Элементы матанализа. Лекция 2

Лектор: Войтик Виталий Викторович

Применение производной при исследовании функции

- Теорема о необходимых признаках возрастания и убывания функции.
- 1. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема и возрастает на интервале (a,b), то производная этой функции не отрицательна $y' \geq 0$ во всех точках данного интервала.

2. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема и убывает на интервале (a,b), то производная этой функции не положительна $y' \leq 0$ во всех точках данного интервала.

Теорема о признаке возрастания и убывания функции. Если производная функции положительна на некотором интервале, то функция возрастает на этом интервале, наоборот если производная отрицательна, то функция убывает на этом интервале

Экстремумами функции называются её точки максимума и минимума. Производная дифференцируемой функции в точке экстремума равна нулю.

Порядок действий при исследовании функции.

1. Найти область определения функции, которая может быть конечной или бесконечной.

2.Найти производную функции и определить имеются ли точки, в которых производная не существует.

3.Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение

$$f'(x) = 0$$

Корни этого уравнения являются стационарными точками функции

4. Найти критические точки функции, как совокупность всех стационарных точек и точек в которых производная не существует и отметить их на оси ОХ

5.Определить знаки производных на интервалах, на которые критические точки делят область определения функции.

6.По знаку производной найти интервалы возрастания и убывания функции

7. Найти точки экстремумов функции.

Пример. Исследовать функцию

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

1. Область определения этой функции (-∞, ∞)

2. Производная

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)' = x^2 - 2x$$

$$y' = 0 = x^2 - 2x$$

3. Корни x=0, x=2

4. Эти корни стационарные и критические точки функции

5.Определим знаки производных в интервалах $(-\infty,0),(0,2),(2,\infty)$.Для этого достаточно найти знак производной в любой точке интервала. На $(-\infty,0)>0$ $,(0,2)<0$, $(2,\infty)>0$

6. На $(-\infty,0)$ функция возрастает , на $(0,2)$ функция убывает на $(2,\infty)$ функция возрастает.

7.Точка $x=0$ точка максимума точка $x=2$ точка минимума

Интегральное исчисление.

Первообразная функция.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = Sinx + C$$

$$\int \sin x dx = -Cosx + C$$

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C \; ;$$

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C \; ;$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2} x} dx = tgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^{2} x} dx = -ctgx + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^{2}} = arctgx + C$$

Свойства:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$$

$$2.d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

$$3.\int dF(x) = F(x)+C;$$

$$4.\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$$

где u, v, w – некоторые функции от x.

$$5.\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$$

Пример:

$$\int (x^2-2\sin x+1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C$$

Методы интегрирования

А) Непосредственное интегрирование.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + \cos x\right)dx = \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{2x}dx + \int \cos x dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \cos x dx =$$

$$= 5\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2}\ln|x| + \sin x + C = 10\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln|x| + \sin x + C\ .$$

Б) Способ подстановки (замены переменных).

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = sinx$, $dt = cosxdt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

В) Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Пример.

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos x\,dx; & v=\sin x \end{matrix}\right\}=e^{2x}\sin x-\int \sin x\cdot 2e^{2x}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin x\,dx; & v=-\cos x; \end{matrix}\right\}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=e^{2x}\sin x+$$

