

Динамика вращательного движения

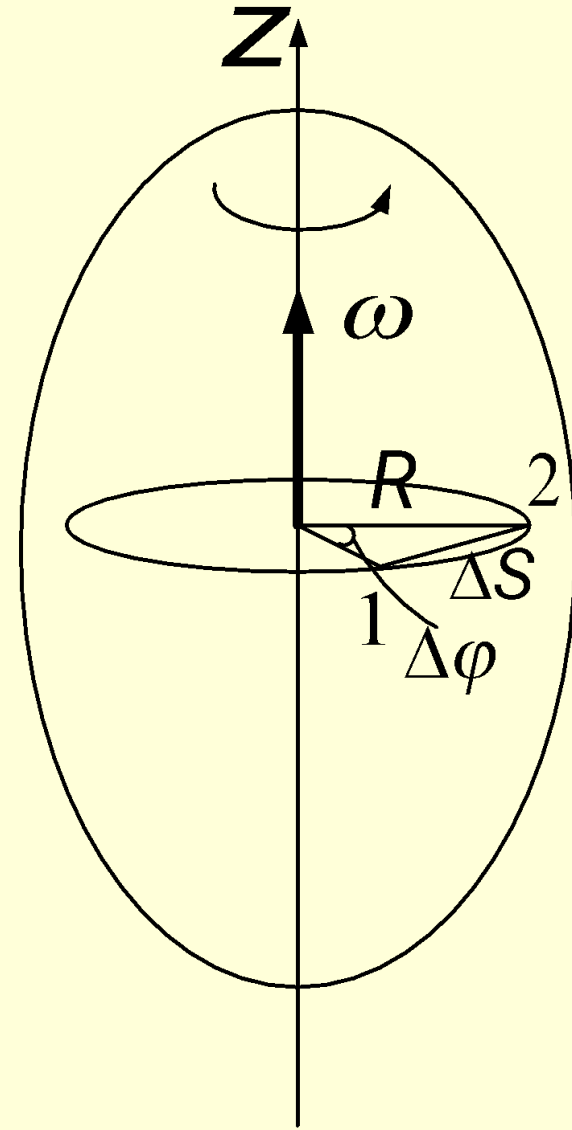
Лекцию читает
Кандидат физико-математических
наук, доцент
Кузьмин Юрий Ильич

