

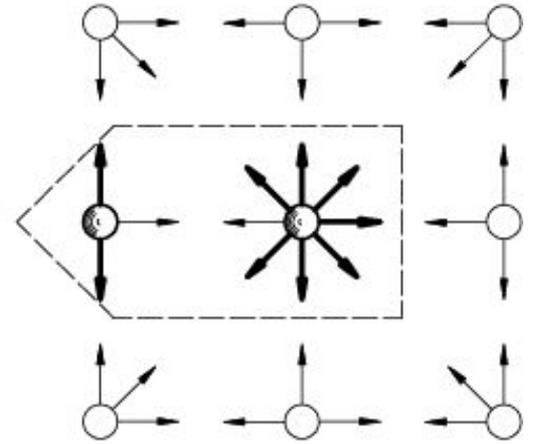
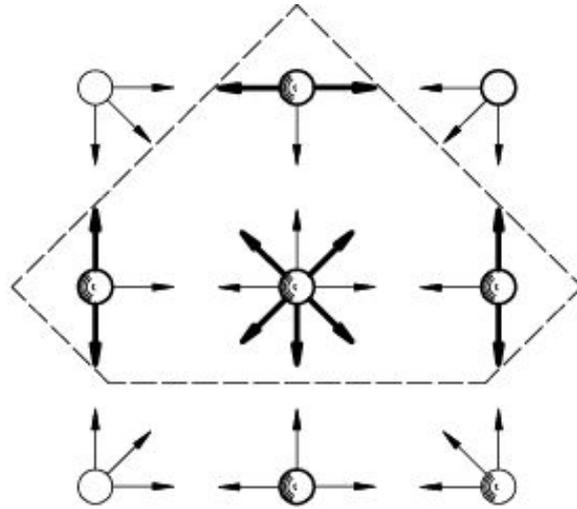
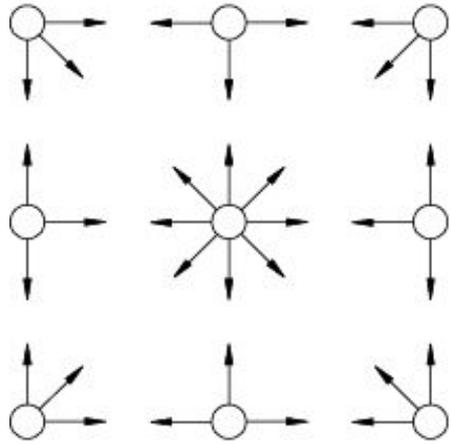
Динамика механической системы

Механической системой
называется такая
совокупность
материальных точек или
тел,
в которой положение или
движение каждой точки
(или тела)
зависит от положения и
движения всех
остальных

Силы,
действующие на
ТОЧКИ
или тела системы,
разделяются,
на **внешние**
И
внутренние

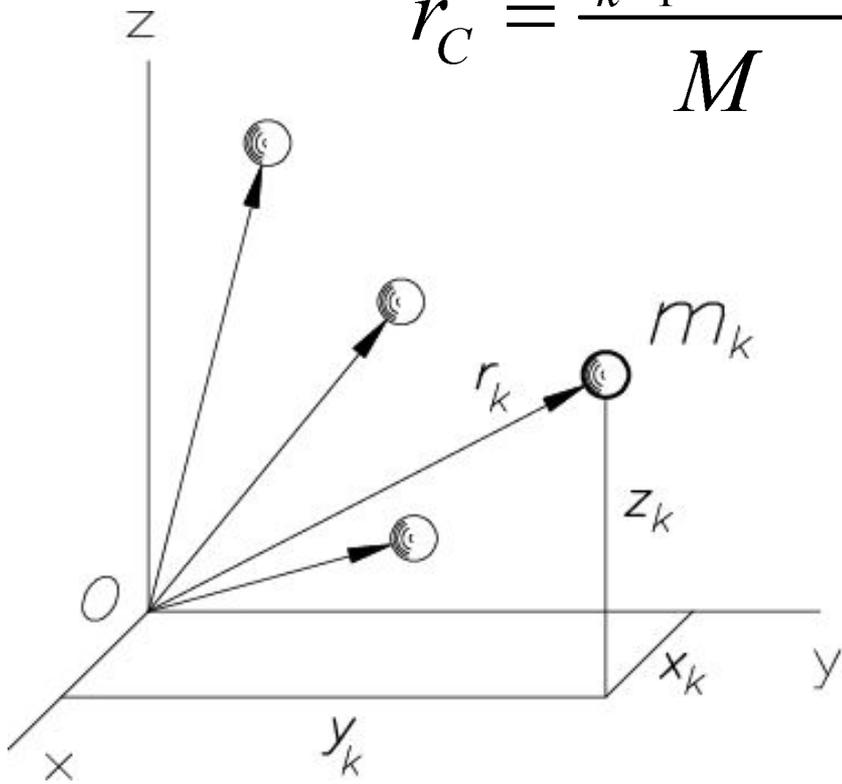
Свойства внутренних сил
(на основании 3-го закона динамики):

1. Геометрическая сумма (**главный вектор**) всех внутренних сил системы равняется нулю.
2. Сумма моментов (**главный момент**) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю

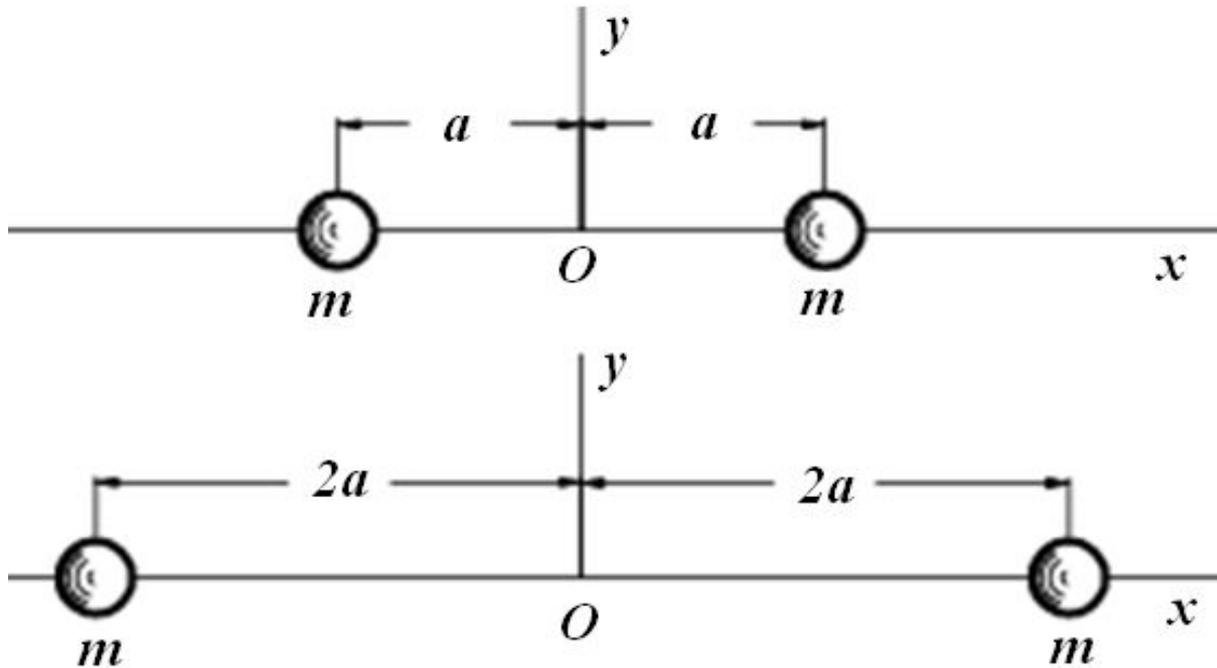


Центр масс системы

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{M}. \quad M = \sum_{k=1}^n m_k$$



