

Тема урока

Элементы комбинаторики. Перестановки.



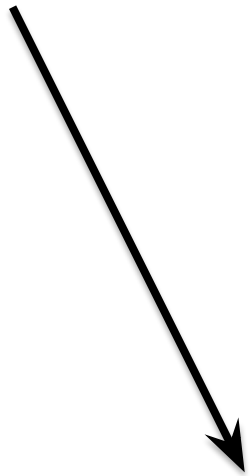
Комбинаторные задачи делятся на несколько групп:



Задачи на
перестановки



Задачи на
размещение



Задачи на
сочетание



Открываем новое Факториал



Определение.

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n .



Обозначение $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Пример:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Запомни: $0! = 1$ $1! = 1$ 

Таблица факториалов:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

Установите соответствие

А) $2! =$

1) 6

Б) $3! =$

2) 24

В) $4! =$

3) 2

Г) $5! =$

4) 720



Д) $6! =$

5) 120

Проверка !



А	Б	В	Г	Д
3	1	2	5	4



Вычислите

а)

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 56 \cdot 6 = 336$$



Вычислите

$$б) \frac{5! - 3!}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3! - 3!}{4 \cdot 3!} = \frac{3!(20 - 1)}{4 \cdot 3!} =$$

$$= \frac{19}{4} = 4,75$$



Вычислите

$$\text{в)} \quad \frac{7! \cdot 8}{7 \cdot 8!} = \frac{7! \cdot 8}{7 \cdot 7! \cdot 8} = \frac{1}{7}$$

$$\text{г)} \quad \frac{7! \cdot 4!}{6! \cdot 5!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 4!}{6! \cdot 4! \cdot 5} = \frac{7}{5} = 1,4$$



Запомните

$$\mathbf{n! = (n - 1)! \cdot n}$$

$$\frac{(n - 1)! \cdot n}{2n!} = \frac{1}{2}$$



Вычислите :



5!

7!+8!-6!

2!·3!

31·6!

A green jagged lightning bolt shape containing the red number 10.

10

A green jagged lightning bolt shape containing the red number 2.

2





Вычислите :



$$\frac{P_8}{P_6}$$

$$P_6$$

56

$$\frac{P_5 + P_4}{P_3}$$

$$P_3$$

24



Вычислите :



$$\frac{P_6 - P_4}{P_3}$$

$$P_3$$

116

$$\frac{P_8 - P_7}{7 \cdot P_7}$$

$$7 \cdot P_7$$

1

На примерах учимся

Найдите значение выражения



$$a) \frac{15!}{14!} =$$

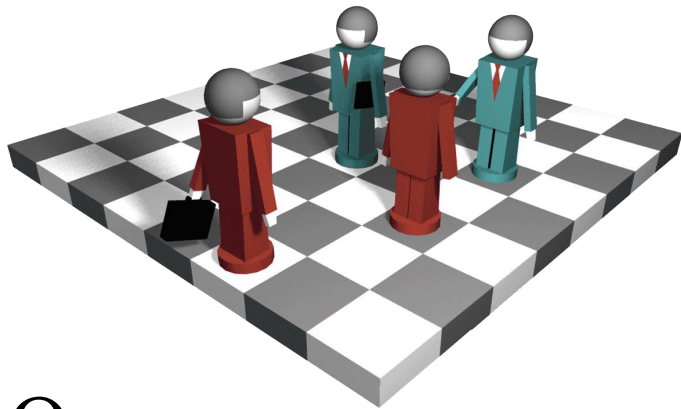
$$б) \frac{8!}{10!} =$$

$$в) \frac{42!}{40!} =$$

$$г) \frac{16!}{14! \cdot 3!} =$$

$$д) \frac{28!}{4! \cdot 26!} =$$

$$е) \frac{45!}{43! \cdot 3!} =$$



Открываем новое Перестановки



Определение.

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение (без повторений) этих элементов в определенном порядке.



Число перестановок из n элементов обозначают P_n
Читают « P из n ».

Число всевозможных перестановок из n элементов
вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

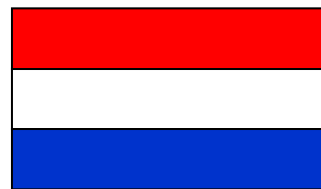
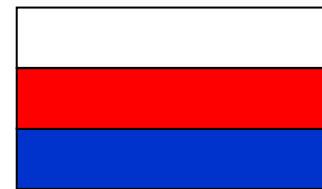
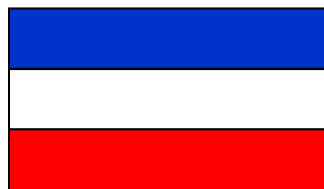


Открываем новое

Государственные флаги некоторых стран состоят из трёх горизонтальных полос разного цвета. Сколько существует различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосой?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Ответ: 6 вариантов.