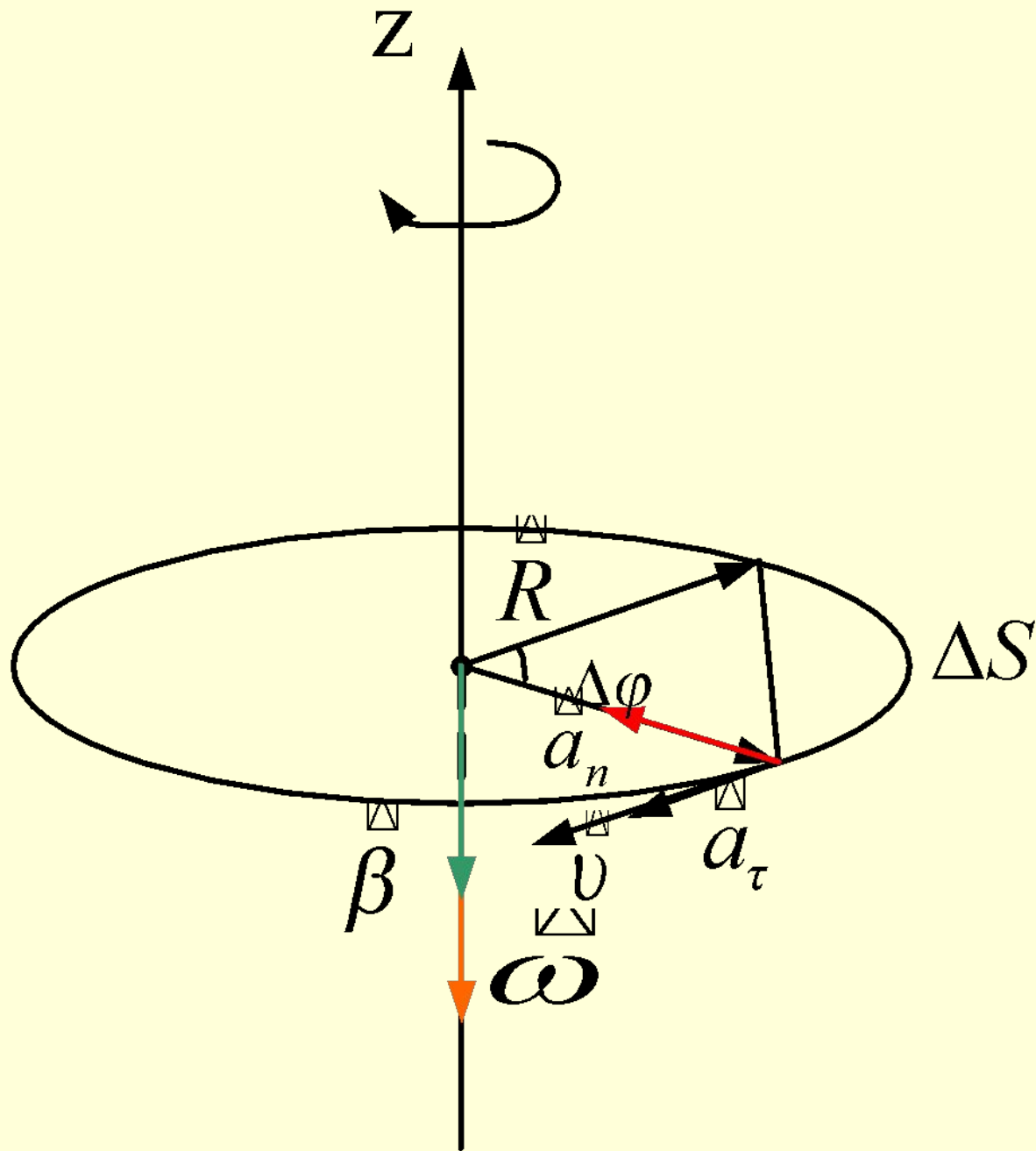
Вспомним основные формулы кинематики вращательного движения