$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_k x_k}{M}; \\ y_C &= \frac{\sum m_k y_k}{M}; \\ z_C &= \frac{\sum m_k z_k}{M}. \end{aligned} \right\}$$

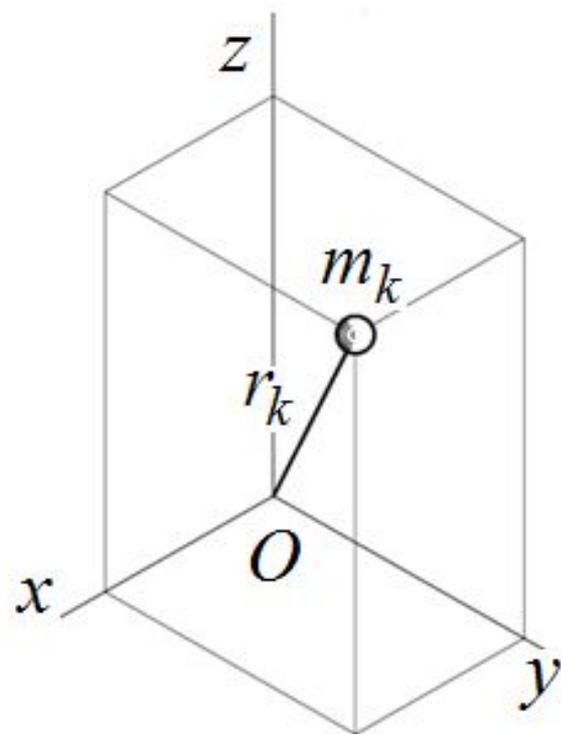
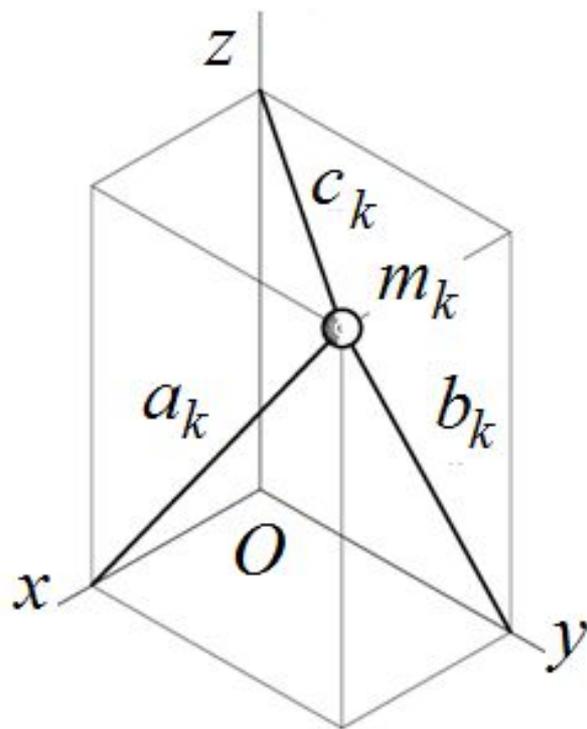
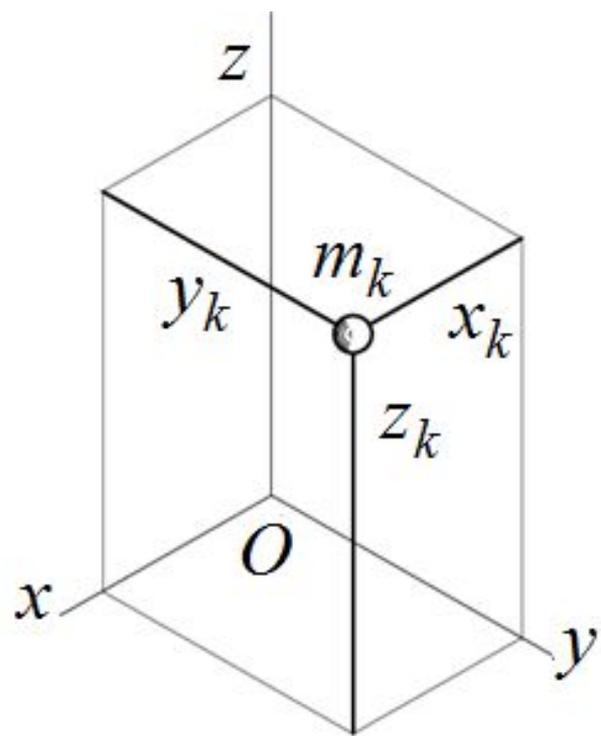


$$x_{C_1} = \sum m_k x_k / \sum m_k = (ma - ma) / 2m = 0$$

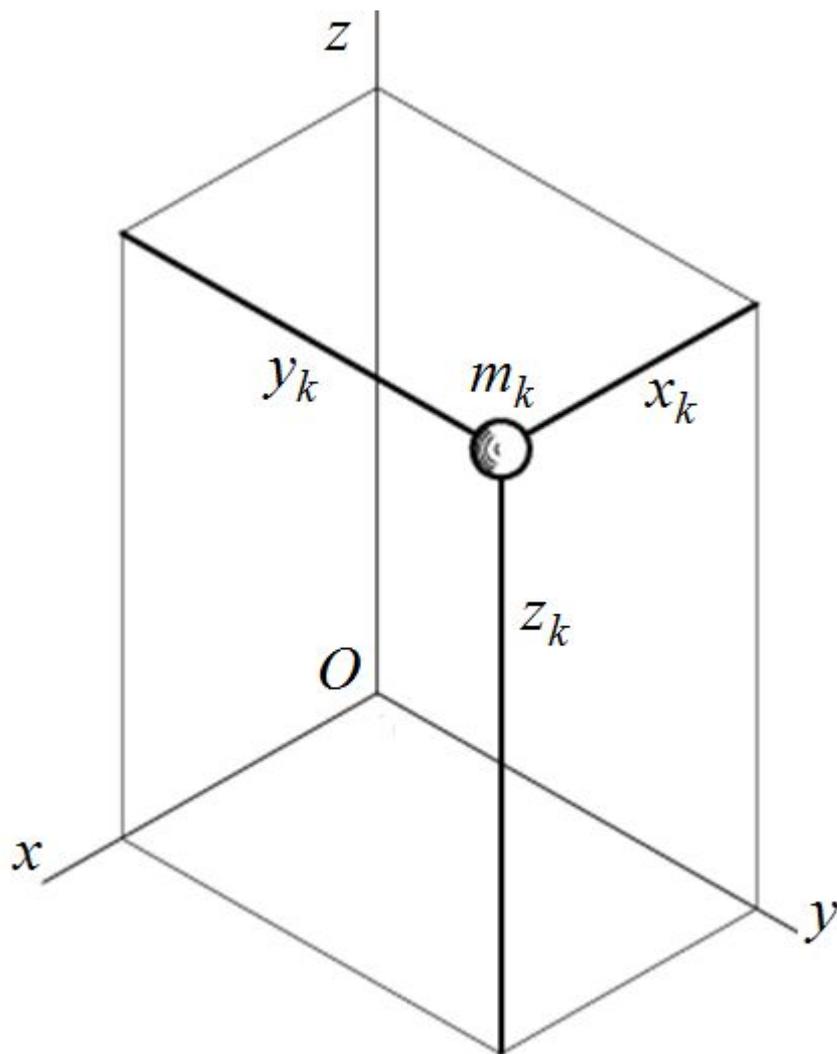
$$x_{C_2} = \sum m_k x_k / \sum m_k = (2ma - 2ma) / 2m = 0$$

