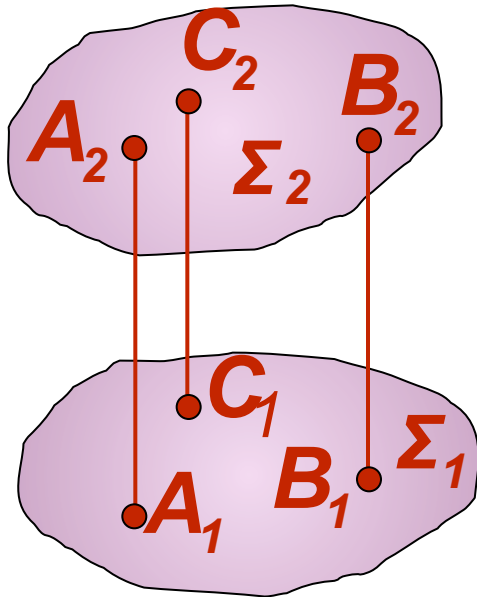


Проекции плоскости

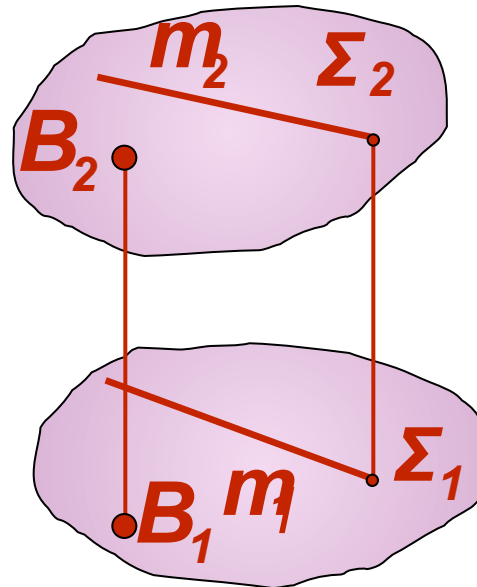
Способы задания плоскости

1



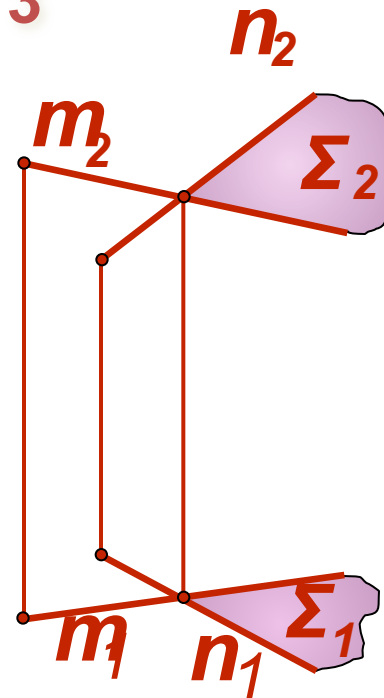
$\Sigma(A, B, C)$

2



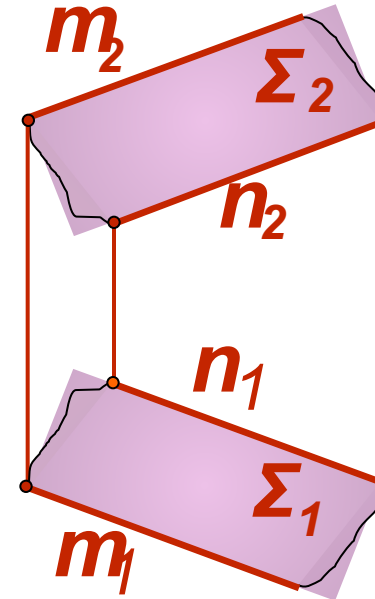
$\Sigma(B, m)$

3



$\Sigma(n \cap m)$

4

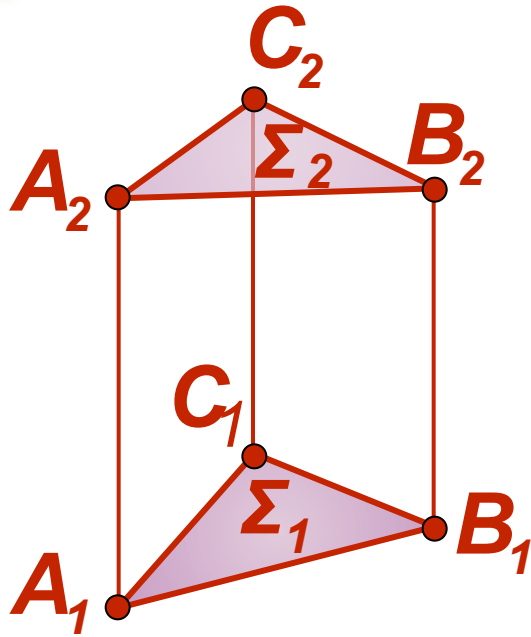


$\Sigma(n \parallel m)$

На комплексном чертеже плоскость Σ можно задать: 1) проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой; 2) проекциями прямой и точки, взятой вне этой прямой; 3) проекциями двух пересекающихся прямых; 4) проекциями двух параллельных прямых;

Способы задания плоскости

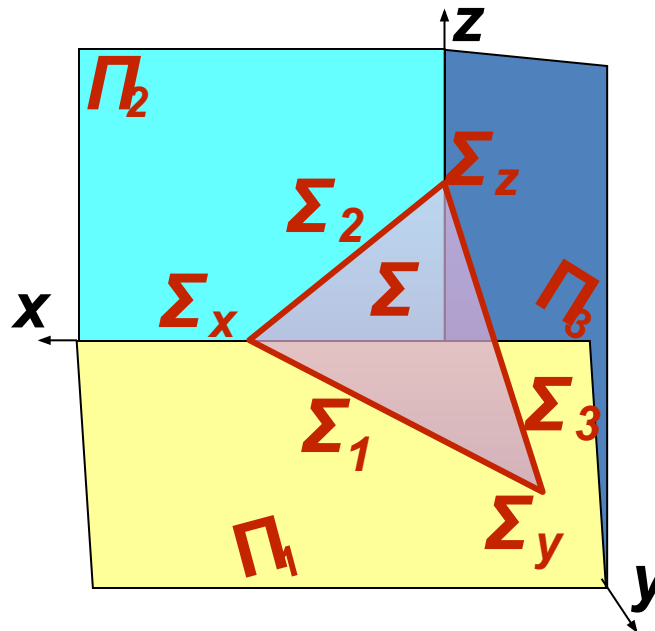
5



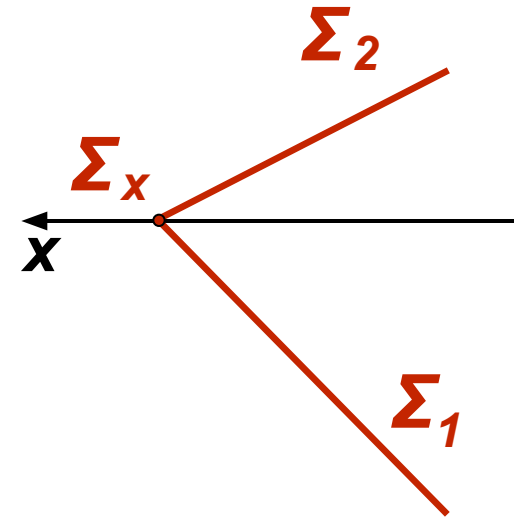
Σ
(ΔABC)

6

След плоскости – это линия ее пересечения с соответствующей плоскостью проекций



Σ_1 - горизонтальный след
 Σ_2 - фронтальный след
 Σ_3 - профильный след
 $\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z$ - точки схода следов



$\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$

5) проекциями плоской фигурой; 6) следами плоскости. Все способы позволяют выделить из множества точек пространства точки, принадлежащие данной плоскости. Способ задания плоскости указывают в круглых скобках

Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Плоскость **общего положения** наклонена ко всем плоскостям проекций

Плоскость **частного положения** перпендикулярна или параллельна одной из плоскостей проекций

Плоскость, **перпендикулярная** одной из плоскостей проекций, называется **проецирующей плоскостью**:

Горизонтально проецирующая плоскость $\perp P_1$

Фронтально проецирующая плоскость $\perp P_2$

Профильно проецирующая плоскость $\perp P_3$

Плоскость, **параллельная** плоскости проекций, называется **плоскостью уровня** (дважды проецирующей):

Горизонтальная плоскость $\parallel P_1$

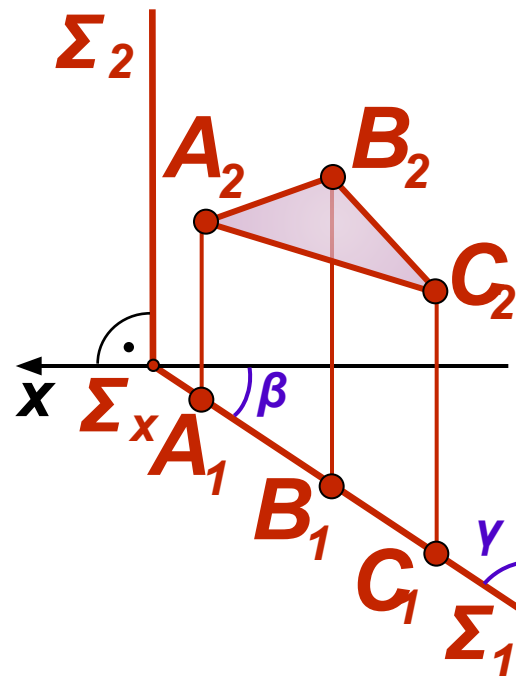
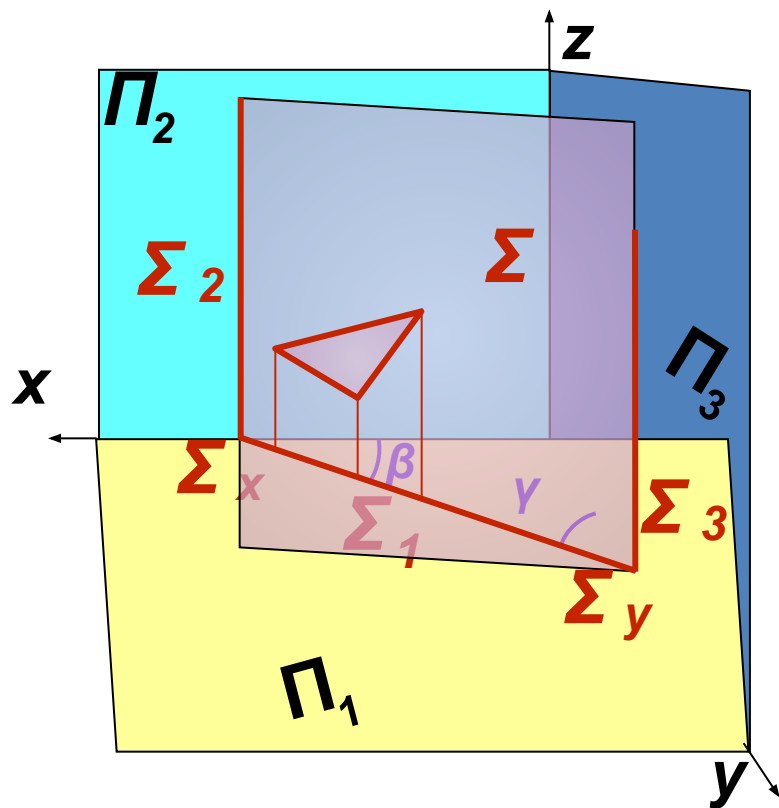
Фронтальная плоскость $\parallel P_2$

Профильная плоскость $\parallel P_3$

Горизонтально проецирующая плоскость ($\perp \Pi_1$)