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$





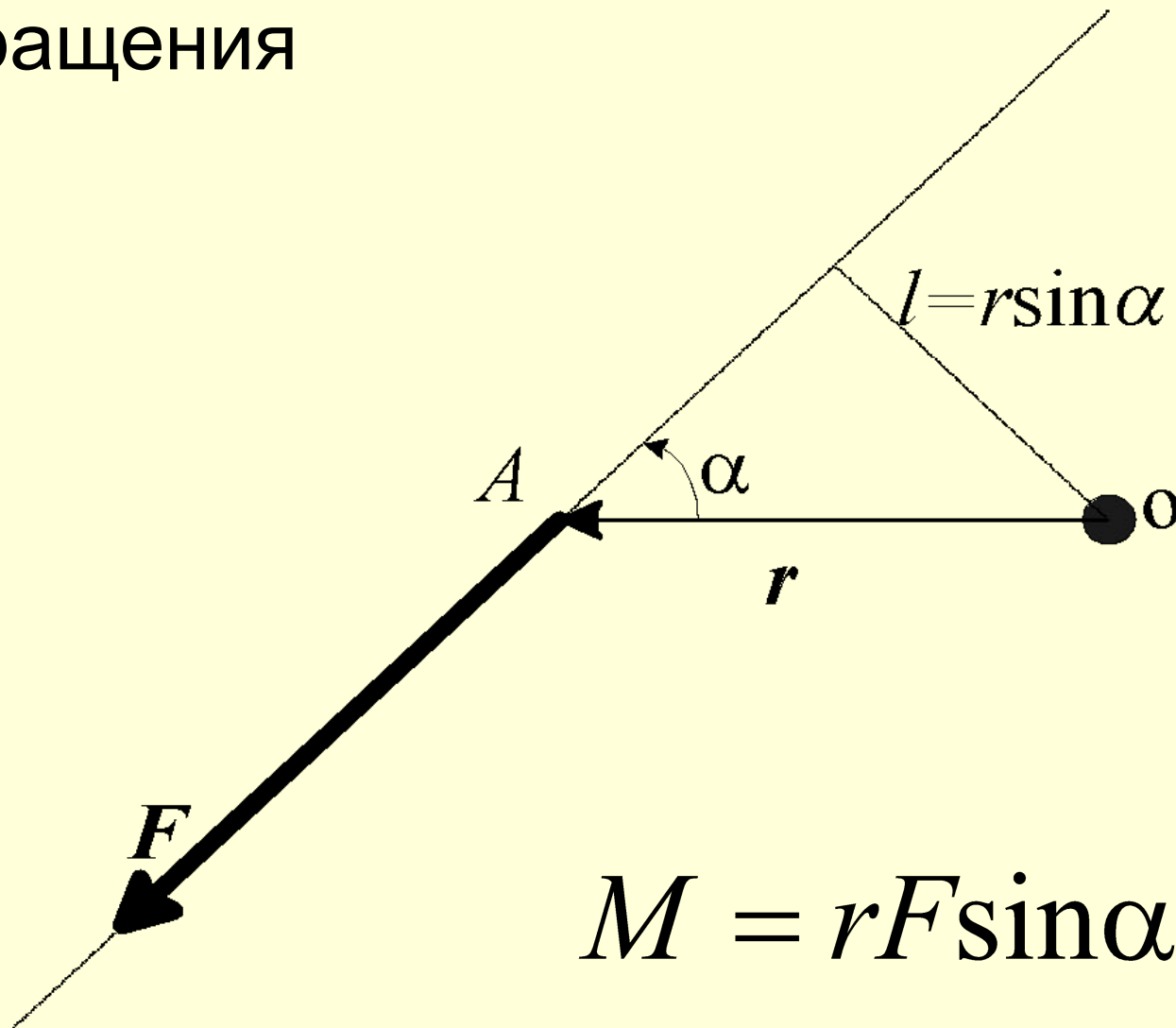
1. МОМЕНТЫ СИЛЫ

- Определим момент силы относительно
- центра вращения O

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1)$$

- $\vec{M}$ – векторная величина, определяемая
- векторным произведением радиус-
- вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$

Момент силы относительно центра вращения



Вначале определим момент силы относительно точки (О): это векторная величина определяемая векторным произведением радиус-вектора на силу.

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1)$$

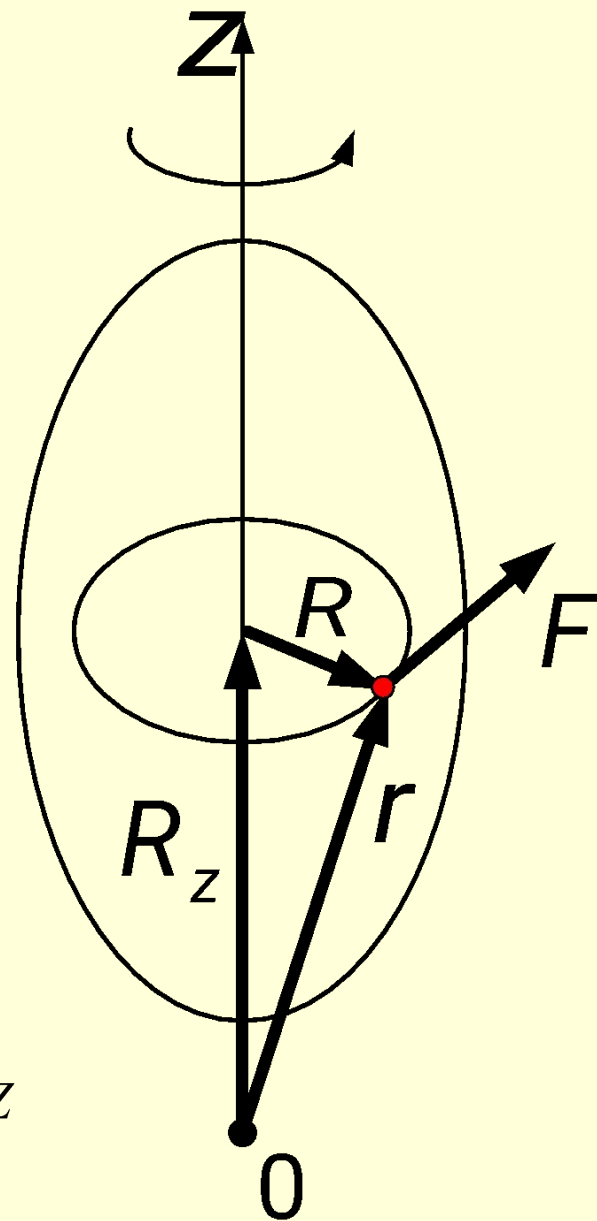
Направление определяется правилом буравчика. Момент силы относительно оси вращения - это скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора

$$M_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z \quad (2)$$

$$\overset{\curvearrowright}{M} = [\overset{\curvearrowright}{r}, \overset{\curvearrowright}{F}]$$

$$M_z = [\overset{\curvearrowright}{r}, \overset{\curvearrowright}{F}]_z$$

$$M_z = [\overset{\curvearrowright}{R}, \overset{\curvearrowright}{F}]_z + [\overset{\curvearrowright}{R}_z, \overset{\curvearrowright}{F}]_z = [\overset{\curvearrowright}{R}, \overset{\curvearrowright}{F}]_z$$



Разложим $\vec{r}$ на две составляющие.

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{R}_z \quad (3)$$

Подставив (3) в выражение (2), получим

$$M_z = [\vec{R}, \vec{F}]_z + [\vec{R}_z, \vec{F}]_z = [\vec{R}, \vec{F}]_z \quad (4)$$

т.к. второй член в выражении (4) равен нулю.

2. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА.

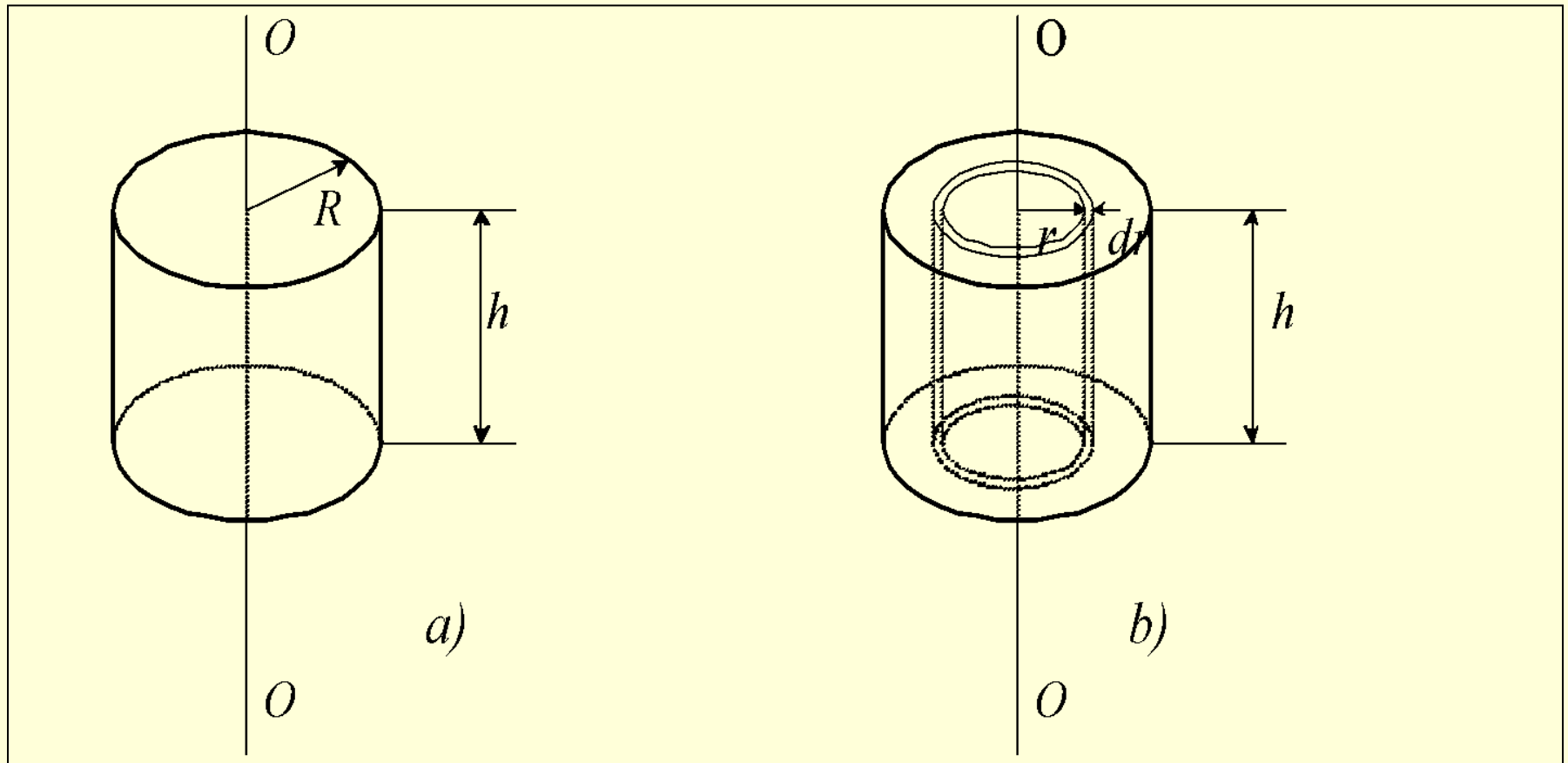
- Определение момента инерции элементарного объема относительно оси вращения:

$$I_i = m_i R_i^2 \quad (1)$$

- Так как абсолютно твердое тело недеформируемо, то момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции элементарных объемов:

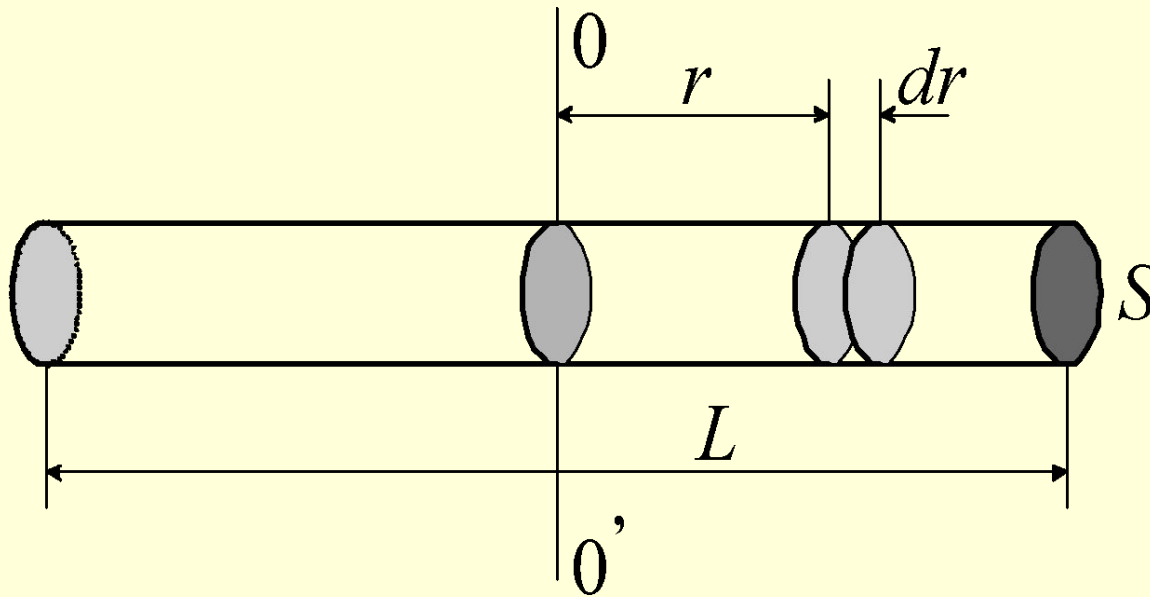
$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \quad (2)$$

Момент инерции цилиндра (диска)



$$J = \int_0^R \rho r^2 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} \quad J = \frac{mR^2}{2}$$

- Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс



$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \rho r^2 S dr = \rho S 2 \int_0^{\frac{L}{2}} r^2 dr = 2 \rho S \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{\rho S L^3}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} m l^2$$

Момент инерции тел относительно неподвижной оси, проходящей через центр симметрии. Тела считаются однородными.