$$J_{y_1} = \sum m_k x_k^2 = (ma^2 + ma^2) = 2ma^2$$

$$J_{y_2} = \sum m_k x_k^2 = (m4a^2 + m4a^2) = 8ma^2$$



Момент инерции твердого тела относительно координатных плоскостей:



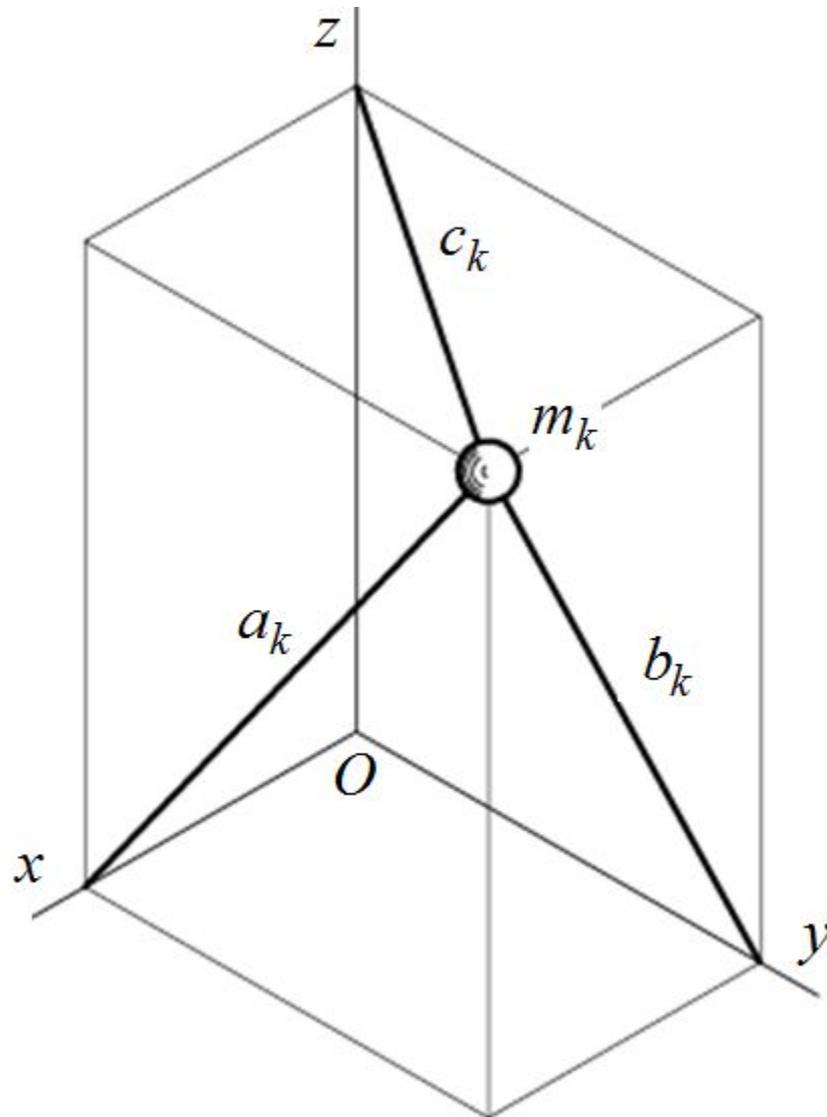
*скалярная величина,
равная сумме
произведений массы
каждой точки тела
на квадрат расстояния
от этой точки до
плоскости*

$$J_{yOz} = \sum m_k x_k^2$$

$$J_{zOx} = \sum m_k y_k^2$$

$$J_{xOy} = \sum m_k z_k^2$$

Момент инерции твердого тела относительно координатных осей:



*скалярная величина,
равная сумме
произведений
массы каждой точки тела
на квадрат расстояния
от этой точки до оси*

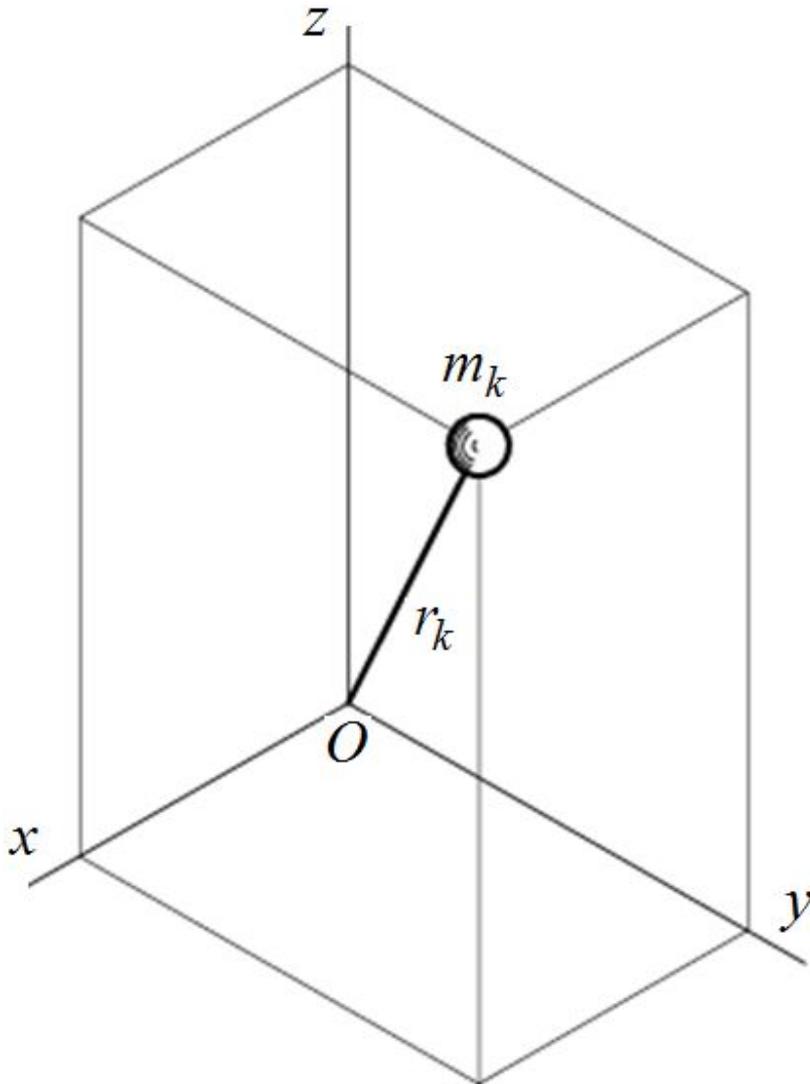
$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

$$J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2)$$

$$J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Момент инерции твердого тела