Пространственная картина

Комплексный чертеж

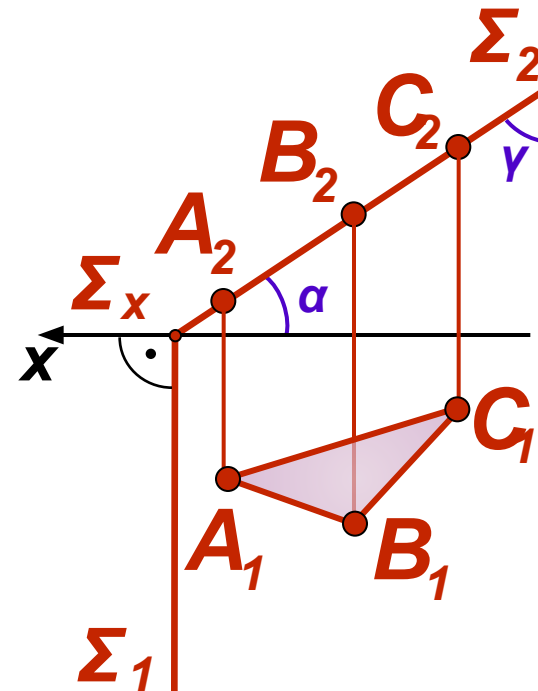
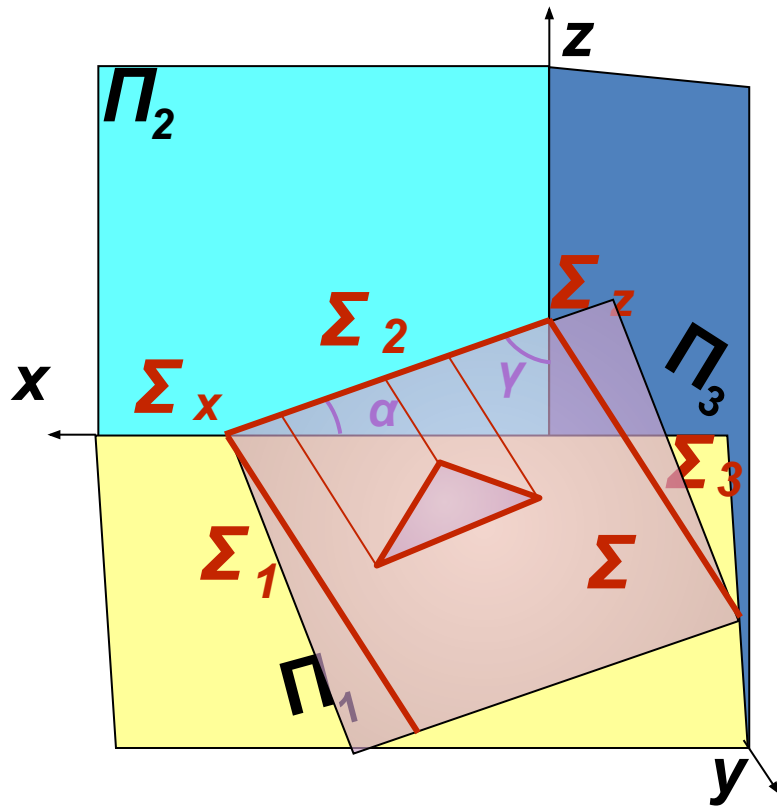


Горизонтальная проекция плоскости Σ вырождается в прямую (след), на Π_1 проекции трех произвольных точек плоскости лежат на горизонтальном следе плоскости Σ_1 . Углы наклона данной плоскости Σ к фронтальной (β) и профильной (γ) плоскостям проекций на Π_1 не искажаются

Фронтально проецирующая плоскость ($\perp \Pi_2$)

Пространственная картина

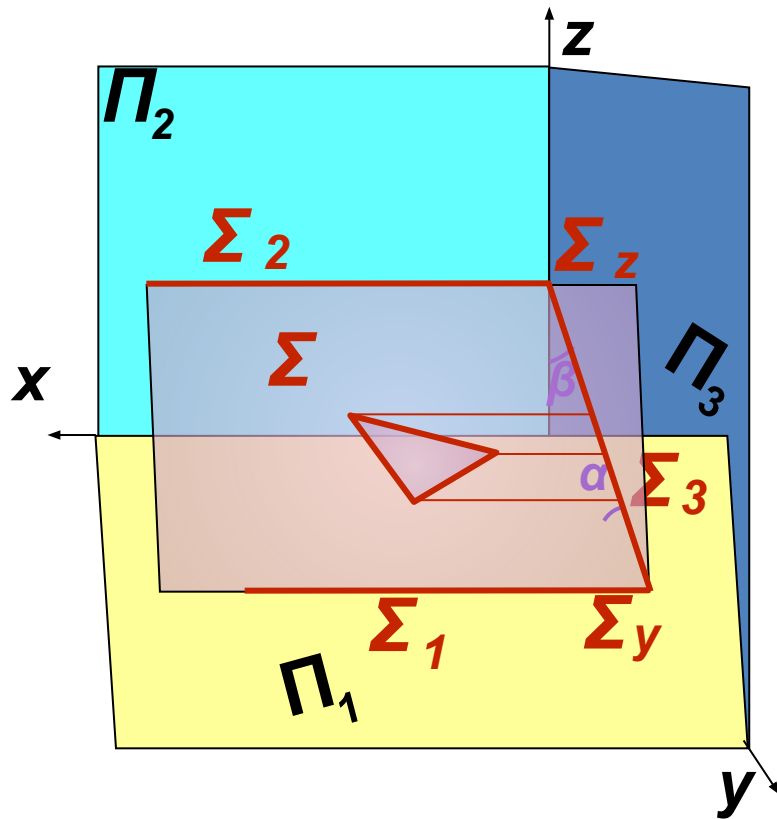
Комплексный чертеж



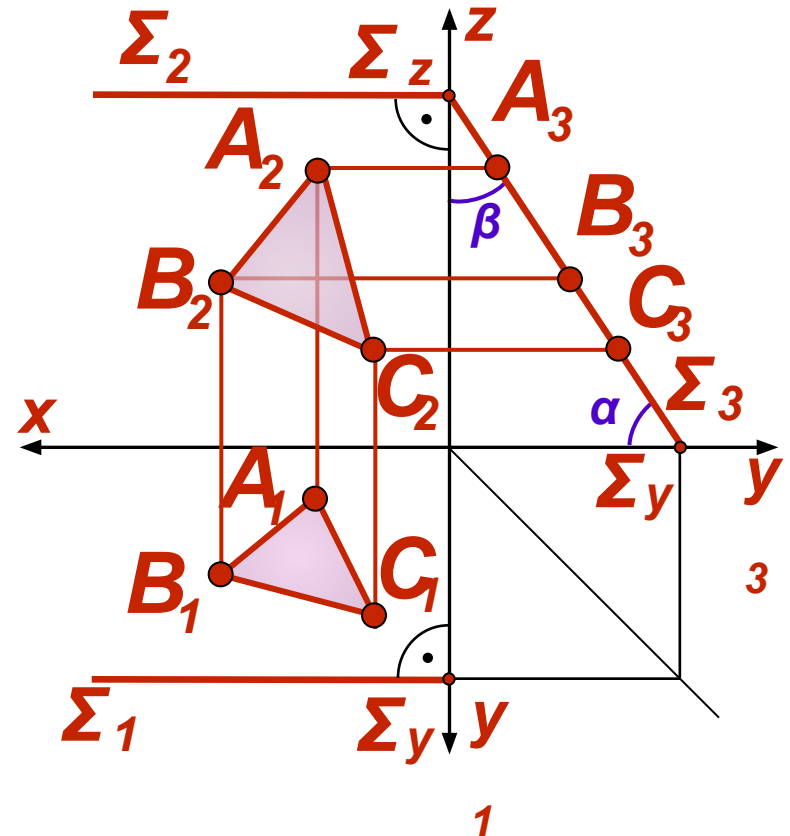
Фронтальная проекция плоскости Σ вырождается в прямую (след). На Π_2 проекции трех произвольных точек плоскости лежат на фронтальном следе плоскости Σ_2 . Углы наклона данной плоскости Σ к горизонтальной (α) и профильной (γ) плоскостям проекций на Π_2 не искажаются

Профильно проецирующая плоскость ($\perp \Pi_3$)

Пространственная картина



Комплексный чертеж

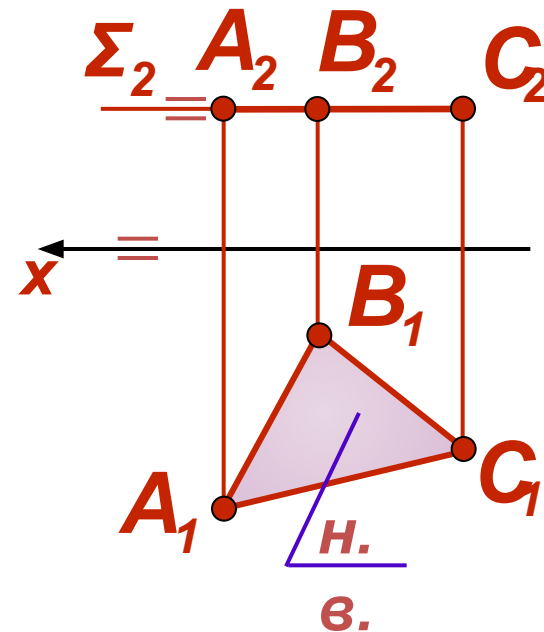
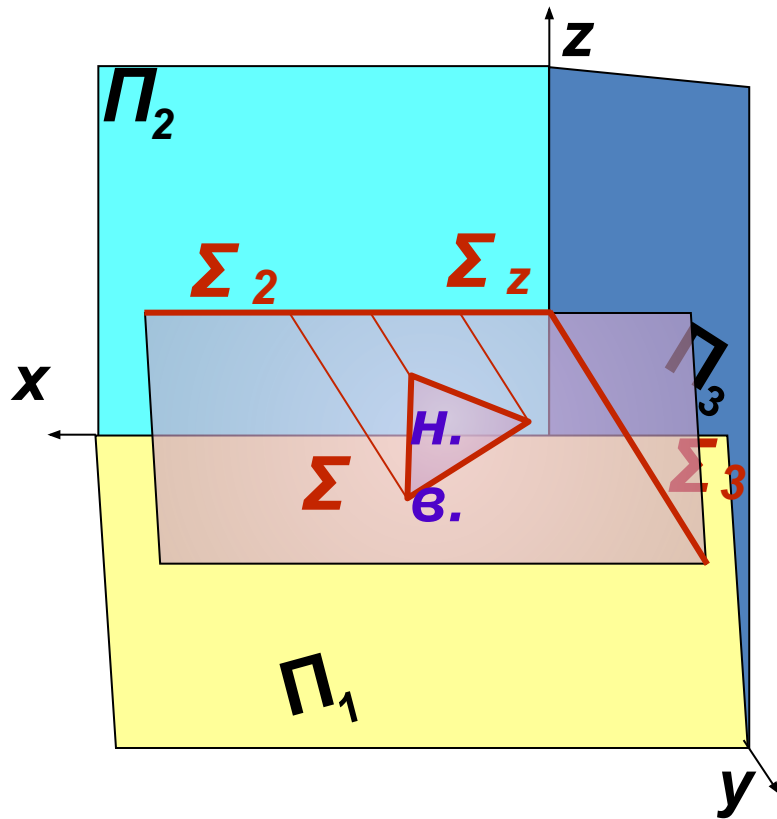


Профильная проекция плоскости Σ вырождается в прямую (след). На Π_3 проекции трех произвольных точек плоскости лежат на профильном следе плоскости Σ_3 . Углы наклона данной плоскости Σ к горизонтальной (α) и фронтальной (β) плоскостям проекций на Π_3 не искажаются

Горизонтальная плоскость уровня ($\parallel \Pi_1$)