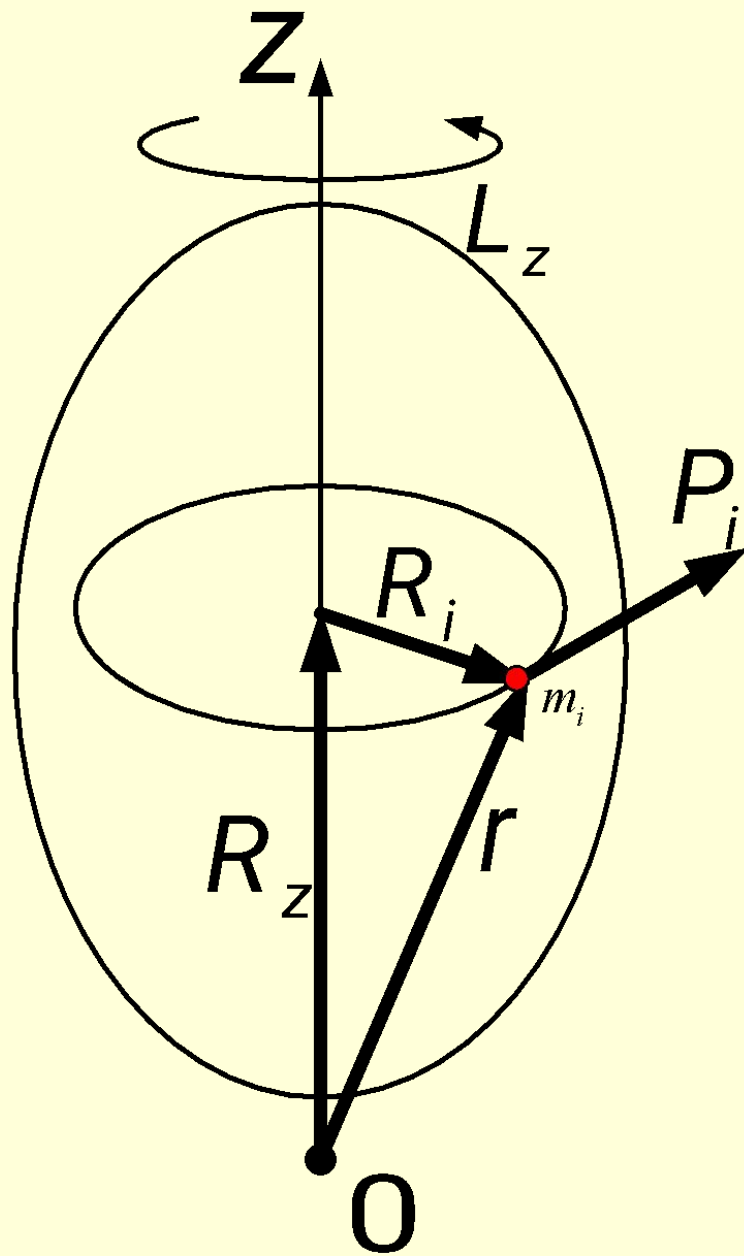
Тело	Момент инерции I
1.Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	mR^2
2. Сплошной цилиндр или диск радиуса R	$\frac{1}{2}mR^2$
3. Шар радиуса R	$\frac{2}{5}mR^2$
4.Прямой тонкий стержень длиной l . Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$

Момент импульса твердого тела

- Вначале определяем момент импульса элементарного объема относительно оси вращения:

$$L_{zi} = \left[\vec{R}_i, \vec{p}_i \right]_z \quad (3)$$

- где $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ – импульс элементарного объема.



- Затем, просуммировав по всем элементарным объемам, получим выражение для момента импульса твердого тела:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

- где I – момент инерции твердого тела.

- Для кинетической энергии вращательного движения твёрдого тела

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} \quad ; \quad E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} \quad (4)$$

- где I_c – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс;
- v_c – скорость центра масс тела.

Основное уравнение динамики вращательного

- Запишем второй закон Ньютона для каждого элементарного объема:

$$F_i = m_i a_{\tau i} \quad (1)$$

- где F_i – касательная составляющая силы,
- $a_{\tau i} = \beta R_i$ – тангенциальное ускорение.
- Подставим выражение для $a_{\tau i}$ в формулу (1) и умножим обе части полученного выражения на R_i .

