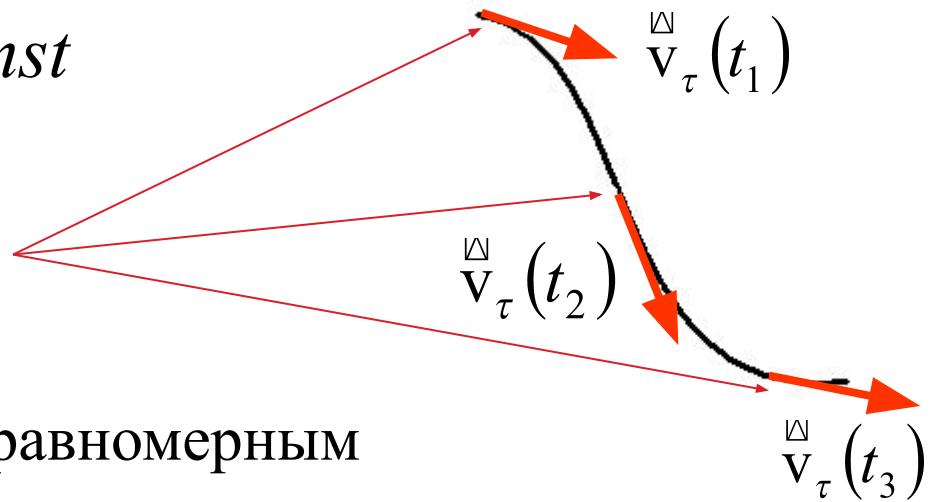
$$v_\tau = s \quad v_n = 0 \quad v_b = 0$$

$$a_\tau = \dot{s} \quad a_n = s^2 / \rho \quad a_b = 0$$

# ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

$$|\overset{\Delta}{a}_\tau| = 0 \quad \longrightarrow \quad |\overset{\Delta}{v}_\tau| = \text{const}$$

$$v_\tau(t_1) = v_\tau(t_2) = v_\tau(t_3)$$



Такое движение называется равномерным

Равнопеременное движение  $|\overset{\Delta}{a}_\tau| = \text{const}$

Ускоренное движения:

$$\overset{\Delta}{v}_\tau \cdot \overset{\Delta}{a}_\tau > 0$$

Замедленные движения:

$$\overset{\Delta}{v}_\tau \cdot \overset{\Delta}{a}_\tau < 0$$