$$+2e^{2x}\cos x-4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

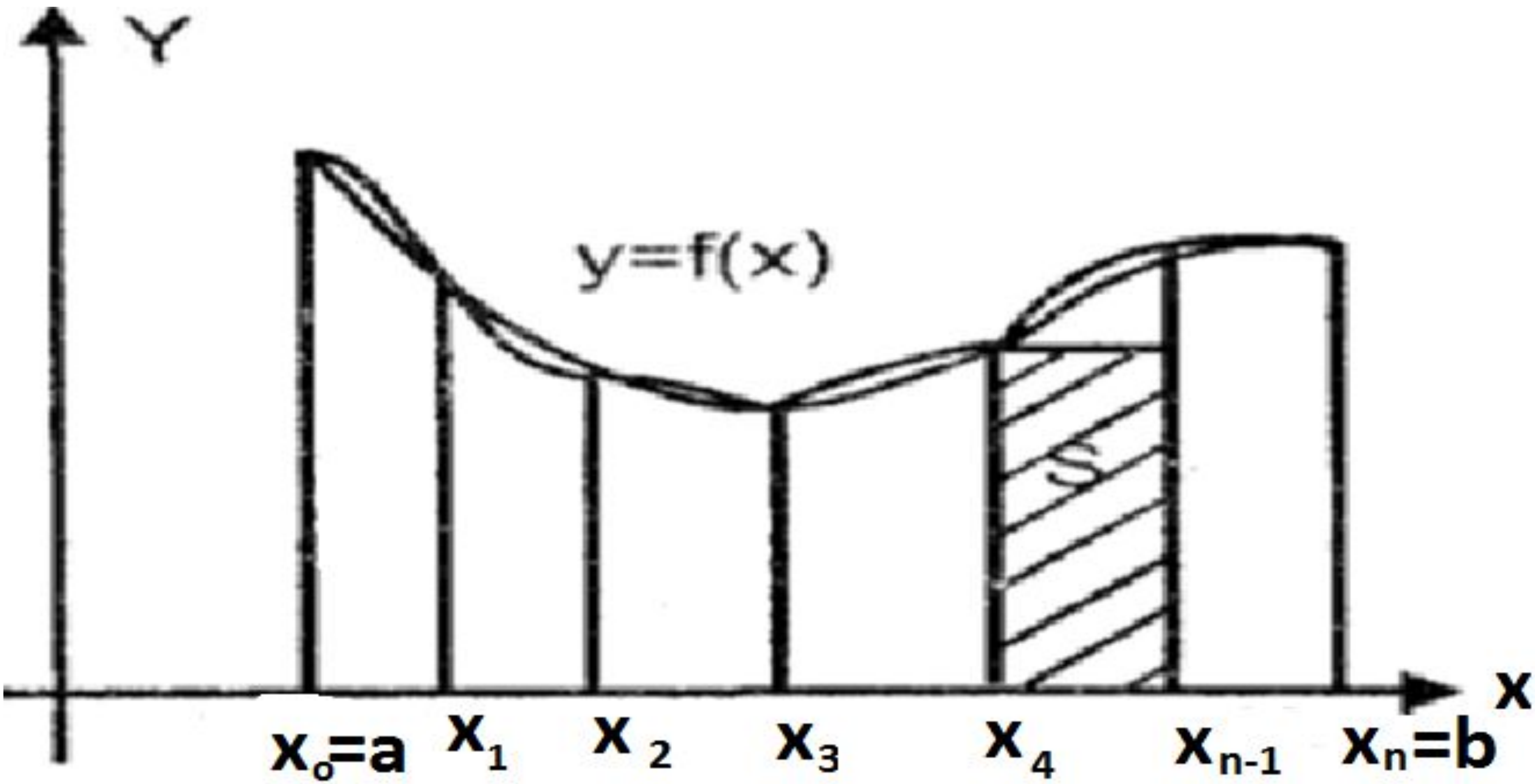
$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

Определенный интеграл

- Пусть на отрезке [ab] задана непрерывная функция y=f(x)



Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i *интегральная сумма* $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b]: $\int_a^b f(x)dx.$

Свойства определенного интеграла.

$$1.\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$$

$$2.\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3.\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

4. Если $f(x) \leq \phi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

5.Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

8. Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

<u>Теорема:</u> (Теорема Ньютона – Лейбница) Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \mathrm{F(x)}\Big|_a^b$$