Тогда:

$$F_i R_i = m_i R_i^2 \cdot \beta = I_i \beta \quad (2)$$

- Где $I_i = m_i R_i^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси вращения,
- $M_i = F_i R_i$ – момент силы относительно оси вращения.
- Момент M_i можно представить как сумму моментов всех внутренних и внешних сил, действующих на точку.
- Просуммировав выражение (2) по всем элементарным объемам получим основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\overline{M} = I \overline{\beta} \quad (3)$$

- Получим другую форму закона основного уравнения динамики, используя понятие момента импульса .
- Перепишем выражение (3):

$$M = I\beta = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = M \quad (4)$$

- *Формулировка: Производная момента импульса твердого тела по времени равна результирующему моменту всех внешних сил, вызывающих вращение тела.*

- *При $\vec{M} = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, т.е.*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const} \quad (5)$$

- *Это математическая запись закона сохранения момента импульса.*

- Формулировка: Момент импульса системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени, если сумма моментов сил, действующих на систему, равна нулю.
- Из закона следует, что так как сохраняется постоянным произведение $I\omega$, то увеличение момента инерции приводит к пропорциональному уменьшению частоты вращения и наоборот.

Таблица аналогий величин и законов поступательного и вращательного движения

• Поступательное

• Масса m

• Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

• Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

• Сила $\vec{F}$

• Импульс

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Вращательное

Момент инерции I

Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$

Угловое ускорение $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Момент силы $\vec{M}$

Момент импульса

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Второй закон Ньютона

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \end{aligned} \right\}$$

Основное уравнение динамики:

$$\left. \begin{aligned} \vec{M} &= I\vec{\beta} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M} \end{aligned} \right\}$$

Работа:

$$dA = F_s dS$$

$$dA = M d\varphi$$

Кинетическая энергия:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

ЗАДАЧА

- К ободу диска радиусом 0,2 м приложена постоянная касательная сила 98,1 Н. При вращении на диск действует момент сил трения, равный 0,5 Нм. Найти массу диска, если известно, что диск вращается с постоянным угловым ускорением 100 рад/с^2 .

Дано:

$$R = 2 \cdot 10^{-1} \text{ м}$$

$$F = 98,1 \text{ Н}$$

$$M_{\text{тр}} = 0,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$\beta = 10^2 \text{ рад/с}^2$$

$$m = ?$$

Решение

1. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела:

$$M = I \cdot \beta \quad (1)$$

$I = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции диска.

$$M = F(2)R - M_{\text{тр}}$$

M – результирующий момент всех внешних сил.
После подстановки (2) в (1) с учетом (1) получим

$$\frac{mR^2}{2} \cdot \beta = F \cdot R - M_{\text{тр}} \quad (3)$$

откуда

$$m = \frac{2(FR - M_{\text{тр}})}{\beta R^2}$$

Задача

- На скамье Жуковского стоит человек и держит в вытянутых руках гантели массой 6 кг каждая. Длина руки человека 60 см. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью 4 рад/с. С какой угловой скоростью будет вращаться скамья с человеком, если он опустит руки с гантелями вниз вдоль оси вращения? Суммарный момент инерции человека и скамьи $5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Гантели считать материальными точками.

Дано:

$$m_1 = 6 \text{ кг}$$

$$R = 0,6 \text{ м}$$

$$\omega_1 = 4 \text{ рад/с}^2$$

$$I_0 = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\omega_2 = ?$$

Решение

- Закон сохранения момента импульса

$$L = I\omega = \text{const}$$

$$(I_0 + 2m_1R^2) \cdot \omega_1 = I_0 \cdot \omega_2$$

- момент инерции гантели $I_1 = m_1R^2$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 \cdot \frac{I_0 + 2m_1R^2}{I_0} = \omega_1 \left(1 + \frac{2m_1R^2}{I_0}\right) = 4 \left(1 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 0,36}{5}\right) = \\ &= 4 \cdot 1,87 = 7,48 \text{ рад/с.}\end{aligned}$$