Открываем новое

Пример 1



Сколькими способами могут быть расставлены восемь участников финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение: $P_8 = 8! = 40\,320$

Ответ: 40320.

Открываем новое

Пример 2

Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, причём в каждом числе цифры должны быть разные?

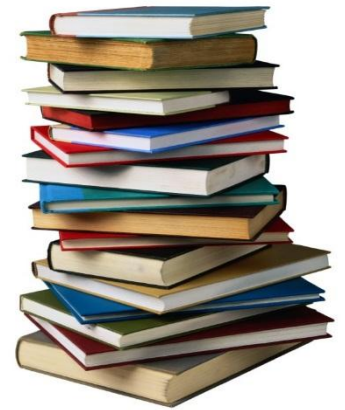
Решение:

Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры 0. Число таких перестановок равно P_3 . Значит, искомое число четырёхзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, равно

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

Открываем новое

Пример 3



Имеется девять различных книг, четыре из которых – учебники.

Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не девять, а шесть книг. Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6 \cdot P_4$. Получаем:

$$P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4! = 17\,280.$$



Пример 4 *Открываем новое*

Сколько вариантов расписания уроков возможно составить, если в день шесть уроков: математика, русский язык, география, биология, физкультура, информатика, если:



а) урок математики должен быть только первым?

Так как урок математики должен быть только первым, для остальных уроков остаются варианты расписания только из пяти предметов, т.е

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ способов}$$

Ответ: 120



б) урок физкультуры не может быть первым?

Так как урок физкультуры не может быть первым, то из всего количества всех вариантов уроков необходимо исключить случаи, когда урок проходит первым

$$P_6 - P_5 = 6! - 5! = 720 - 120 = 600 \text{ способов}$$

Ответ: 600



в) урок русского языка не может быть ни первым, ни шестым?

Так как русский язык не может быть ни первым, ни шестым, то эти случаи необходимо исключить:

$$\begin{aligned} P_6 - 2 P_5 &= 6! - 2 \cdot 5! = \\ &= 720 - 240 = 480 \text{ способов} \end{aligned}$$

Ответ : 480



г) урок биологии может быть или четвертым, или шестым?

Так как урок биологии можно проводить или на четвертом, или на шестом уроке, то на четвертом уроке он может быть проведен в $5!$ вариантах, и на шестом уроке биология может быть проведена $5!$ случаях.

Итого $2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$ способов

Ответ: 240



д) урок математики и урок информатики должны стоять рядом

Так как уроки математики и информатики должны стоять рядом, то будем считать пару информатика — математика как один предмет. Тогда из пяти получившихся предметов можно составить только $5!$ вариантов расписания. Но двухэлементное множество (математика-информатика) можно упорядочить только $2!$ способами. Значит, общее количество вариантов будет в $2!$ раза больше.

$$2! \cdot 5! = 240 \text{ способов}$$

Ответ: 240



На примерах учимся

№1



Сколькоими способами могут встать в очередь в билетную кассу: 1) 3 человека; 2) 5 человек?

Ответ: 1) 6 способов; 2) 120 способов.



Сколько различных правильных
(с точки зрения русского языка)

фраз можно составить, изменяя порядок слов в
предложении:

- 1) «Я пошла гулять»;
- 2) «Во дворе гуляет кошка»?

Ответ: 1)6 способов; 2)6 способов.

На примерах учимся



№3

Сколькоими способами можно с помощью букв К, L, M, H обозначить вершины четырехугольника?

Ответ: 24 способа.

На примерах учимся



Сколько существует выражений, тождественно равных произведению $abcde$, которые получаются из него перестановкой множителей?

Ответ: 119 выражений.

На примерах учимся



Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры следуют. Укажите **наибольшее число** вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.

Ответ: 6 вариантов.

На примерах учимся



Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций:

- а) Олег находится в конце ряда;
- б) Олег находится в начале ряда, а Игорь в конце;
- в) Олег и Игорь стоят рядом;

а) (Олег находится в конце ряда – фиксируем). Число комбинаций равно числу **перестановок 6 мальчиков**, стоящих перед Олегом

$$а) P_6 = 6! = 720.$$

б) Два элемента фиксированы. Число возможных комбинаций равно числу **перестановок 5 мальчиков**, стоящих между Олегом и Игорем

$$б) P_5 = 5! = 120.$$

На примерах учимся



Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите число возможных комбинаций:

- а) Олег находится в конце ряда;
- б) Олег находится в начале ряда, а Игорь в конце;
- в) Олег и Игорь стоят рядом;

г) Пусть Олег и Игорь стоят рядом. Возможны два варианта их расположения в паре (Олег – Игорь, Игорь – Олег). Будем рассматривать эту пару как единый элемент, переставляемый с другими пятью элементами.

$$г) P_6 = 6! = 720.$$

$$720 + 720 = 1440$$

Замечание: Такой прием называется «склеиванием» элементов.



Ответ: 720; 120; 1440.