Пример

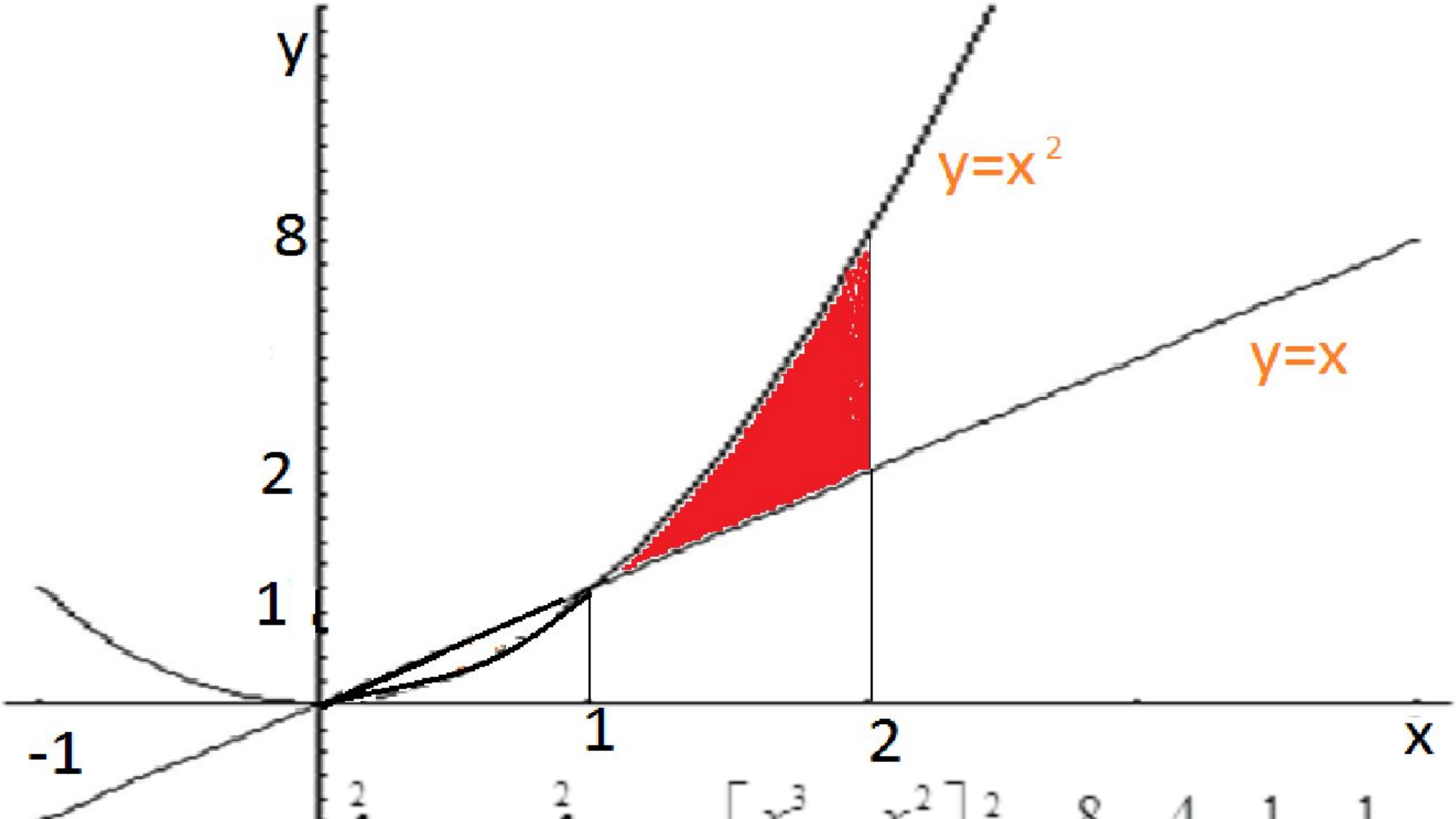
.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x=\sin t; \\ \alpha=0;\ \beta=\pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Некоторые приложения определённого интеграла.
1.Вычисление площадей плоских фигур

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x,\ y = x^2,\ x = 2$.



$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

2. Вычисление работы переменной силы.

- Пример. Найти работу для растяжения пружины от равновесного состояния на величину 0,1 м., если коэффициент упругости k=100 Н/м
- Решение. Сила Гука F=kx. Работа

$$A = \int_0^l kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^l = k\frac{l^2}{2} = 100\cdot\frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}5\,\text{Дж}$$

3.Вычисление среднего значения функции

- Средним значением функции на отрезке [a,b] называется величина

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

- Пример. Найти среднее значение sinx на отрезке от 0 до π.

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$