Пространственная картина

Комплексный чертеж

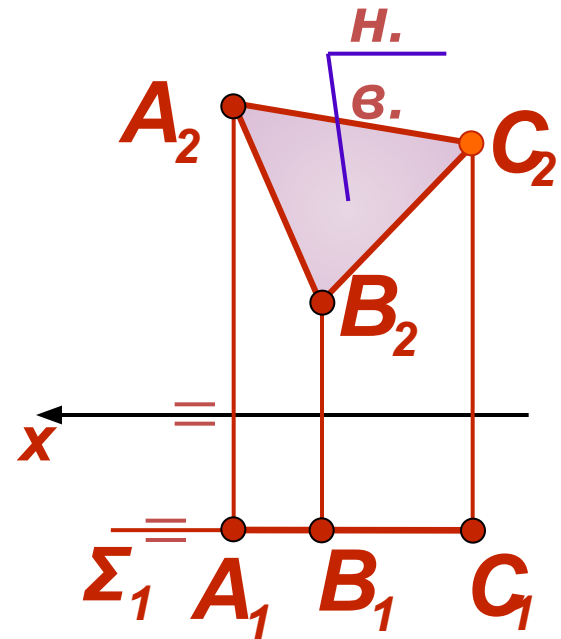
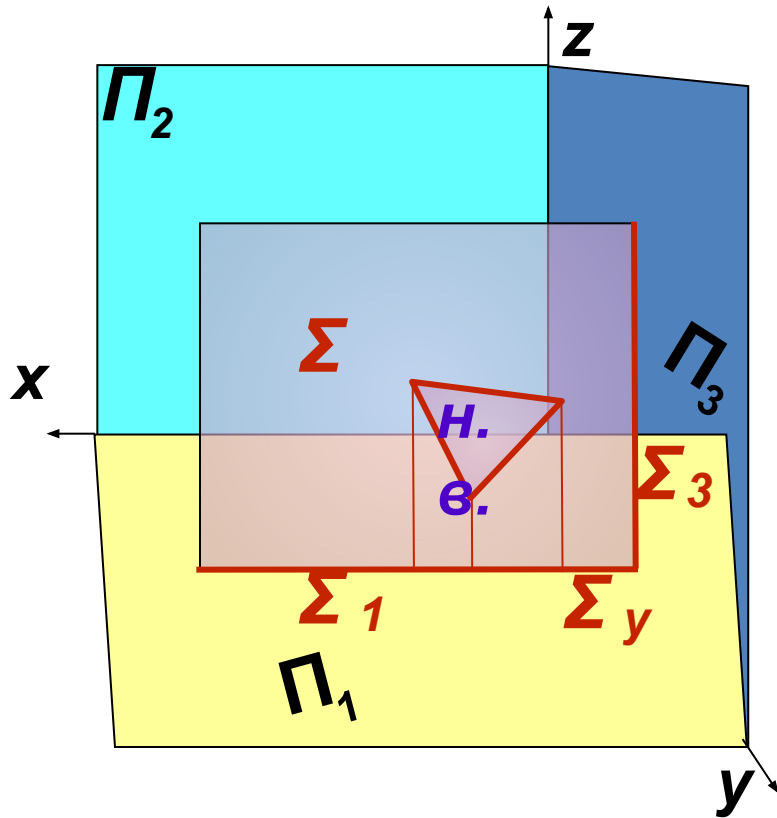


В силу параллельности следы (фронтальный Σ_2 и профильный Σ_3) плоскости Σ будут параллельны соответствующим осям координат. Фигура, задающая плоскость Σ , проецируется в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций

Фронтальная плоскость уровня ($\parallel P_2$)

Пространственная картина

Комплексный чертеж

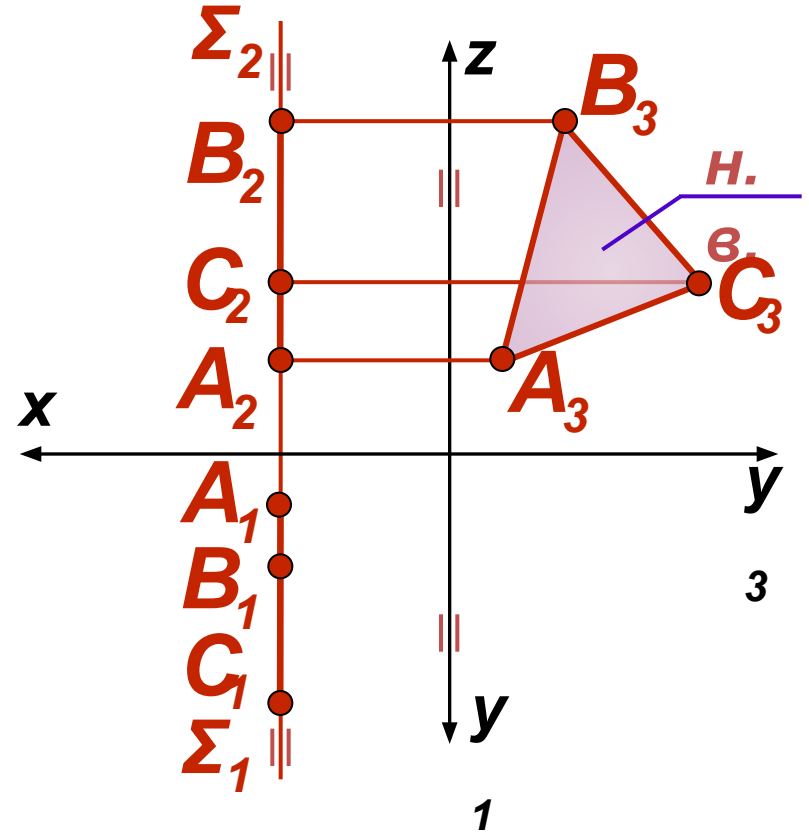
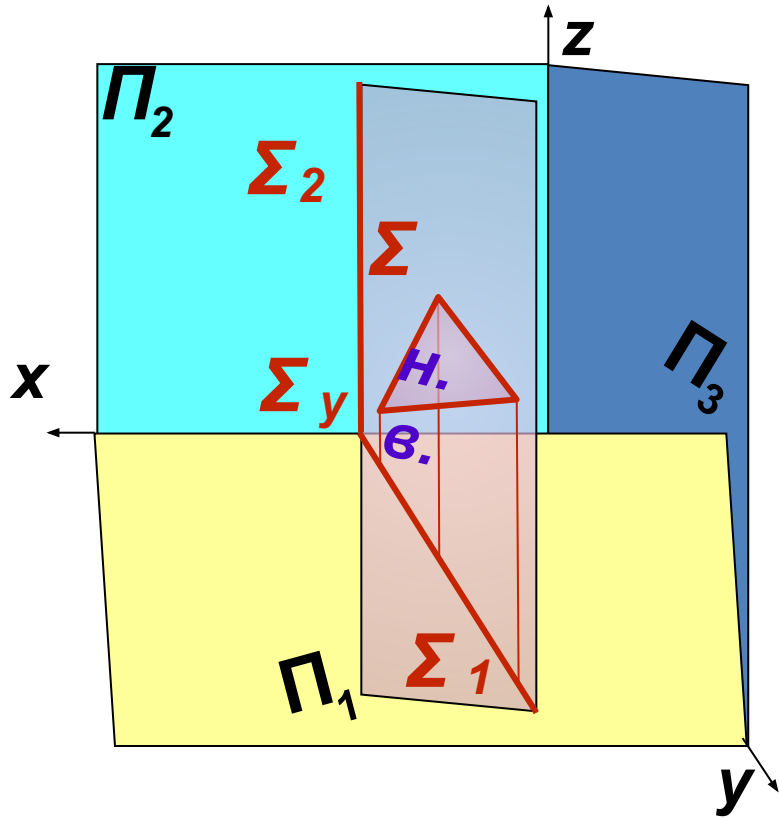


В силу параллельности следы (горизонтальный Σ_1 и профильный Σ_3) плоскости Σ будут параллельны соответствующим осям координат. Фигура, задающая плоскость Σ , изображается в натуральную величину на фронтальной плоскости проекций

Профильная плоскость уровня (||P₃)

Пространственная картина

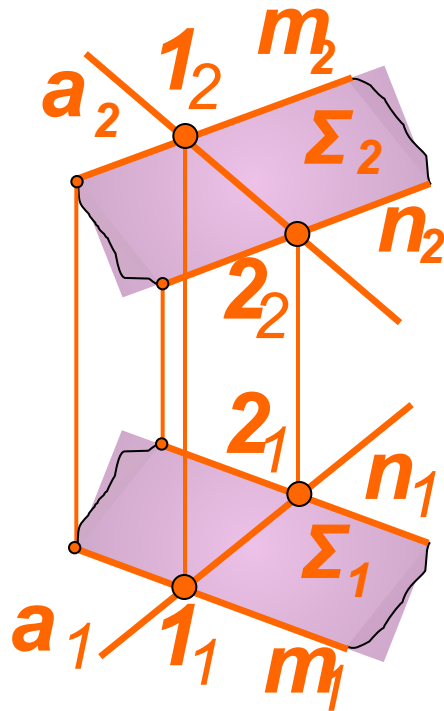
Комплексный чертеж



В силу параллельности следы (горизонтальный Σ_1 и фронтальный Σ_2) плоскости Σ будут параллельны соответствующим осям координат. Фигура, задающая плоскость Σ , проецируется в натуральную величину на профильную плоскость проекций

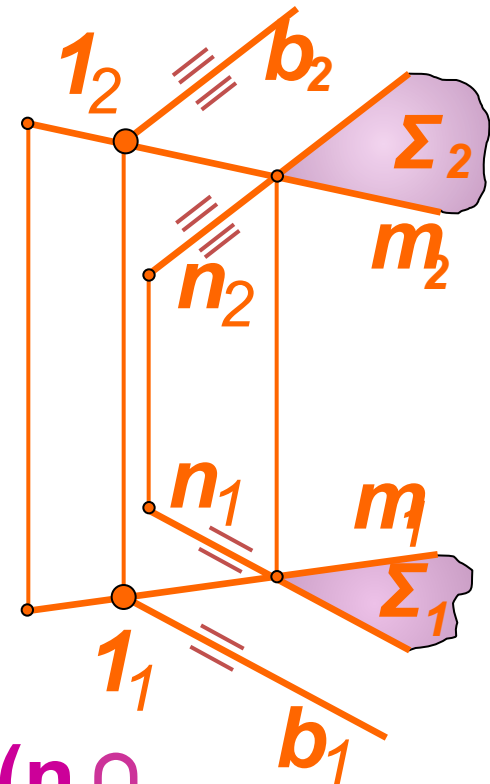
Принадлежность прямой плоскости

1



$\Sigma(n \parallel$
 $(1) \in m) \in \Sigma;$
 $(2 \in (1) \vee 2 \in \Sigma) \Rightarrow$

2

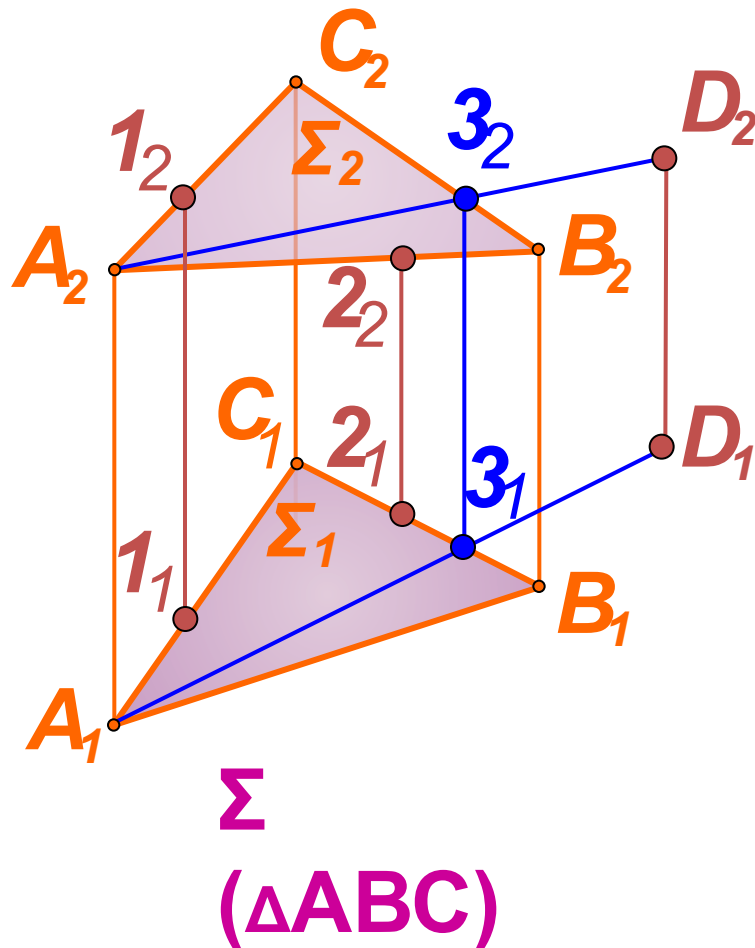


$\Sigma(n \cap$
 $(1) \in m) \in \Sigma;$
 $b \parallel b \Rightarrow$

Прямая принадлежит плоскости, если она принадлежит:

- 1) через две точки этой плоскости;
- 2) через одну точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости

Принадлежность точки плоскости



1 $1, 2 \in \Sigma$ - ?

