Лекция **2-5**

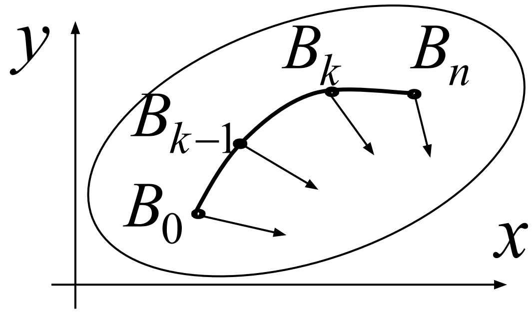
11.2. Криволинейный интеграл по координатам **(2 –** го рода**).**

- **Задача о работе силового поля.**

Предположим, что в области D **задано плоское силовое поле. Т. е. на материальную точку в** D **действует сила** $\vec{F}$, **определенная для всякой точки** $(x,y)\in D$, $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$. **Считаем, что поле стационарное (не зависит от времени** t **)**

$$\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}.$$

- **Пусть материальная точка движется по линии** L.



Разобьем линию на n **частей точками** $B_0,\ B_1, ...,\ B_n.$

Работа на отрезке $\overline{B_{k-1}B_k} = \Delta x_k \bar{i} + \Delta y_k \bar{j}$ **равна**

$$\Delta A_k = \left|\overline{F_k}\right| \cdot \left|\overline{B_{k-1}B_k}\right| \cos\alpha_k$$ **или** $$\Delta A_k = \overline{F_k} \cdot \overline{B_{k-1}B_k}.$$

Тогда $\Delta A_k = P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$

Просуммируем по всем отрезкам

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$$

Выражение в правой части называется интегральной суммой по линии $L.$ **Пусть** Δs_k **длина частичного участка разбиения кривой** $L.$

Переходя к пределу $\max \Delta s_k \to 0 \ (n \to \infty)$, получим истинную величину работы

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

Определение. Криволинейным интегралом 2-го рода по линии L называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k = \int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

В частности, если $Q(x,y) \equiv 0,$ то интеграл примет вид

$$\int_L P(x,y)\,dx$$

и называется криволинейным интегралом по координате $x.$

Если $P(x,y) \equiv 0,$ **то интеграл примет вид**

$$\int_L Q(x,y)\,dy$$

и называется криволинейным интегралом по координате $y.$

Работа силового поля $\vec{F}$ **по кривой** L **есть**

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

где $P(x,y),\ Q(x,y)$ **- проекции силового поля на оси координат.**

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
Оно сводится к вычислению определенных интегралов.

Например, вычислим криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L P(x,y)\,dx$ **от точки** B **до точки** C **по линии** L, **заданной параметрически** $x = x(t),\ y = y(t),$ **где функции** $x(t),\ y(t)$ **непрерывны со своими производными. Рассмотрим интегральную сумму**

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k, \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}).$$

Из формулы Лагранжа $\Delta x_k = x'(\theta_k)\Delta t_k,$

$$\theta_k \in [t_{k-1}, t_k], \qquad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

В качестве промежуточной точки (ξ_k, η_k) **выберем**

$$\xi_k = x(\theta_k),\ \eta_k = y(\theta_k).$$

- **Преобразованная сумма** $\sum_{k=1}^{n} P\big(x(\theta_k), y(\theta_k)\big)x'(\theta_k)\Delta t_k$

будет обыкновенной интегральной суммой для функции одной переменной $P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)$, **а ее предел – определенным интегралом**

$$\int_{t_B}^{t_C} P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Т. е.

$$\int_L P(x, y)\,dx = \int_{t_B}^{t_C} P\big(x(t), y(t)\big)x'(t)\,dt.$$

Аналогично $$\int_L Q(x, y)\,dy = \int_{t_B}^{t_C} Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\,dt.$$

Правило. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода от точки B до точки C по линии $L: x = x(t),\ y = y(t)$ производится по формуле $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_{t_B}^{t_C} \Big(P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

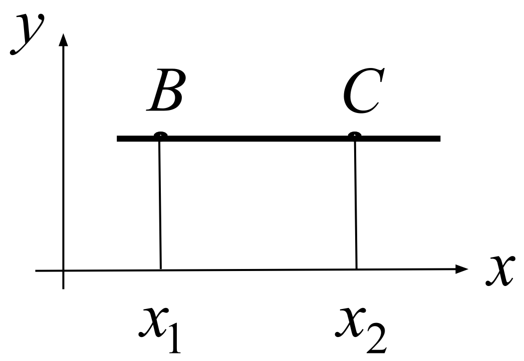
Следовательно, криволинейный интеграл 2-го рода всегда существует, если непрерывны $P(x,y),\ Q(x,y)$, **а** $x(t),\ y(t)$ **непрерывны со своими производными.**

Если уравнение линии задано в явном виде $y = y(x)$, **то, полагая** $x = t$, **имеем**

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{x_B}^{x_C} \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)y'(x)\Big)dx.$$

- **Если линия задана уравнениями разных видов, то линию нужно разбить на отдельные участки интегрирования.**

Примеры. 1)

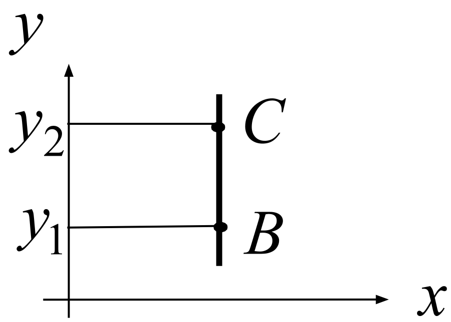


$$y = y_0$$

$$dy = 0$$

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{X_1}^{X_2} P(x, y_0)\,dx.$$