относительно полюса (полярный момент инерции):



**скалярная величина, равная
сумме произведений
массы каждой точки тела
на квадрат расстояния
от точки до этого
полюса**

$$J_O = \sum m_k r_k^2$$

Зависимости между моментами инерции твёрдого тела

$$J_O = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = J_{yOz} + J_{yOz} + J_{xOy} \quad (1)$$

$$J_x + J_y + J_z = 2 \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2J_O,$$

откуда $J_O = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z)$ (2)

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{zOx} + J_{xOy}; \\ J_y &= J_{yOz} + J_{xOy}; \\ J_z &= J_{yOz} + J_{zOx}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Радиус инерции

$$J_z = m i_z^2$$

где m - масса тела;

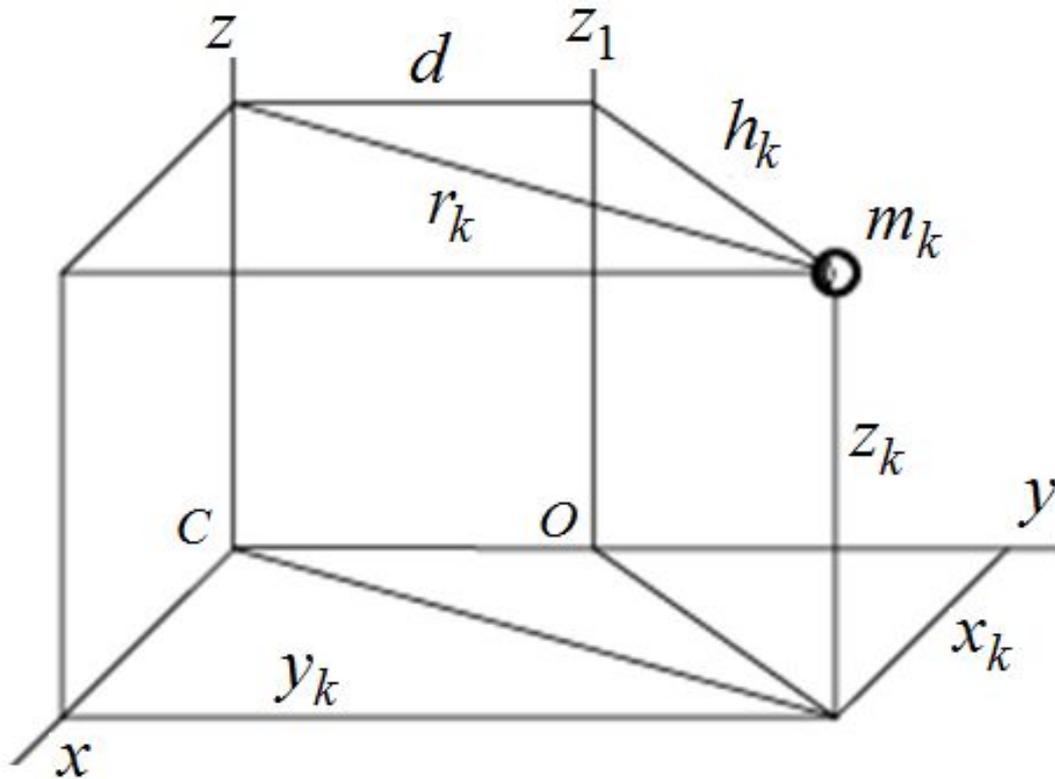
i_z - радиус инерции тела
относительно оси z .

ТЕОРЕМА О МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА
ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ
(теорема Гюйгенса-Штайнера)

*«Момент инерции твердого тела
относительно некоторой оси
равен моменту инерции тела
относительно параллельной оси,
проходящей через его **центр масс**,
сложенному с произведением
массы тела
на квадрат расстояния
между осями»*

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2; \quad h_k^2 = x_k^2 + (y_k - d)^2 = x_k^2 + y_k^2 + d^2 - 2y_k d;$$

$$J_{C_z} = \sum m_k r_k^2; \quad J_{z_1} = \sum m_k h_k^2; \quad J_{z_1} = J_{C_z} + d^2 \sum m_k - 2d \sum m_k y_k;$$



$$\sum m_k y_k = m y_C = 0;$$

$$J_{z_1} = J_{C_z} + m d^2$$

Из совокупности
параллельных осей,
ось,
проходящая
через
центр масс тела,
характеризуется
наименьшим
моментом инерции

Так как

$$J_o = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z),$$

следовательно,
центр масс тела
является полюсом,
относительно
которого полярный
момент инерции тела
имеет наименьшее
возможное значение

Теорема о движении центра масс

$$\sum m_k \overset{\boxtimes}{a}_k = \sum \overset{\boxtimes}{F}_k^e + \sum \overset{\boxtimes}{F}_k^i; \quad (1) \quad \sum m_k \overset{\boxtimes}{r}_k = M \overset{\boxtimes}{r}_C; \quad (2)$$

$$\sum m_k \frac{d^2 \overset{\boxtimes}{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \overset{\boxtimes}{r}_C}{dt^2}; \quad (3)$$

$$\sum m_k \overset{\boxtimes}{a}_k = M \overset{\boxtimes}{a}_C; \quad (4)$$

$$M \overset{\boxtimes}{a}_C = \sum \overset{\boxtimes}{F}_k^e; \quad (5)$$

«Произведение **массы** системы
на **ускорение** ее центра масс

равно

геометрической сумме

всех действующих на систему **внешних** сил»

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e; \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e; \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_{kz}^e. \end{aligned} \right\}$$

Закон сохранения движения центра масс

Следствие 1:

Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

Тогда

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e = 0,$$

$$\text{тогда} \quad \bar{a}_C = 0$$

$$\text{или} \quad \bar{v}_C = \text{const}$$

Если **сумма всех внешних сил**,
действующих на систему,
равна нулю,
то **центр масс** этой системы
движется **с постоянной** по модулю и направлению
скоростью,
т.е. **равномерно и прямолинейно**.
В частности, если вначале центр масс был в
покое, то он и останется в покое.