$(1 \in AC)$

~~$2 \in \Sigma$~~

2 D_2 - ?, если $D \in \Sigma$

$\Pi_1: (D_1 \text{ и } A_1) \cap C_1 B_1$

$\Pi_2: 3_2 \in C_2 B_2$

$A_2 \text{ и } 3_2$

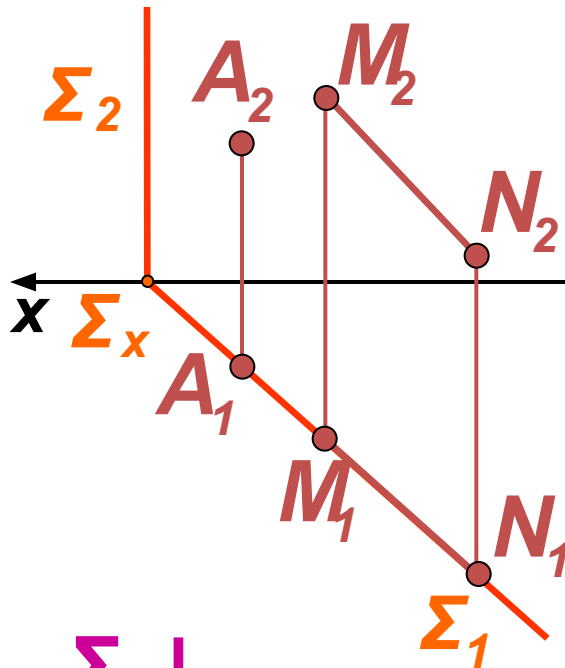
$D_2 \in A_2 3_2$

Точка будет лежать в плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой этой плоскости. Воспользуемся этим положением:

1) при чтении чертежа;

2) при построении точки, лежащей в данной плоскости

Принадлежность прямой и точки плоскости

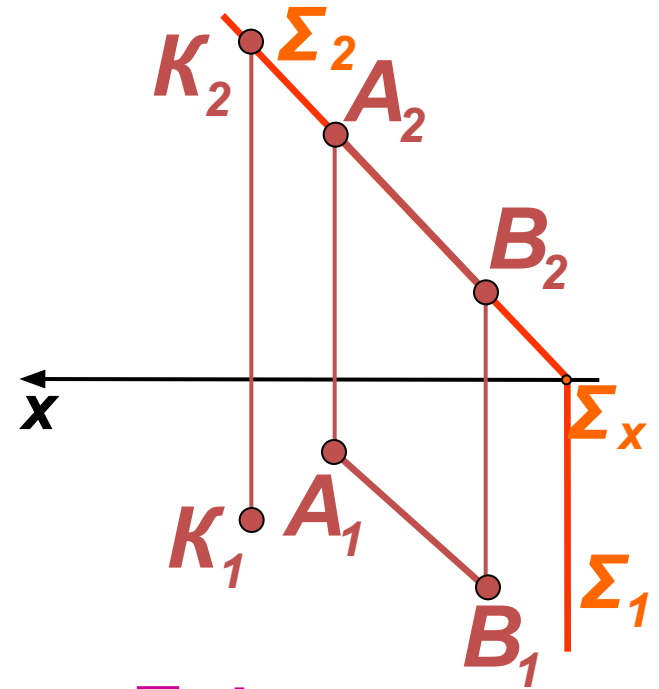


$\Sigma \perp$

$A_1 \in \Sigma_1 \Rightarrow A \in \Sigma$

$M_1, N_1 \in \Sigma_1 \Rightarrow$

$\Sigma_1 \quad MN \in \Sigma$



$\Sigma \perp$

$K_2 \in \Sigma_2 \Rightarrow K \in \Sigma$

$A_2, B_2 \in \Sigma_2 \Rightarrow$

$\Sigma_2 \quad AB \in \Sigma$

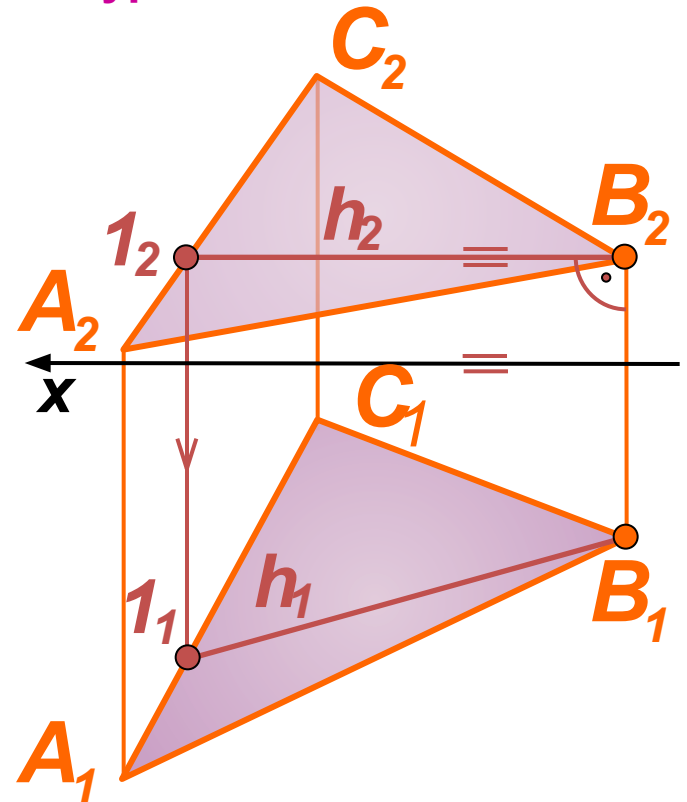
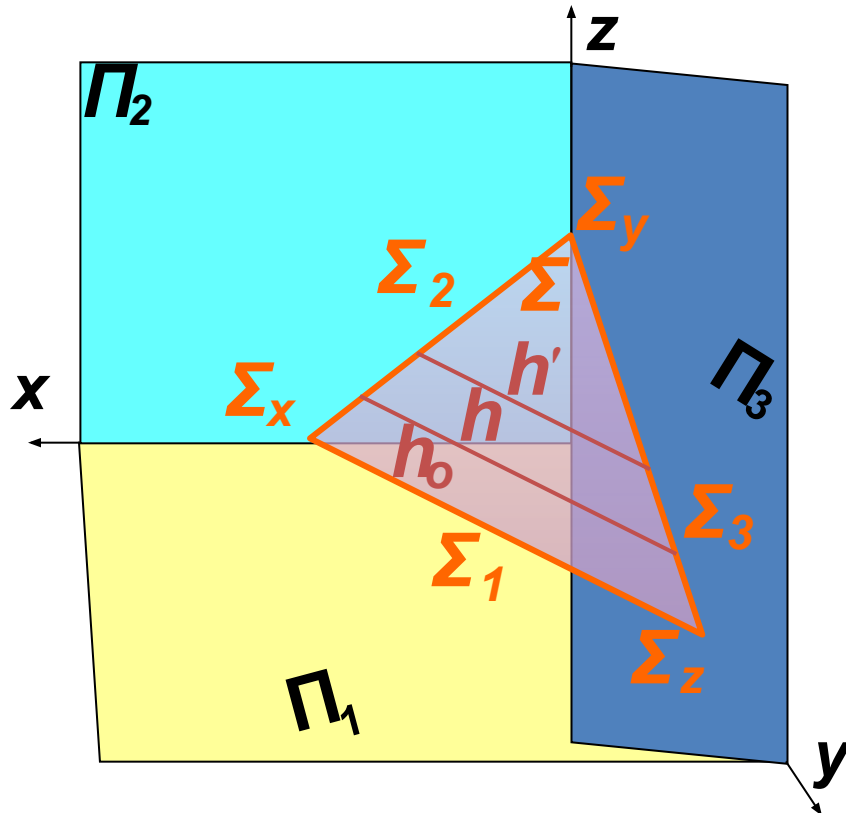
Если плоскость занимает проецирующее положение, то соответствующие проекции всех точек и прямых данной плоскости совпадают с ее следом.

Это собирательное свойство проецирующих плоскостей

Главные линии плоскости

Горизонталей плоскости бесчисленное множество,
все они параллельны между собой

Горизонтальный след – это горизонталь нулевого уровня



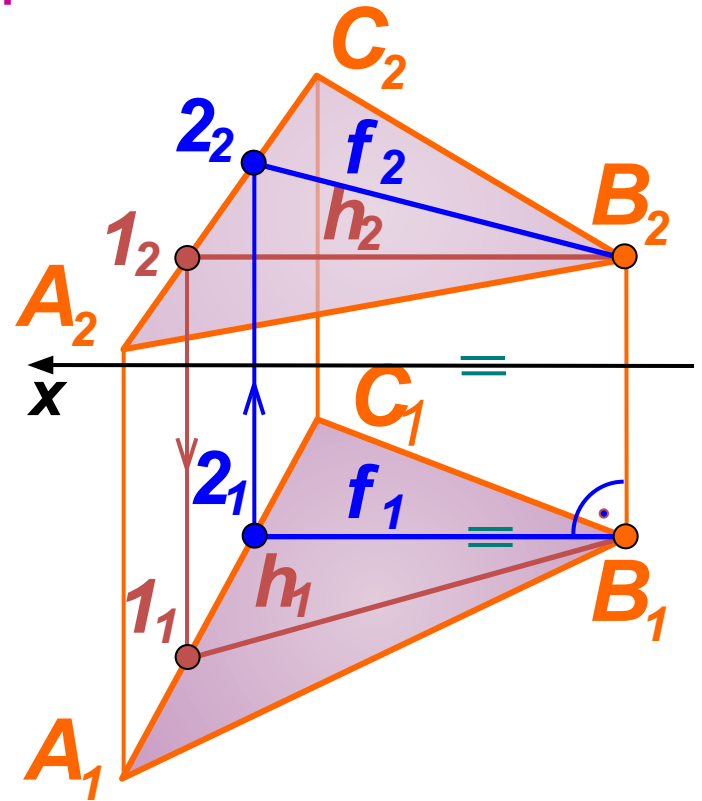
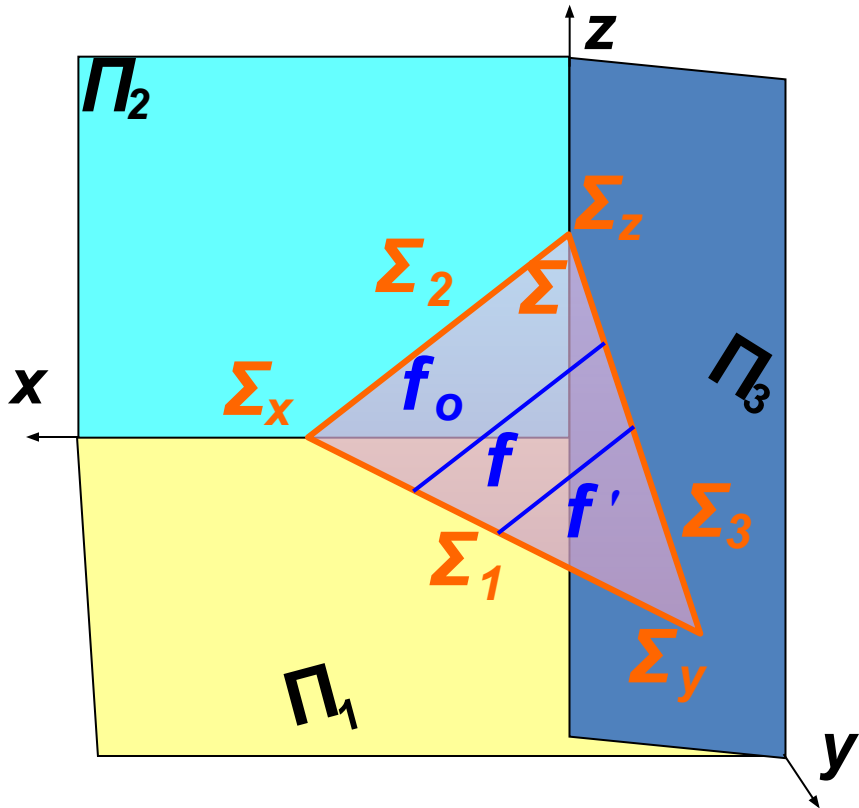
Горизонталь плоскости – это прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x . Положение горизонтали в плоскости определяют две точки (например, B и 1)

Главные линии плоскости

Фронталей плоскости бесчисленное множество,

все они параллельны между собой

Фронтальный след – это фронталь нулевого уровня

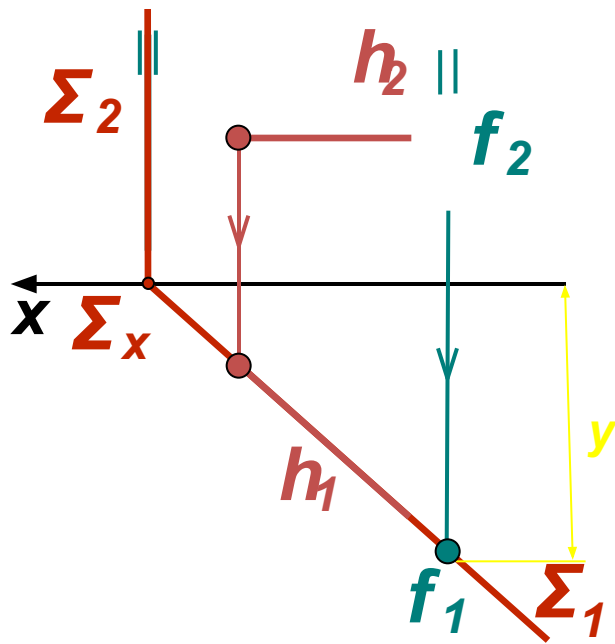


Фронталь плоскости – это прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.