2)

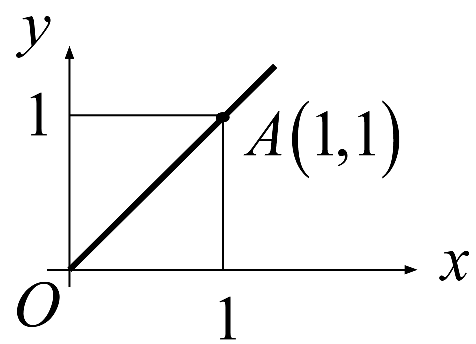


$$x = x_0$$

$$dx = 0$$

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)\,dy.$$

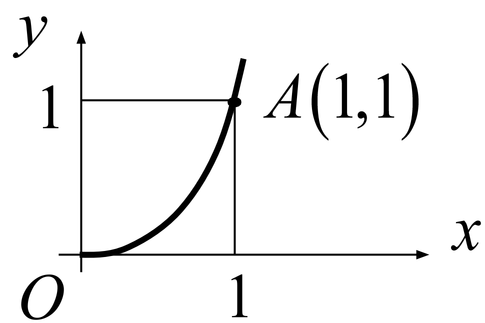
3) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I=\int\limits_L xy\,dx+(x+y)\,dy$ **от точки** $A(1,1)$ **до точки** $O(0,0)$ **по линии** $L:\ y=x.$



$$dy=dx$$

$$I=\int\limits_0^1\left(x^2+2x\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right|_0^1=\frac{4}{3}.$$

4) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_L xy\,dx + (x+y)\,dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$ по линии $L:\ y = x^2$.

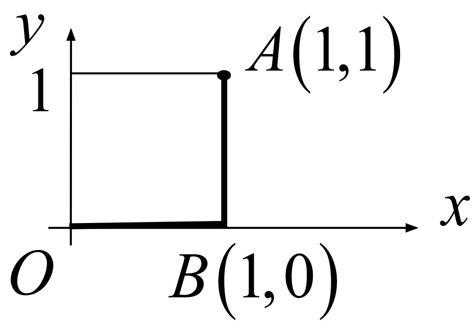


$$dy = 2x\,dx$$

$$I = \int\limits_0^1 \left(x^3 + 2x\left(x + x^2 \right) \right) dx = \frac{17}{12}.$$

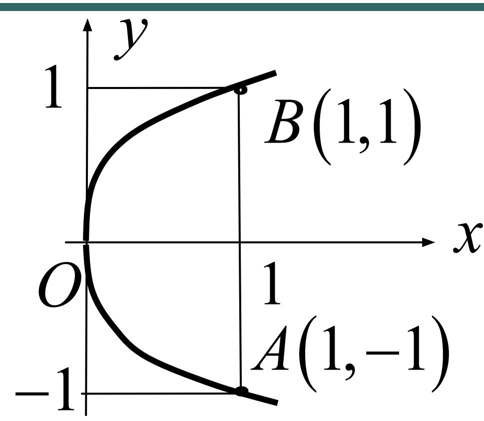
5) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_{OBA} xydx + (x+y)dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$,

где линия OB задана уравнением $y = 0 \ (dy = 0)$,
а линия BA задана уравнением $x = 1 \ (dx = 0)$.



$$I = \int_0^1 (1+y)dy = \left.\frac{(1+y)^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

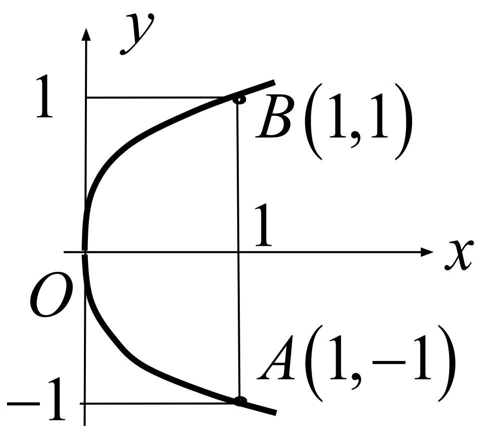
6) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I=\int\limits_L xydx$ от точки $A(1,-1)$ до точки $B(1,1)$ по линии $L:\quad x=y^2.$



Рассмотрим два случая:

А) Проинтегрируем по $dy.$ **Дифференциал** $dx=2ydy.$

$$I=\int\limits_{-1}^{1} y^2 y\cdot 2ydy=\left.\frac{2y^5}{5}\right|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Б) 

Проинтегрируем по $dx.$

На участке AO **уравнение линии будет** $y=-\sqrt{x}.$

На участке OB **уравнение линии будет** $y=\sqrt{x}.$

Интеграл I **можно представить в виде суммы интегралов**

$$I=\int\limits_{AO} xydx+\int\limits_{OB} xydx=-\int\limits_1^0 x\sqrt{x}dx+\int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx=2\int\limits_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{4}{5}.$$

7) Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $I = \int\limits_L y dx - x dy$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(4\pi, 0)$,

где одна L арка циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

- Параметр t изменяется от 0 до $2\pi.$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left[4(1 - \cos t)^2 - 4(t - \sin t)\sin t \right] dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{2\pi} (2 - 2\cos t - t\sin t) dt = 4\left[2t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} - (-t\cos t + \sin t)\Big|_0^{2\pi} \right] = 24\pi.$$