*Действие внутренних сил
движение центра масс системы
изменить
не может*

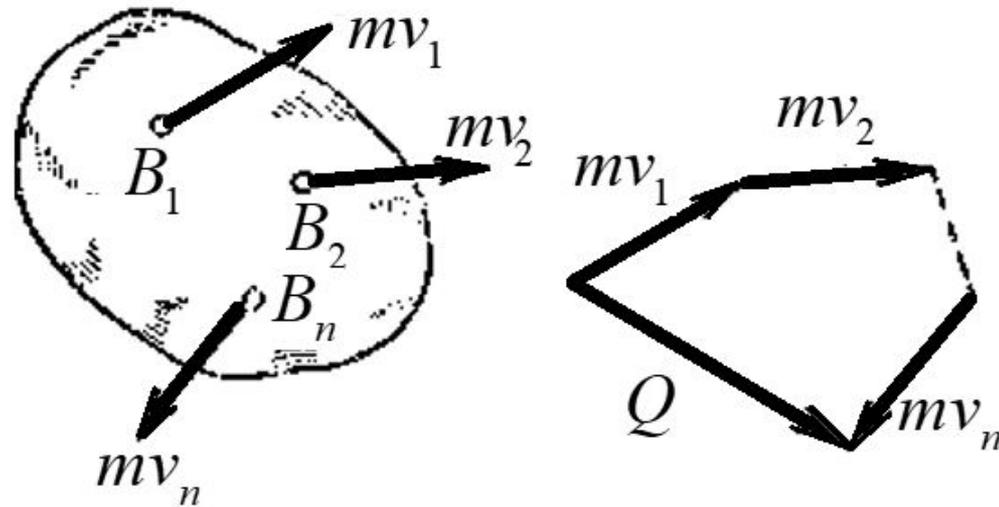
Следствие 2

Пусть сумма проекций внешних сил, действующих на систему, на какую-нибудь ось (например, ось Ox) равна нулю

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0; \quad \frac{dx_c}{dt} = v_{Cx} = \text{const}$$

Следовательно,
*если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю,
то проекция скорости центра масс системы на эту ось
есть величина постоянная*

Количество движения системы



Количество движения системы - векторная величина Q , равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы

$$\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C;$$

$$\sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = M \frac{d\bar{r}_C}{dt};$$

$$\sum m_k \bar{v}_k = M \bar{v}_C.$$

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C.$$

*Количество движения системы
равно произведению массы всей системы
на скорость ее центра масс*

Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме:

«Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил»

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i;$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{v}_k) = \frac{d\bar{Q}}{dt};$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e$$

В проекциях на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= \sum F_{kx}^e; \\ \frac{dQ_y}{dt} &= \sum F_{ky}^e; \\ \frac{dQ_z}{dt} &= \sum F_{kz}^e \end{aligned} \right\}$$

**Теорема об изменении количества движения системы
в интегральной форме:**

*«Изменение количества движения системы за
некоторый промежуток времени равно сумме
импульсов действующих на систему внешних сил за
тот же промежуток времени»*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e;$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt;$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e.$$

В проекциях на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum S_{kx}^e; \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum S_{ky}^e; \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum S_{kz}^e. \end{aligned} \right\}$$

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

2) Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Эти результаты и выражают закон сохранения количества движения системы.

Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут.

*Главным моментом количества движения системы
(кинетическим моментом,
моментом количества движения)
относительно данного центра O называется
величина L_O , равная геометрической сумме
моментов количества движения всех точек системы
относительно этого центра:*

$$\bar{L}_O = \sum \bar{M}_O (m_k \bar{v}_k)$$

Кинетические моменты относительно координатных осей:

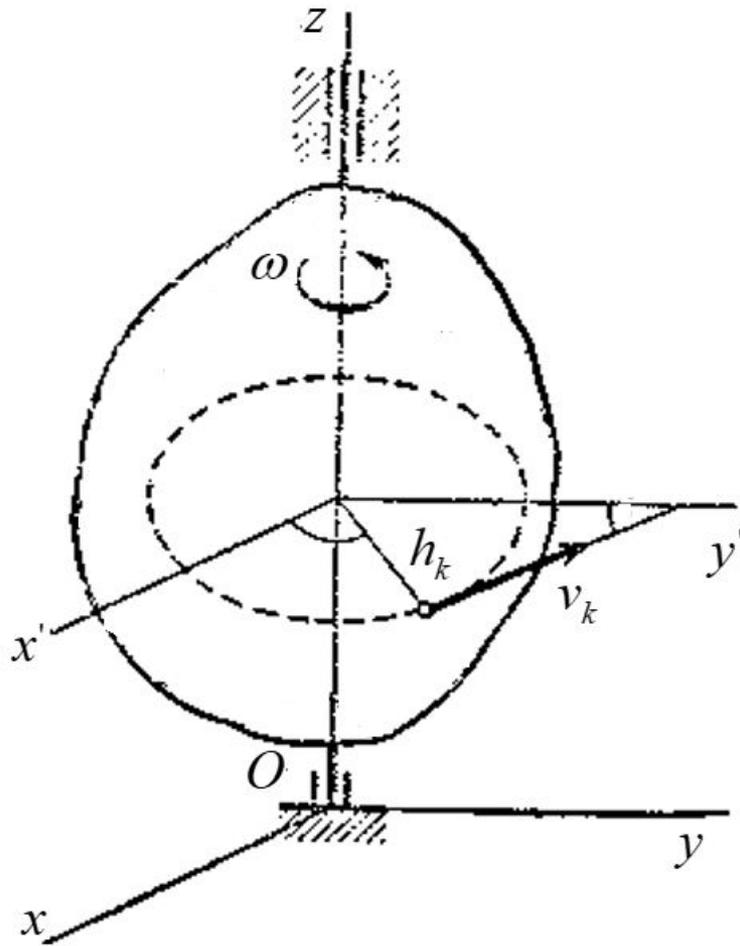
$$L_x = \sum M_x(m_k v_k);$$

$$L_y = \sum M_y(m_k v_k);$$

$$L_z = \sum M_z(m_k v_k).$$

*Кинетический момент системы
является характеристикой
вращательного движения системы*

Кинетический момент тела,
вращающегося вокруг неподвижной оси



$$\begin{aligned} L_z &= \sum M_z(m_k v_k) = \\ &= \left(\sum m_k h_k^2 \right) \omega; \\ L_z &= J_z \omega \end{aligned}$$

Теорема об изменении кинетического момента системы

$$\frac{d}{dt}[\bar{M}_O(m_k \bar{v}_k)] = \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_O(\bar{F}_k^i);$$

$$\frac{d}{dt}[\sum \bar{M}_O(m_k \bar{v}_k)] = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^i);$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e).$$

«Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра»

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси, получим:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x(\bar{F}_k^e);$$

$$\frac{dL_y}{dt} = \sum M_y(\bar{F}_k^e);$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Закон сохранения кинетического момента количеств движения