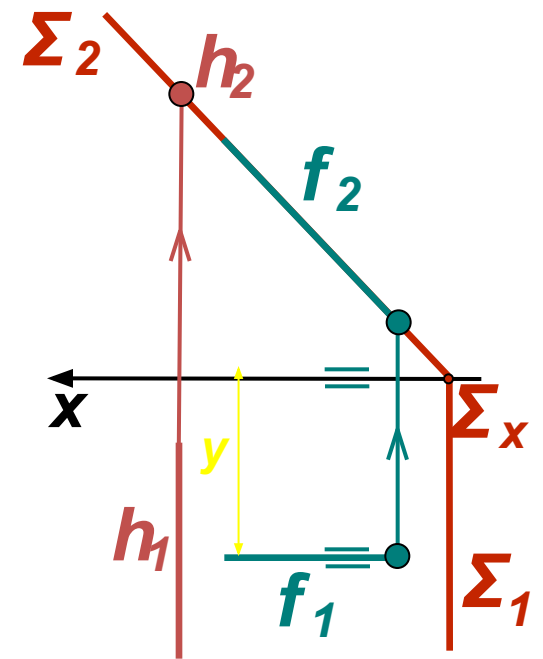
Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси X . Положение фронтали в плоскости определяют две точки (например, B и 2)

Главные линии плоскости

В проецирующих плоскостях одна из линий уровня является проецирующей прямой



$\Sigma \perp \Pi$

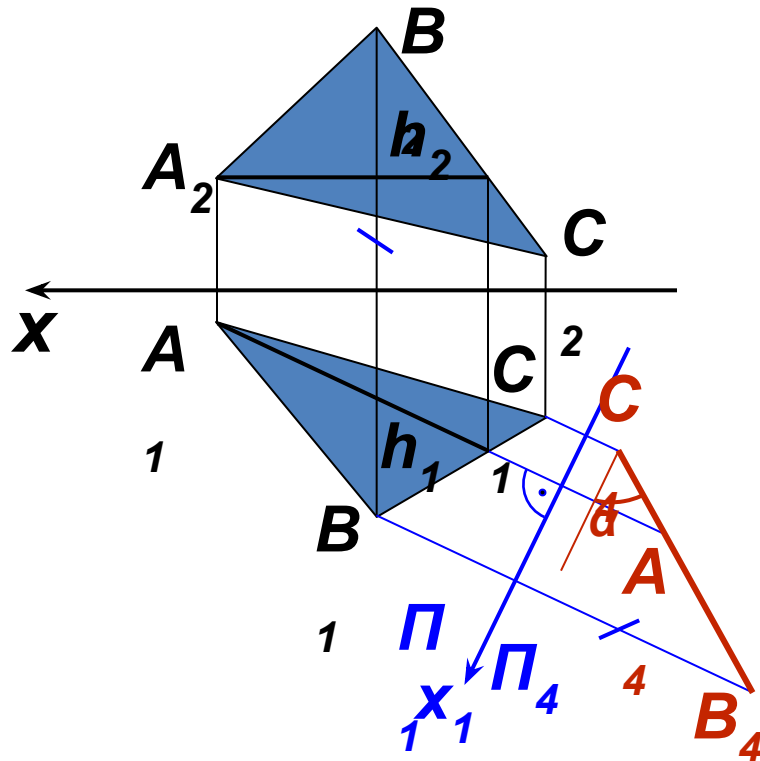


$\Sigma \perp \Pi_2$

Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси x . Фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу плоскости или ему принадлежит. Координата y показывает расстояние от фронтали данной плоскости до фронтальной плоскости проекций

Метрические задачи

Задача 1. Определить натуральную величину треугольника Σ ($\triangle ABC$) и угол наклона его к плоскости Π_1 способом перемены плоскостей проекций

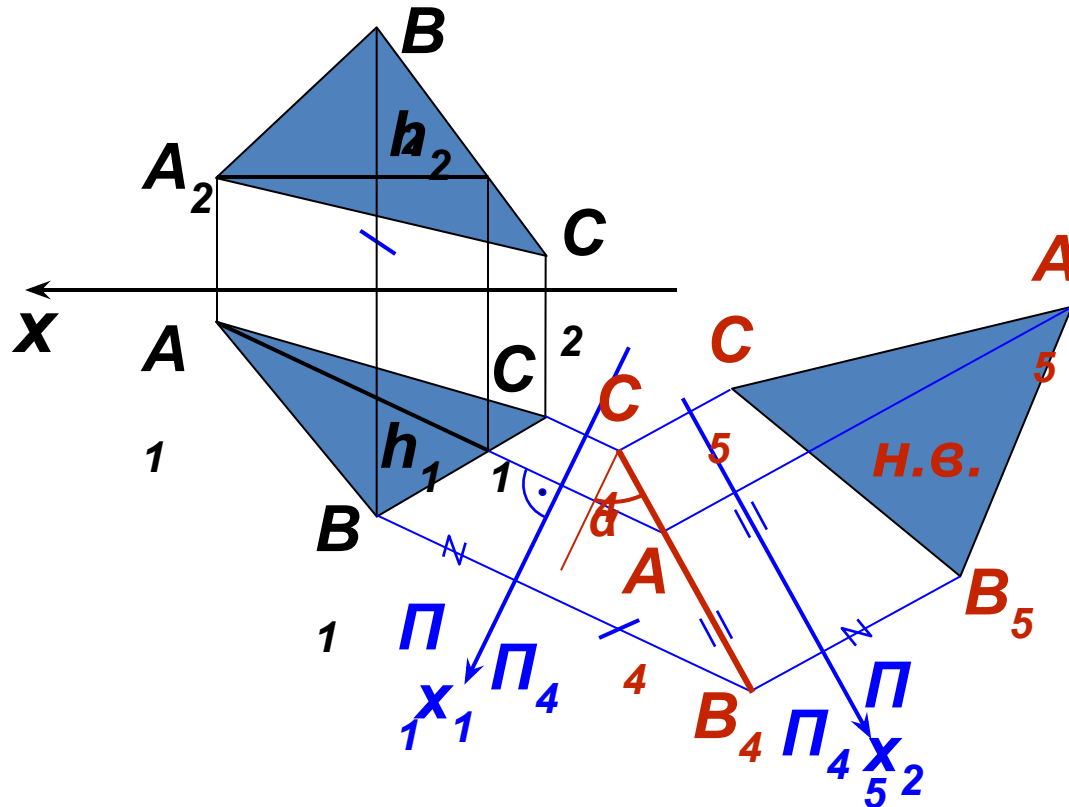


$$\begin{aligned} 1. \quad & \Pi_4 \perp \Pi_1 \\ & \Pi_4 \perp h \in \Sigma \\ & (\triangle ABC) \end{aligned}$$

При первом преобразовании выбираем новую плоскость проекций Π_4 перпендикулярно горизонтали плоскости h так, чтобы она заняла проецирующее положение. На Π_4 получаем вырожденную проекцию плоскости (прямую) и ее угол наклона α к плоскости проекций Π_1 .

Метрические задачи

Задача 1. Определить натуральную величину треугольника Σ ($\triangle ABC$) и угол наклона его к плоскости Π_1 способом перемены плоскостей проекций

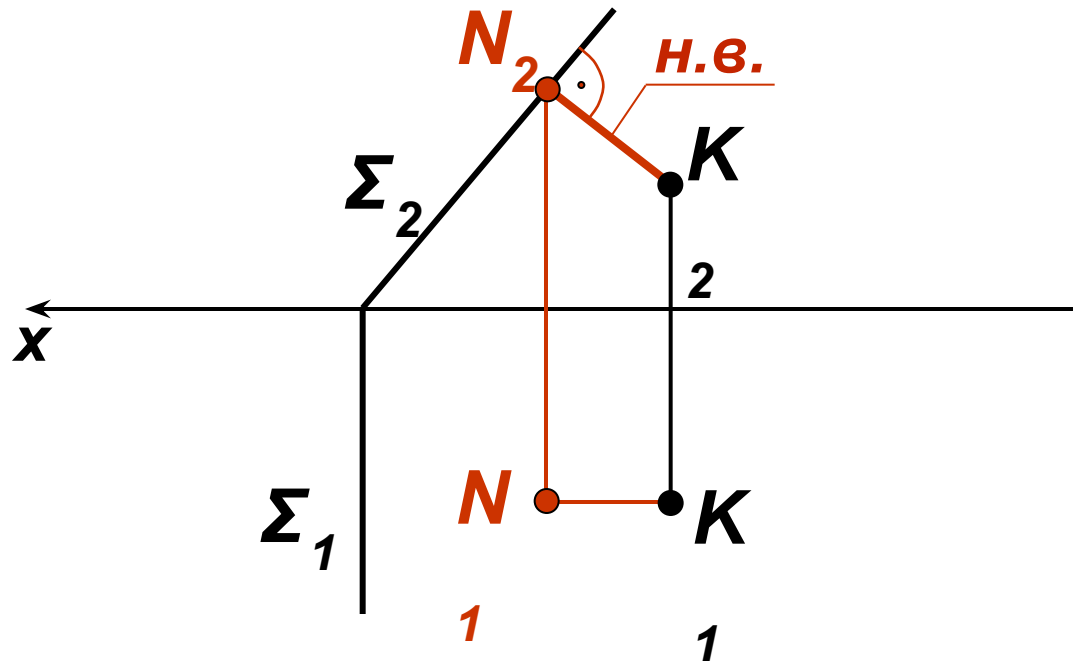


1. $\Pi_4 \perp \Pi_1$
 $\Pi_4 \perp h \in \Sigma$
 $(\triangle ABC)$
2. $\Pi_5 \perp \Pi_4$
 $\Pi_5 \parallel \Sigma(\triangle ABC)$

При втором преобразовании выбираем новую плоскость проекций Π_5 так, чтобы плоскость заняла положение плоскости уровня. На Π_5 строим натуральную величину треугольника

Метрические задачи

Задача 2. Определить расстояние от точки K до плоскости частного положения $\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$

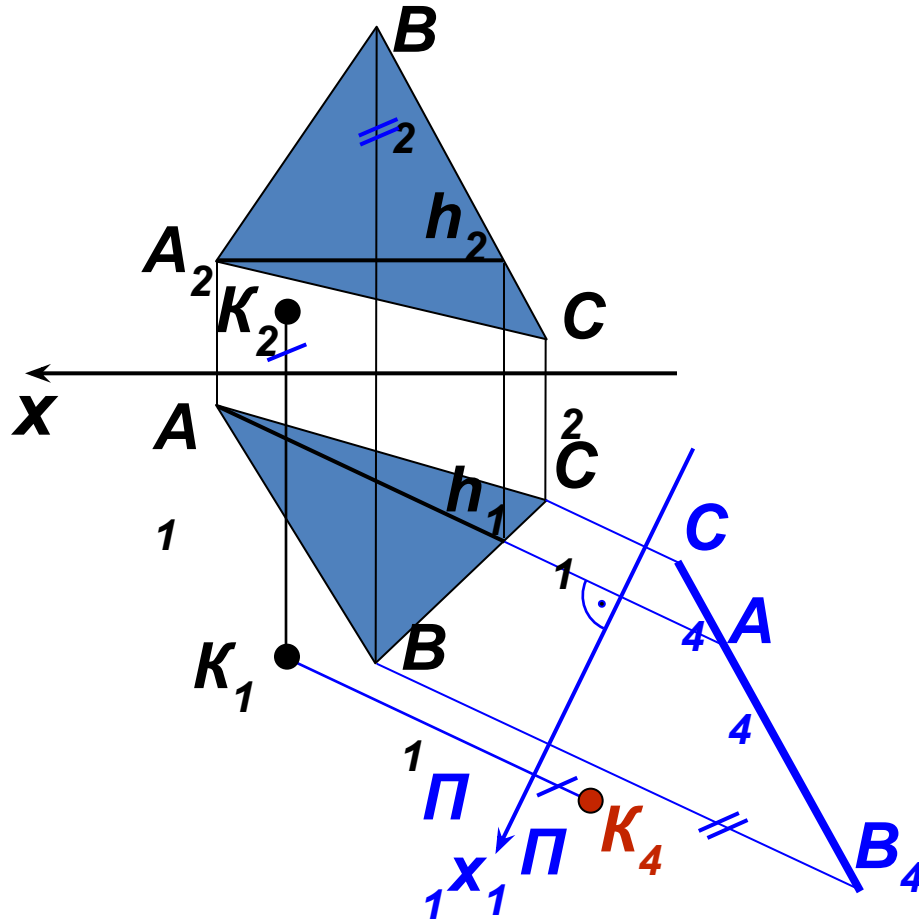


**KN -
искомое
расстоян
ие**

Проекции искомого расстояния будут перпендикулярны следам данной плоскости. В силу этого $N_2 K_2$ есть натуральная величина расстояния. Перпендикуляр NK проходит под плоскостью Σ , поэтому его горизонтальная проекция невидима

Метрические задачи

Задача 3. Определить расстояние от точки K до плоскости треугольника $\Sigma(\triangle ABC)$

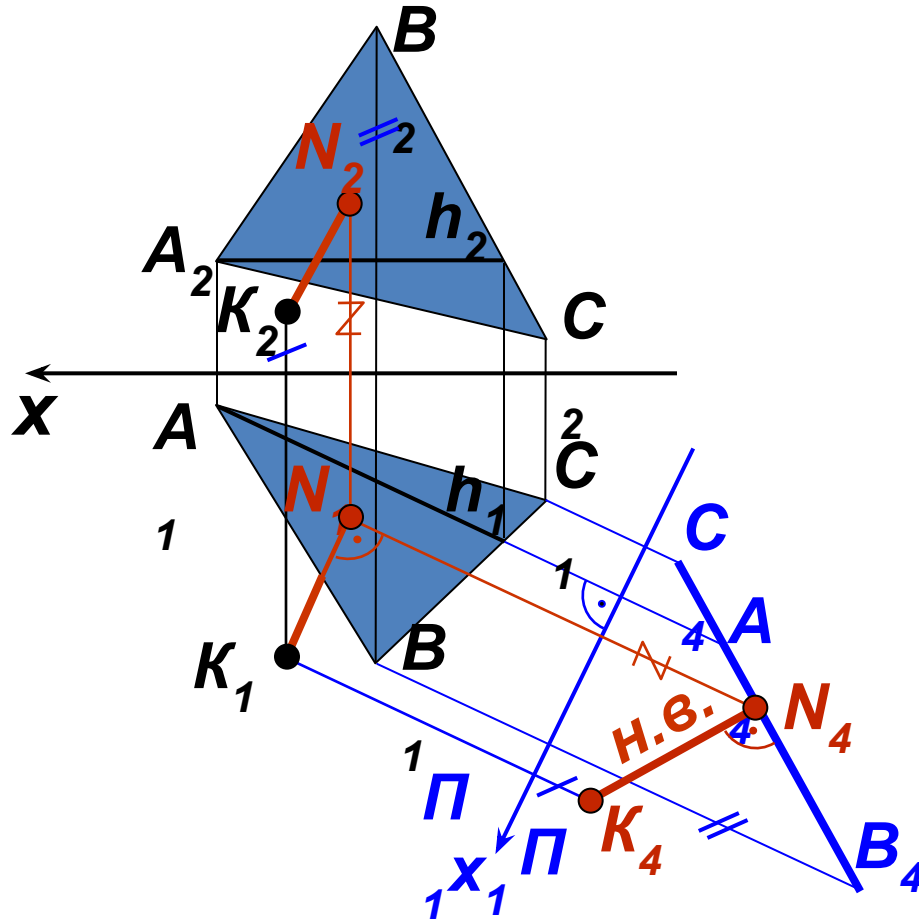


$$\begin{aligned} 1. \quad & \Pi_4 \perp \Pi_1 \\ & \Pi_4 \perp h \in \Sigma \\ & (\triangle ABC) \end{aligned}$$

Выбираем новую плоскость проекций Π_4 перпендикулярно горизонтали плоскости h так, чтобы она заняла проецирующее положение. На Π_4 получаем вырожденную проекцию плоскости (прямую) и проекцию точки K_4 .

Метрические задачи

Задача 3. Определить расстояние от точки K до плоскости треугольника $\Sigma(\triangle ABC)$



1. $\Pi_4 \perp \Pi_1$
 $\Pi_4 \perp h \in \Sigma$
 $(\triangle ABC)$
2. KN -
 искомый
 отрезок

Построение перпендикуляра начинают с плоскости проекций Π_4 (см. зад.12), затем строят его проекции на плоскостях Π_1 и Π_2 . На плоскости проекций Π_4 изобразится натуральная величина расстояния от точки K до плоскости треугольника. Определяют видимость перпендикуляра.

***Взаимное положение прямой и
плоскости, двух плоскостей.
Позиционные задачи***

Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

Прямая и плоскость:

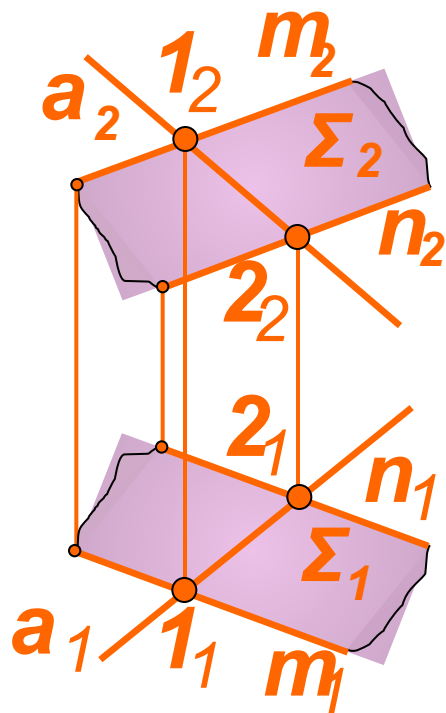
- Прямая **принадлежит** плоскости (см. тема 3): *все точки прямой являются точками плоскости*
- Прямая **параллельна** плоскости: *общих точек нет*
- Прямая **пересекает** плоскость: *одна общая точка*

Две плоскости:

- Плоскости **параллельны**: *общих прямых нет*
- Плоскости **пересекаются**: *одна общая прямая*

Принадлежность прямой плоскости

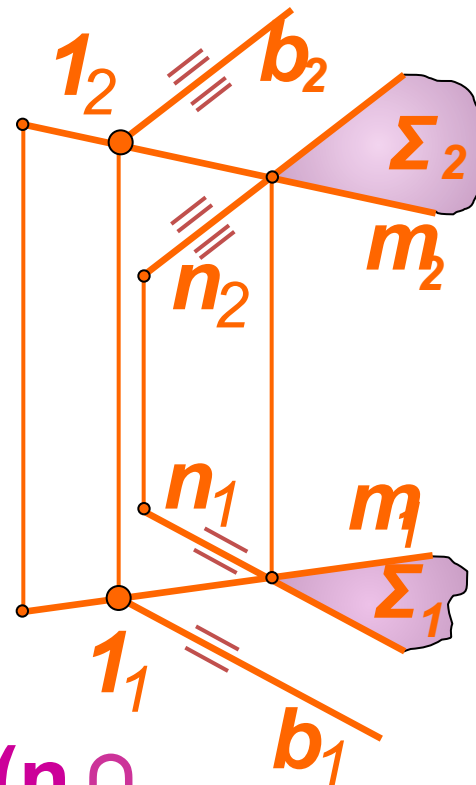
1



$\Sigma(n \parallel$
 $(1) \in m) \in \Sigma;$
 $(2 \in (1) \vee 2 \in \Sigma) \Rightarrow$

$a \in \Sigma$

2



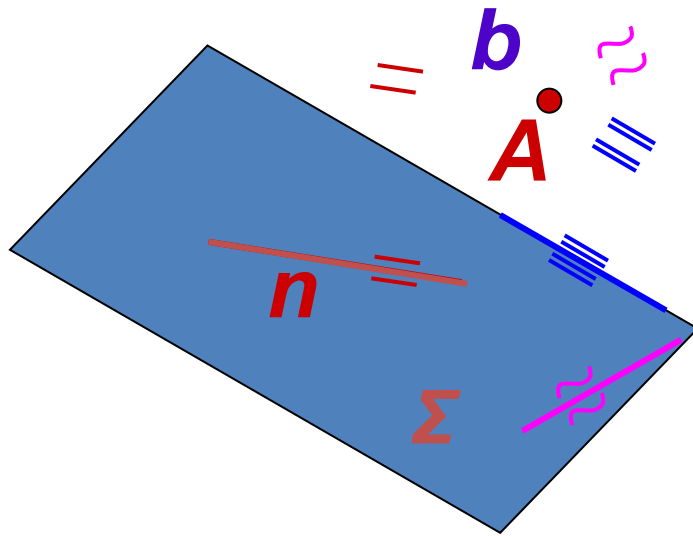
$\Sigma(n \cap$
 $(1) \in m) \in \Sigma;$
 $b \parallel m \Rightarrow$

$b \in \Sigma$

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит:

- 1) через две точки этой плоскости;
- 2) через одну точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой этой плоскости

Параллельность прямой и плоскости



$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$

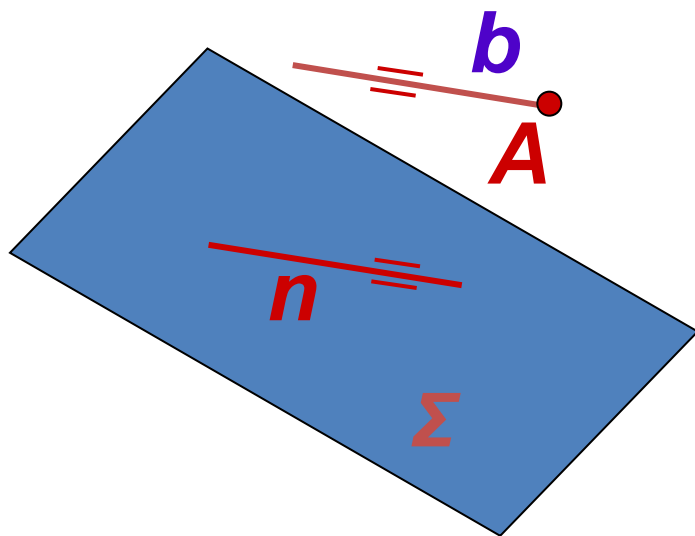
Признак параллельности:

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

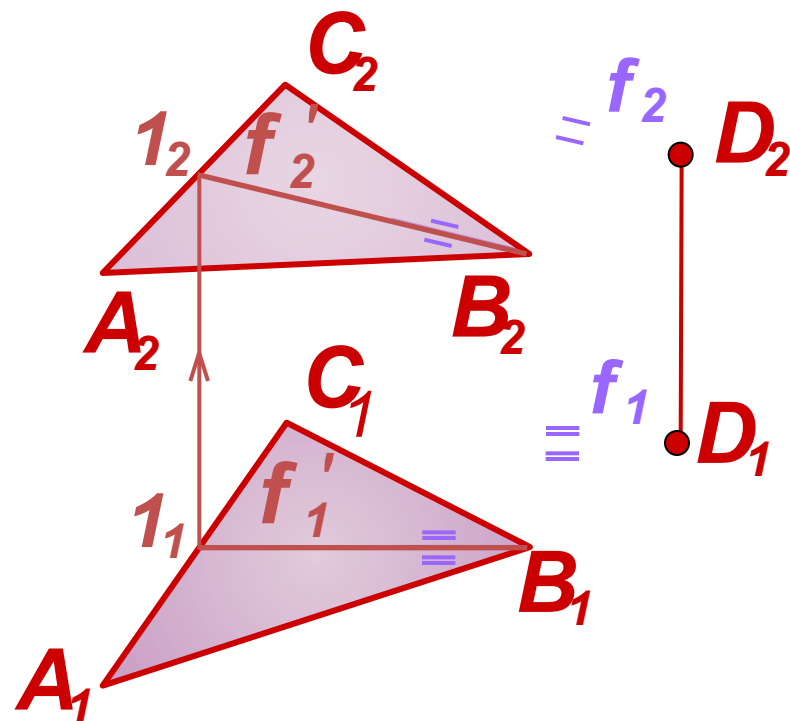
Через точку A в пространстве можно провести бесчисленное множество прямых линий, параллельных данной плоскости Σ . Для однозначного решения проведем в плоскости прямую n

Параллельность прямой и плоскости

Задача: Через точку D провести фронталь, параллельную плоскости $\Sigma(\triangle ABC)$