- 1. Если сумма моментов
относительно данного
центра
всех приложенных к системе
внешних сил равна нулю,
то кинетический момент
системы
относительно этого
центра
будет численно и по
направлению постоянен**
- 2. Если сумма моментов
всех действующих на
систему внешних сил
относительно какой-
нибудь оси равна нулю, то
кинетический момент
системы
относительно этой оси
будет величиной
постоянной**

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ —

скалярная величина

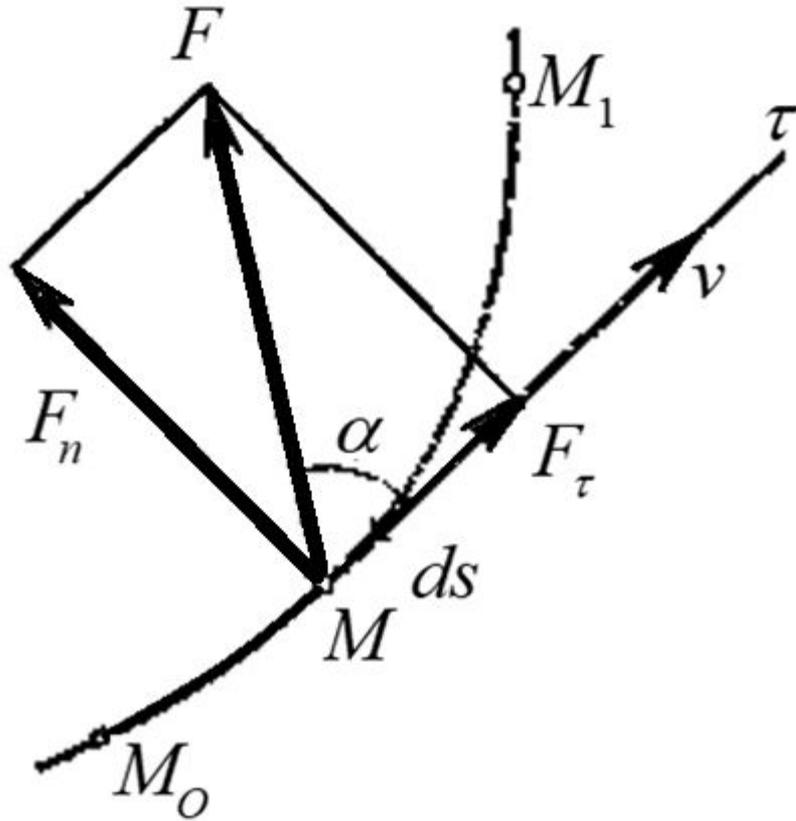
$$T = \frac{mv^2}{2},$$

равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

В системе СИ единица измерения

$$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{сек}^2 = \text{н} \cdot \text{м} = \text{джоуль}$$

Работа силы. Мощность



Элементарная работа силы F называется скалярная величина

$$\begin{aligned} dA &= F_{\tau} ds = \\ &= F \cos \alpha \cdot ds = \\ &= \bar{F} \cdot d\bar{r} \end{aligned}$$

Элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения

Если угол α **острый**, то работа **положительна**.

Если угол α **тупой**, то работа **отрицательна**.

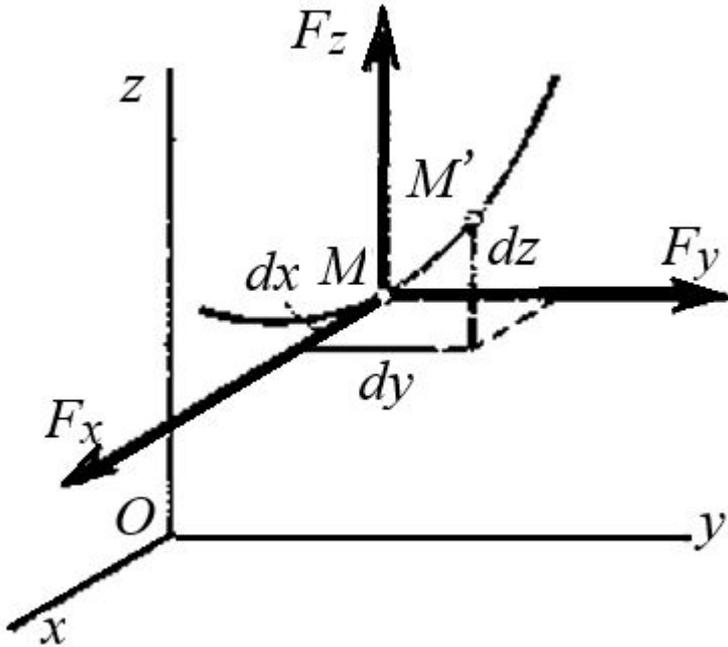
Если угол $\alpha=90^\circ$,

т.е. если сила направлена перпендикулярно
перемещению,

то элементарная работа силы **равна нулю**

Аналитическое выражение элементарной работы

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = (F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}) \cdot (dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k})$$



Так как $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$,

а $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$,

то $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Работа силы на любом конечном перемещении вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ и будет равна:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\tau} ds = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы

Единицей измерения работы в системе СИ является джоуль
(1 дж=1Нм)

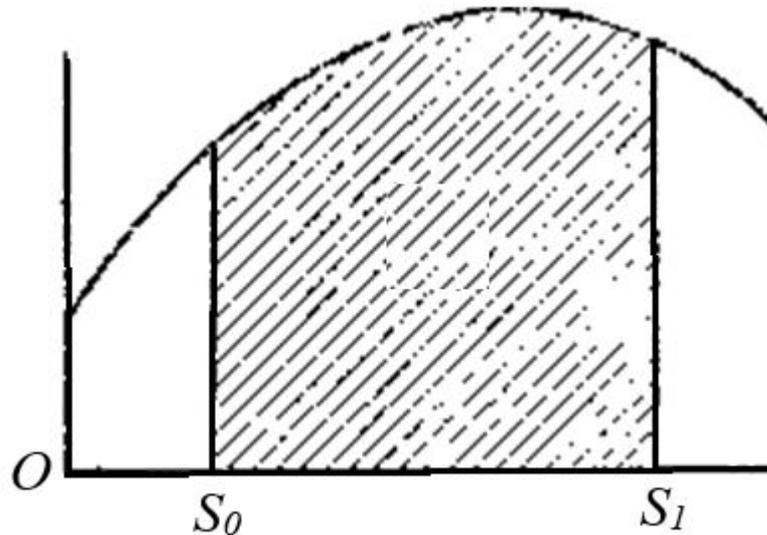
ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАБОТЫ

Графический способ вычисления работы

Если сила зависит от расстояния S

и известен график зависимости F_τ от S

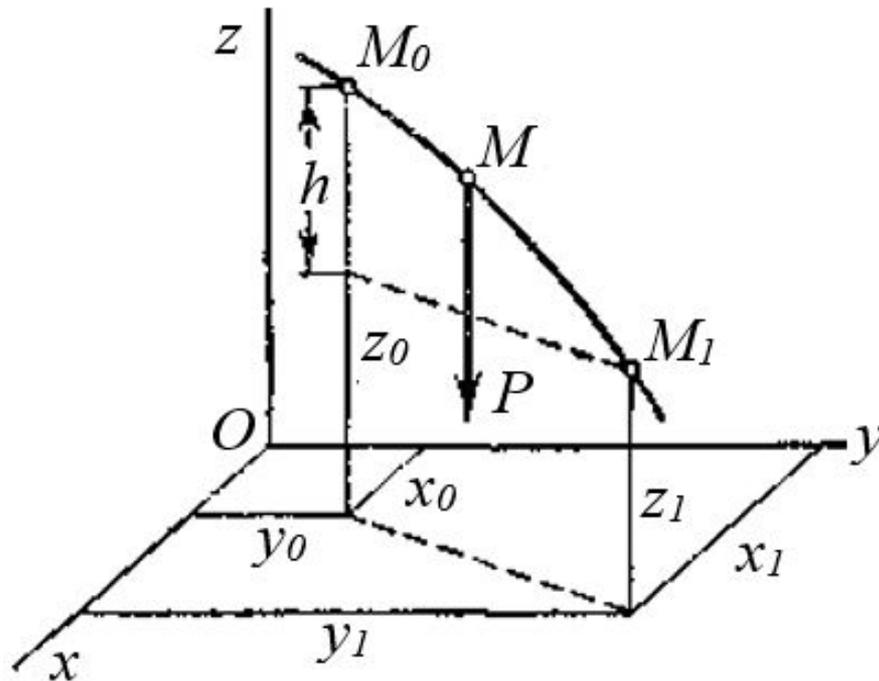
то работу силы F можно вычислить графически



Работа силы тяжести

$$A_{(M_0M_1)}^{(M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-P)dz = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1) = Ph.$$

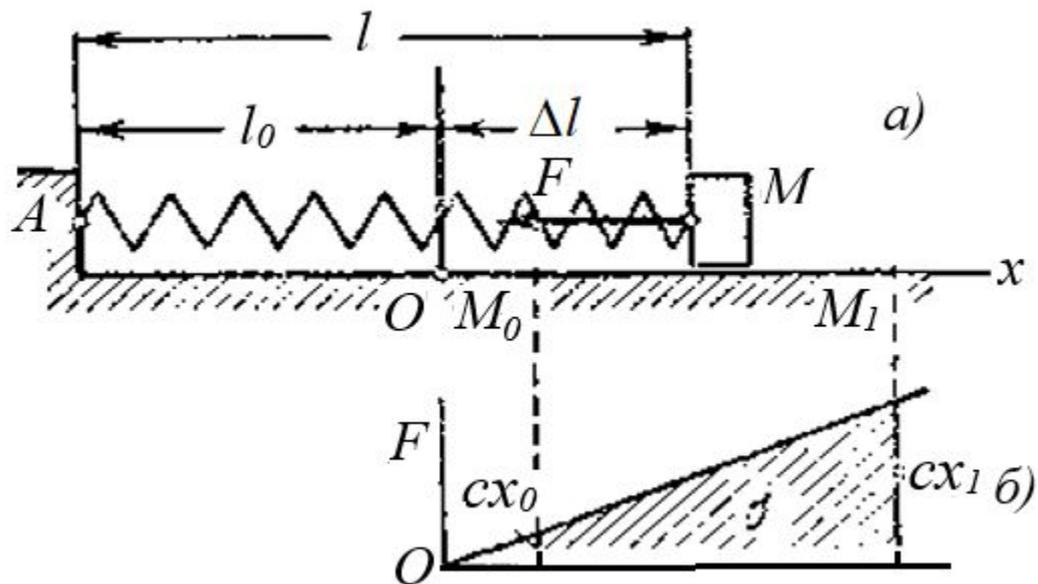
$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$$



Работа силы тяжести не зависит
от вида той траектории,
по которой перемещается точка ее
приложения.

Силы, обладающие таким свойством,
называются ***потенциальными***

Работа силы упругости



$$F = c|\Delta l| = c|x|$$

$$A = \int_0^x -cxdx = -c \int_0^x xdx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2)$$

Работа силы упругости равна
половине произведения коэффициента жесткости
на разность квадратов
начального и конечного удлинений (или сжатии)
пружины

Работа силы трения

$$A_{(M_0 M_1)} = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} F \cdot ds = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} f \cdot N \cdot ds$$

Работа силы трения при скольжении
всегда отрицательна.

Величина этой работы зависит от длины дуги $M_0 M_1$,
следовательно,
сила трения является
силой **непотенциальной**

Мощность

Мощность - величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$W = \frac{dA}{dt} = F_{\tau} \frac{ds}{dt} = F_{\tau} v$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является *ватт* ($1 \text{ вт} = 1 \text{ дж/сек}$), а в системе МкГС— 1 кгм/сек . В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 кгм/сек или 736 вт .

**Теорема
об изменении кинетической энергии точки**

$$ma_{\tau} = \sum F_{i\tau}$$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

$$mv \frac{dv}{ds} = \sum F_{i\tau}; \quad mvdv = \sum F_{i\tau} \cdot ds;$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum F_{i\tau} \cdot ds$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$$

*Изменение кинетической энергии точки при
некотором ее перемещении
равно алгебраической сумме работ
всех действующих на точку сил
на том же перемещении*

*Кинетическая энергия системы –
скалярная величина E ,
равная арифметической сумме кинетических
энергий всех точек системы*

$$E = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

Поступательное движение

$$E_{\text{пост}} = \sum \frac{m_i v_C^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) v_C^2 = \frac{1}{2} M v_C^2$$

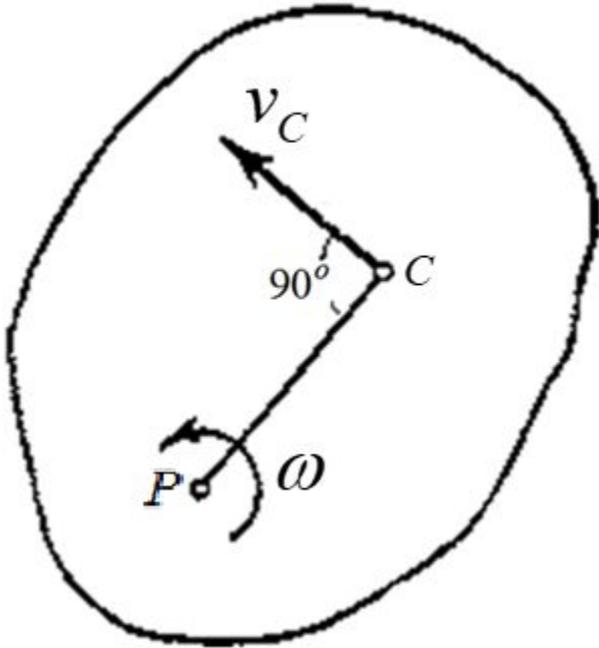
*Кинетическая энергия тела
при поступательном движении
равна
половине произведения массы тела
на квадрат скорости центра масс*