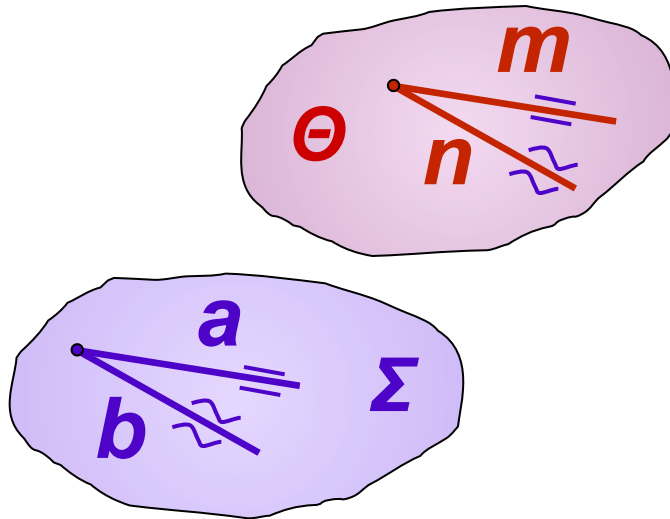


$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$

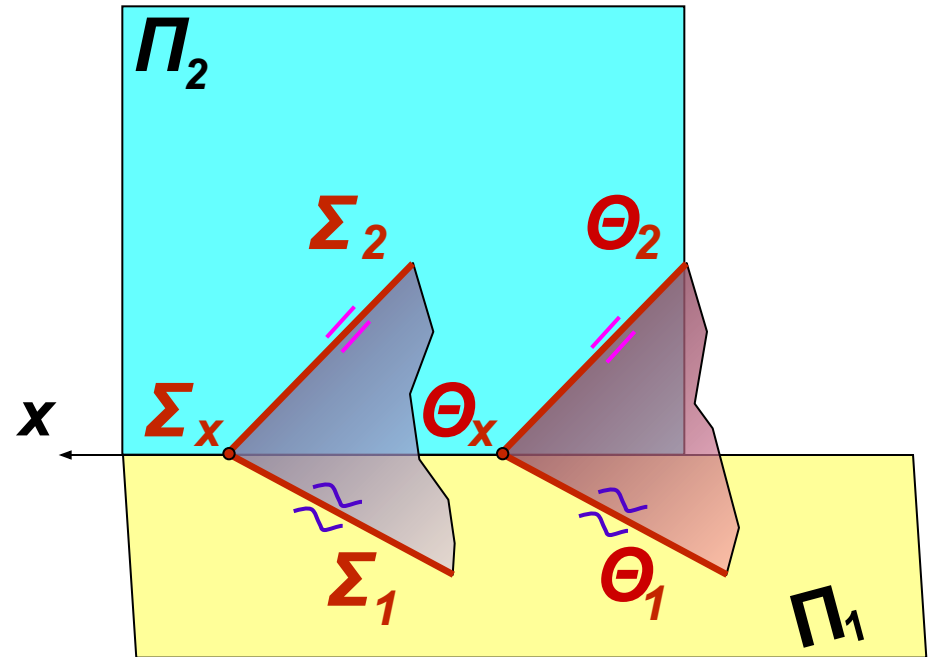


Построим в плоскости $\Sigma (\triangle ABC)$ вспомогательную фронталь f' . Через точку D проводим фронталь f , проекции которой параллельны одноименным проекциям фронтали f' . Получаем искомую прямую f , параллельную заданной плоскости $\Sigma (\triangle ABC)$

Параллельность двух плоскостей



$$\left. \begin{array}{l} a \parallel m \\ b \parallel n \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

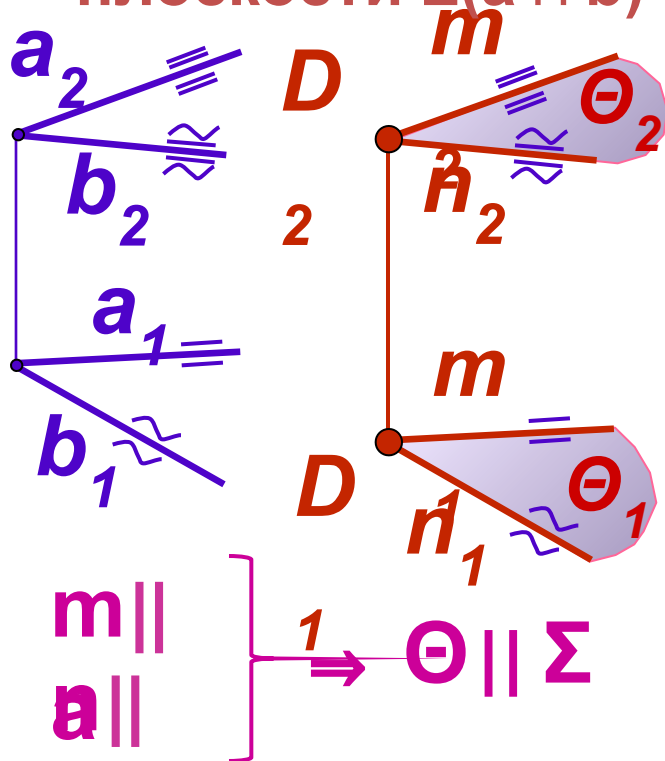


$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_1 \parallel \Sigma_2 \\ \Theta_1 \parallel \Theta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

Признак параллельности: плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. В качестве прямых могут быть использованы следы плоскостей

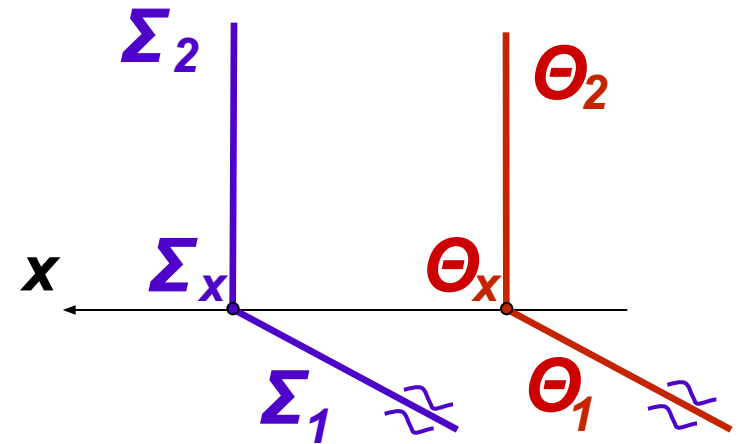
Параллельность двух плоскостей

Задача 1: Через точку D провести плоскость Θ , параллельную плоскости $\Sigma(a \cap b)$



1. Искомая плоскость Θ задается двумя пересекающимися прямыми m и n , проекции которых соответственно параллельны проекциям прямых a и b заданной плоскости.
2. У параллельных плоскостей Θ и Σ следы параллельны

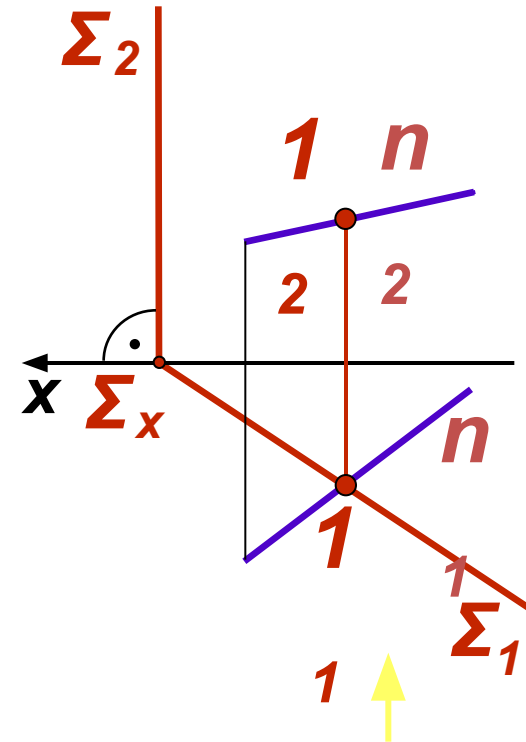
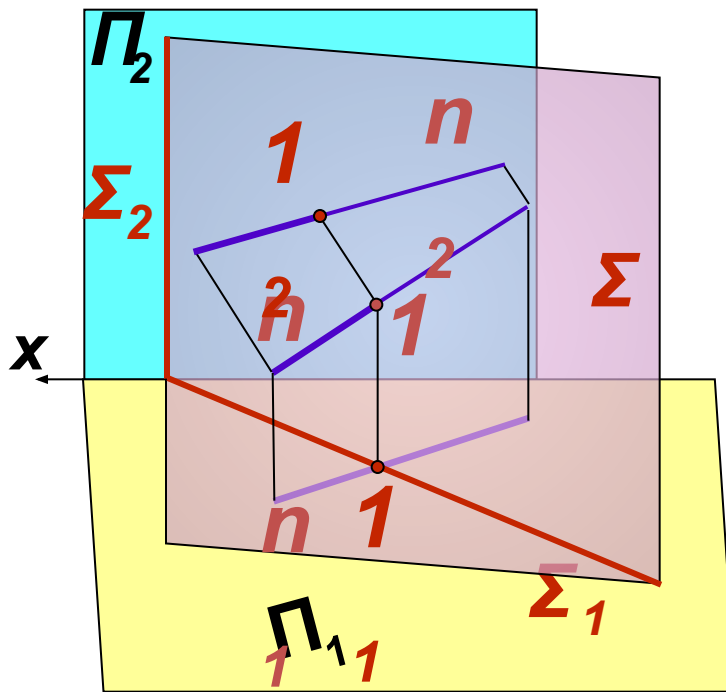
Задача 2: Построить плоскость $\Theta \parallel \Sigma \perp \Pi_1$



$$\Theta_1 \parallel \Sigma_1 \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$$

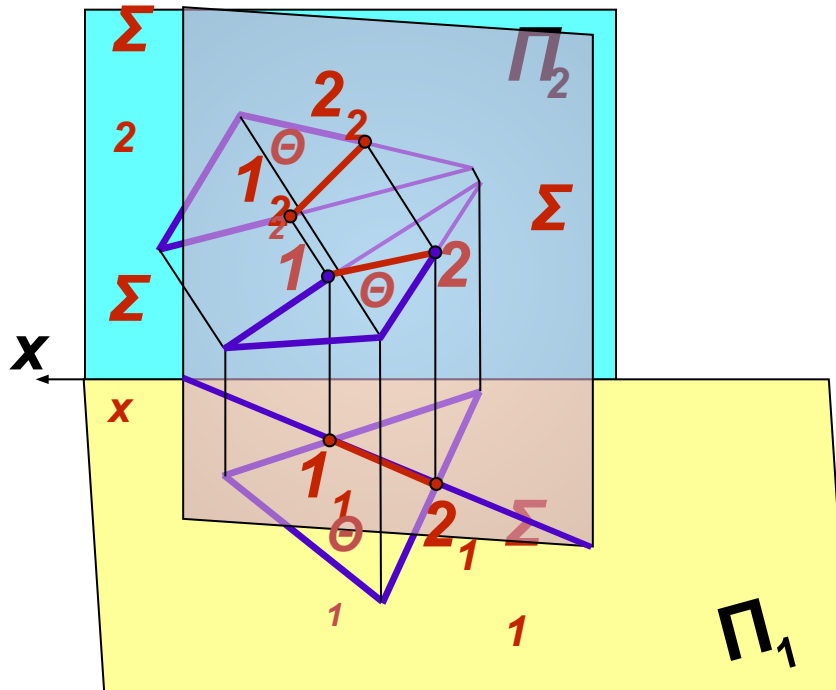
1

Пересечение прямой с проецирующей плоскостью



Одна из проекций точки 1 (пересечения прямой n с проецирующей плоскостью Σ) находится на пересечении следа плоскости Σ_1 с проекцией прямой n_1 . Видимость прямой определяется по направлению взгляда наблюдателя, плоскость считается непрозрачной

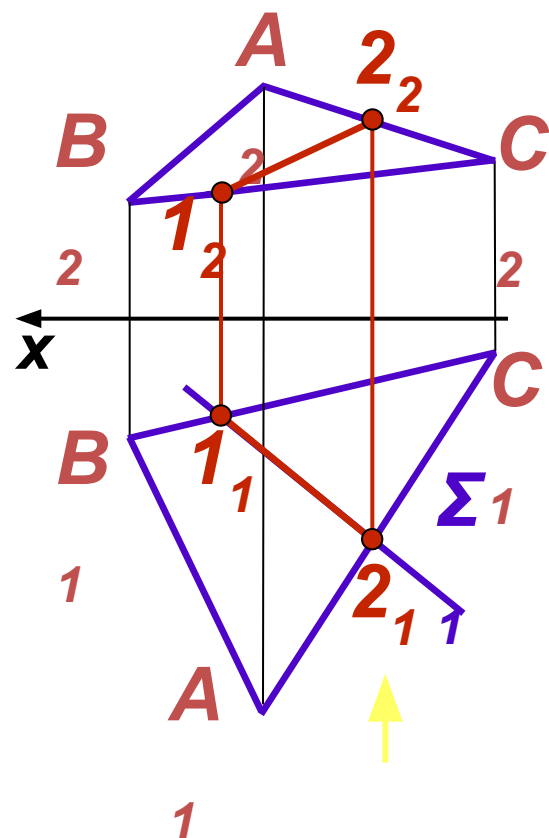
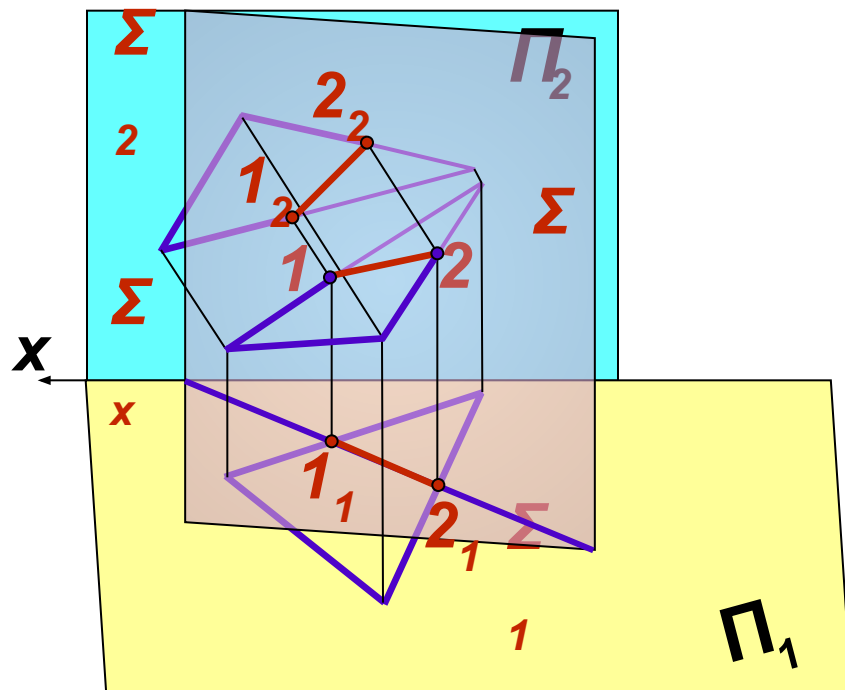
Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



Σ – горизонтально проецирующая плоскость;
 $\Theta(\Delta)$ – плоскость общего положения

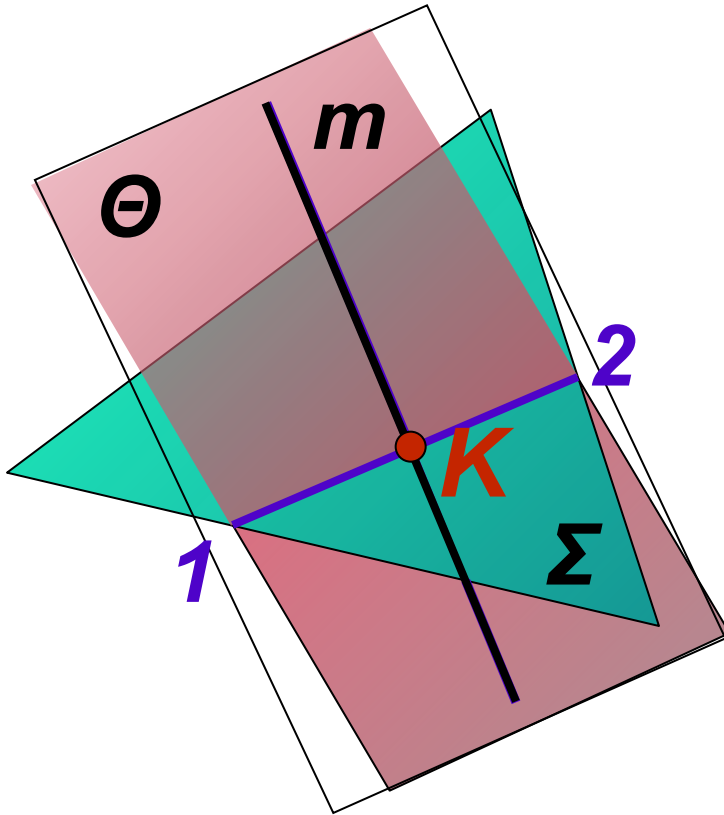
Две плоскости пересекаются по прямой линии. Необходимо найти две точки искомой линии пересечения, которые принадлежат одновременно двум плоскостям

Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



Горизонтально проецирующая плоскость Σ проецируется на Π_1 в виде следа, которому принадлежит проекция $1_1 2_1$ искомой линии пересечения. Часть треугольника, находящаяся перед плоскостью Σ , будет видима на Π_2 . Линия $1_2 2_2$ служит границей видимости

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

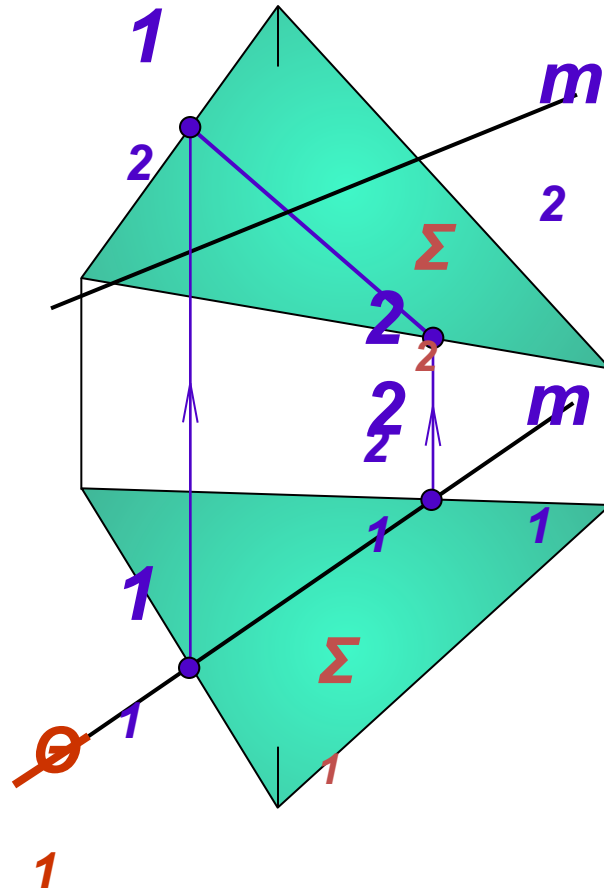


Алгоритм:

1. $m \in \Theta$
2. $\Theta \cap \Sigma = 1-2$
3. $1-2 \cap m = K$
4. Видимость m

1. Через данную прямую m проводят вспомогательную плоскость Θ .
2. Находят линию пересечения 1-2 плоскостей: заданной Σ и вспомогательной Θ .
3. На полученной линии пересечения 1-2 находят общую точку K с заданной прямой m .
4. Определяют видимость прямой m

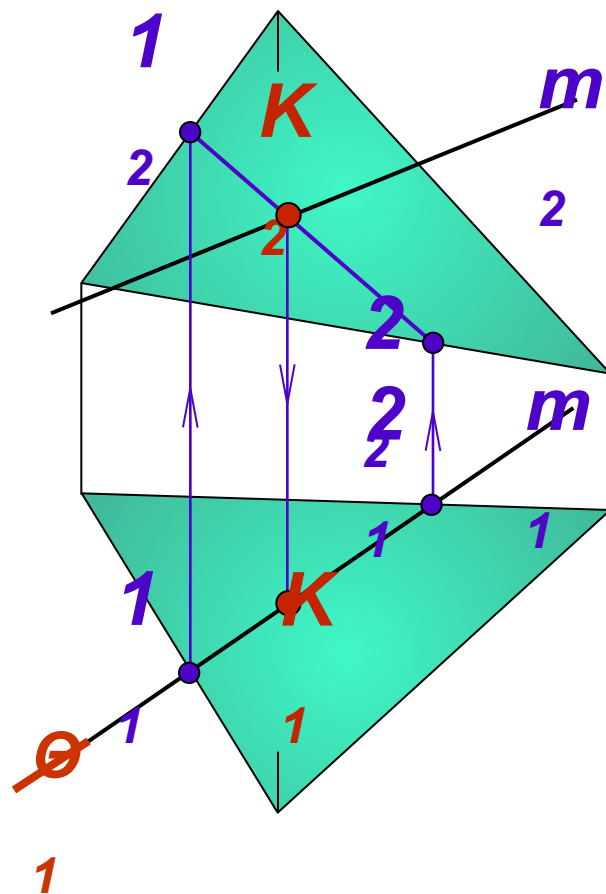
Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$;
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$

В качестве вспомогательной выбираем горизонтально проецирующую плоскость Θ (Θ_1), проходящую через заданную прямую m . Строим горизонтальную $1_1 2_1$, а затем фронтальную $1_2 2_2$ проекции линии пересечения вспомогательной плоскости Θ с данным треугольником Σ

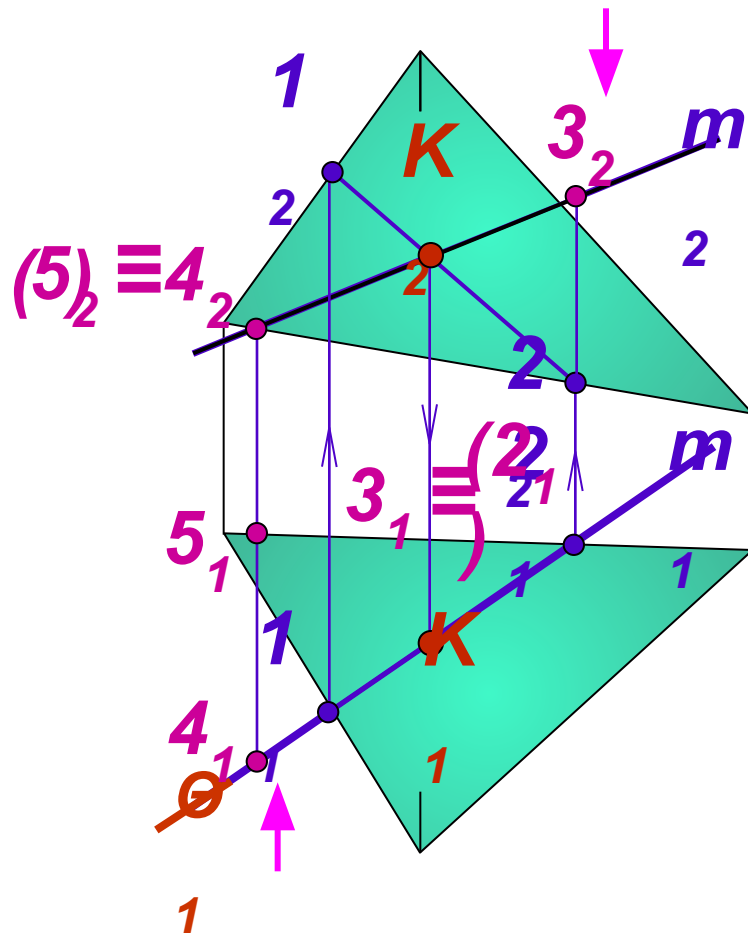
1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$;
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3. $1-2 \cap m = K$; $K_2 \rightarrow K_1$

Находим фронтальную проекцию K_2 точки пересечения K линии 1-2 и данной прямой m . Горизонтальная проекция K_1 искомой точки пересечения будет принадлежать горизонтальной проекции m_1 прямой m

положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$;
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3. $1-2 \cap m = K$; $K_2 \rightarrow K_1$
4. Видимость m
(по конкурирующим точкам)

Видимость горизонтальной проекции прямой определяют по горизонтально конкурирующим точкам 3 и 2 ($3 \in m$; $2 \in \Sigma$). Видимость фронтальной проекции прямой определяют по фронтально конкурирующим точкам 4 и 5 ($4 \in m$; $5 \in \Sigma$). Видимость прямой m меняется в точке