Вращательное движение

$$\begin{aligned} E_{\text{вр}} &= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (h_i \omega)^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum m_i h_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \end{aligned}$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости

Плоскопараллельное движение



$$\begin{aligned} E_{\text{плоск}} &= \frac{1}{2} J_P \omega^2 = \frac{1}{2} (J_C + Md^2) \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M (\omega d)^2 = \\ &= \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2 \end{aligned}$$

Кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс

Некоторые случаи вычисления работы

Работа сил тяжести,
действующих на систему,
вычисляется как работа их
равнодействующей G
на перемещении центра тяжести
(или центра масс) системы

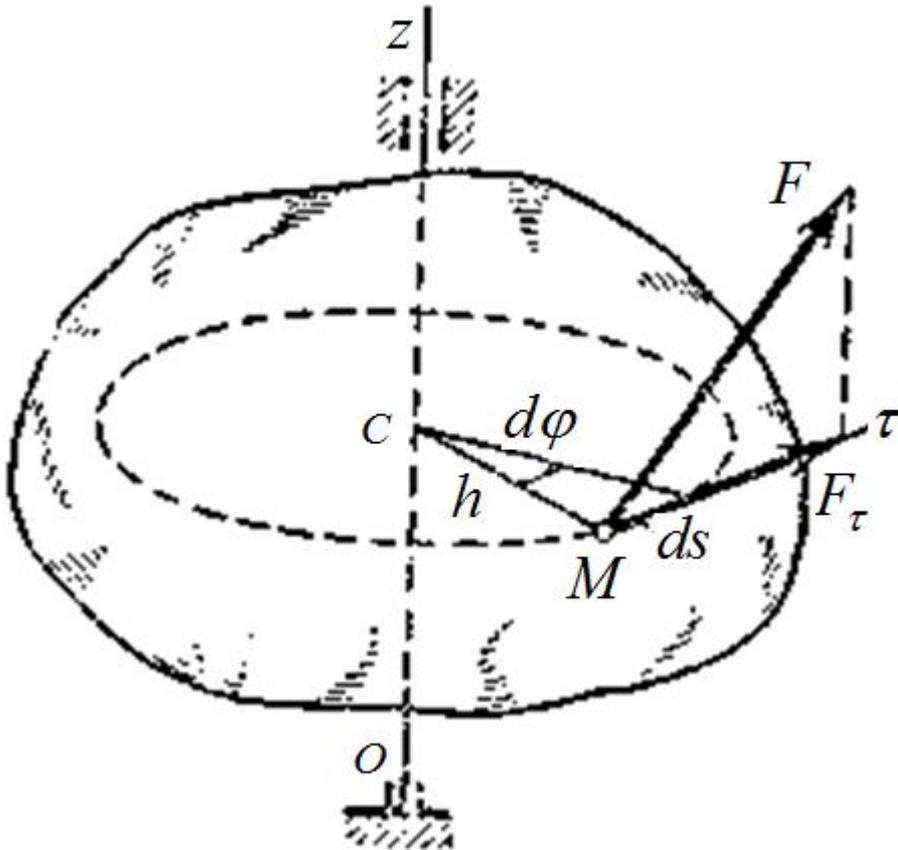
Работа сил, приложенных к вращающемуся телу

$$dA = F_{\tau} ds = F_{\tau} h \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi;$$

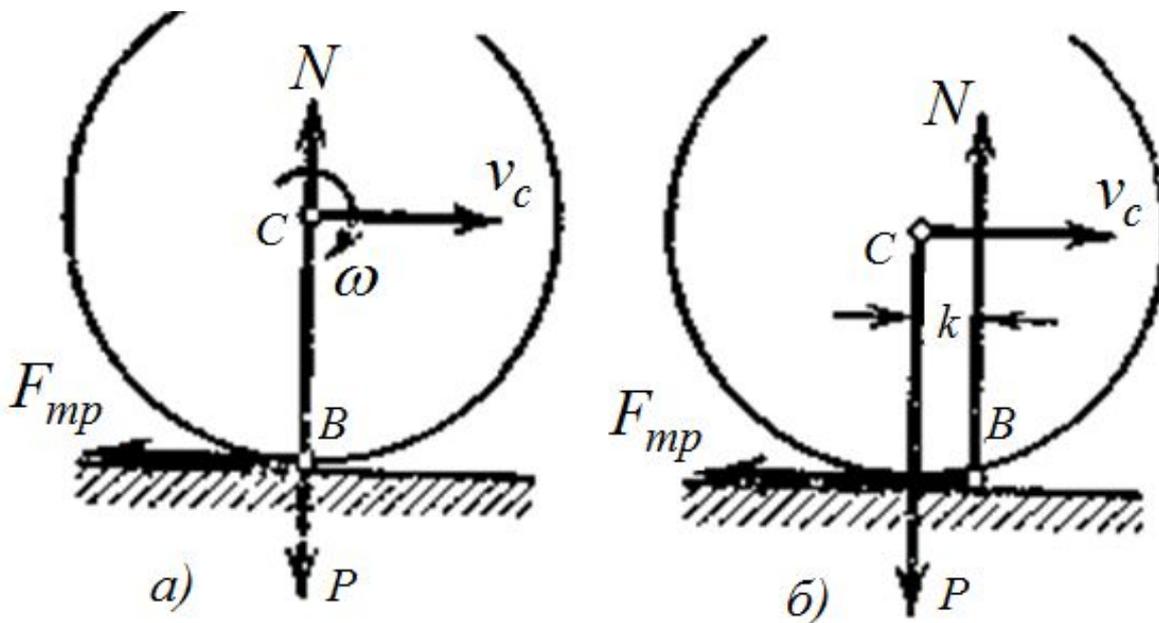
При повороте на конечный угол $A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi$.

В случае постоянного момента
($M_z = \text{const}$) $A = M_z \varphi_1$.

$$\text{Мощность } W = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega.$$



Работа сил трения, действующих на катящееся тело



При качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела **равна нулю**.

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей

$$A^{\text{кач}} = -kN\varphi_1 = -\frac{k}{R}Ns_C.$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Для каждой из точек системы $d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dA_i^e + dA_i^j$;

Складывая почленно, получим

$$d\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum dA_i^e + \sum dA_i^j = \sum_i^e + \sum_i^j.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства
в пределах, соответствующих перемещению
системы из некоторого начального положения

$$E_1 - E_0 = \sum A_i^e + \sum A_i^j.$$

*Изменение
кинетической энергии системы при
некотором ее перемещении равно
сумме работ
на этом перемещении
всех приложенных к системе
внешних
и
внутренних сил*

Принцип Даламбера:

«Если к заданным (активным) силам,
действующим на точку, и реакциям
наложенных связей

присоединить силу инерции,

то получится уравновешенная система сил»

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N}; \quad \bar{P} + \bar{N} - m\bar{a} = 0; \quad -\cancel{\Phi}\bar{a} = \bar{};$$

$$\cancel{\Phi}_i + \bar{N}_i + \bar{}_i = 0$$