

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

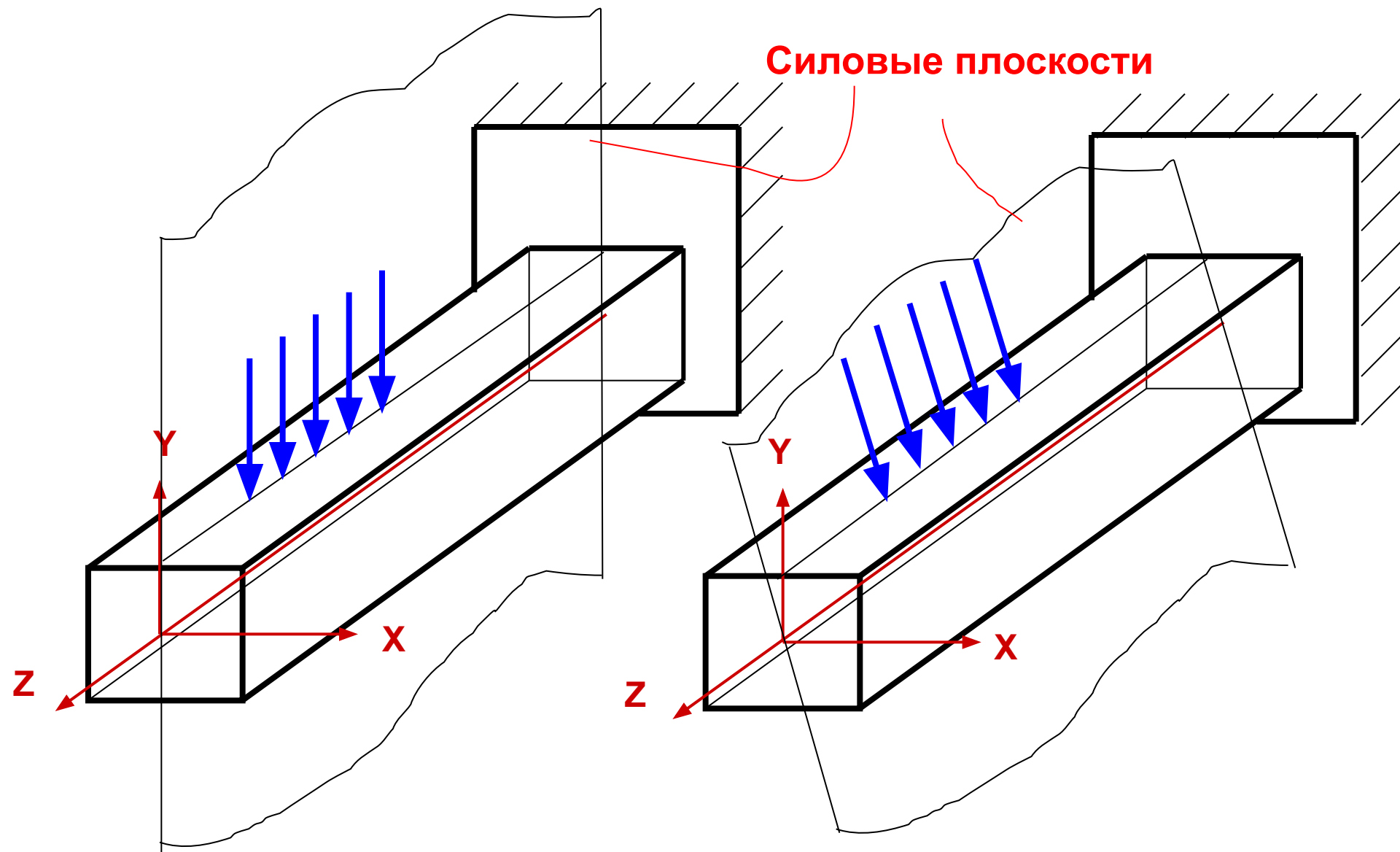
В первой части сопротивления материалов рассматривались так называемые простые виды деформаций: осевое растяжение-сжатие, кручение, прямой плоский изгиб. На практике часто встречаются случаи, когда в результате действия нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно появляются несколько компонентов внутренних усилий. Тогда говорят, что брус находится в условиях сложного сопротивления.

Рассмотрим несколько частных случаев сложного сопротивления, которые наиболее часто встречаются в строительных конструкциях.

Расчеты на прочность и жесткость при косом изгибе

Косым изгибом называется такой случай изгиба бруса, при котором плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции сечения.

На рис.1 показан случай прямого (вертикального) изгиба – силовая плоскость проходит через ось Y , на рис.2 изображен случай косоуго изгиба – силовая плоскость не проходит ни через ось Y , ни через ось X .



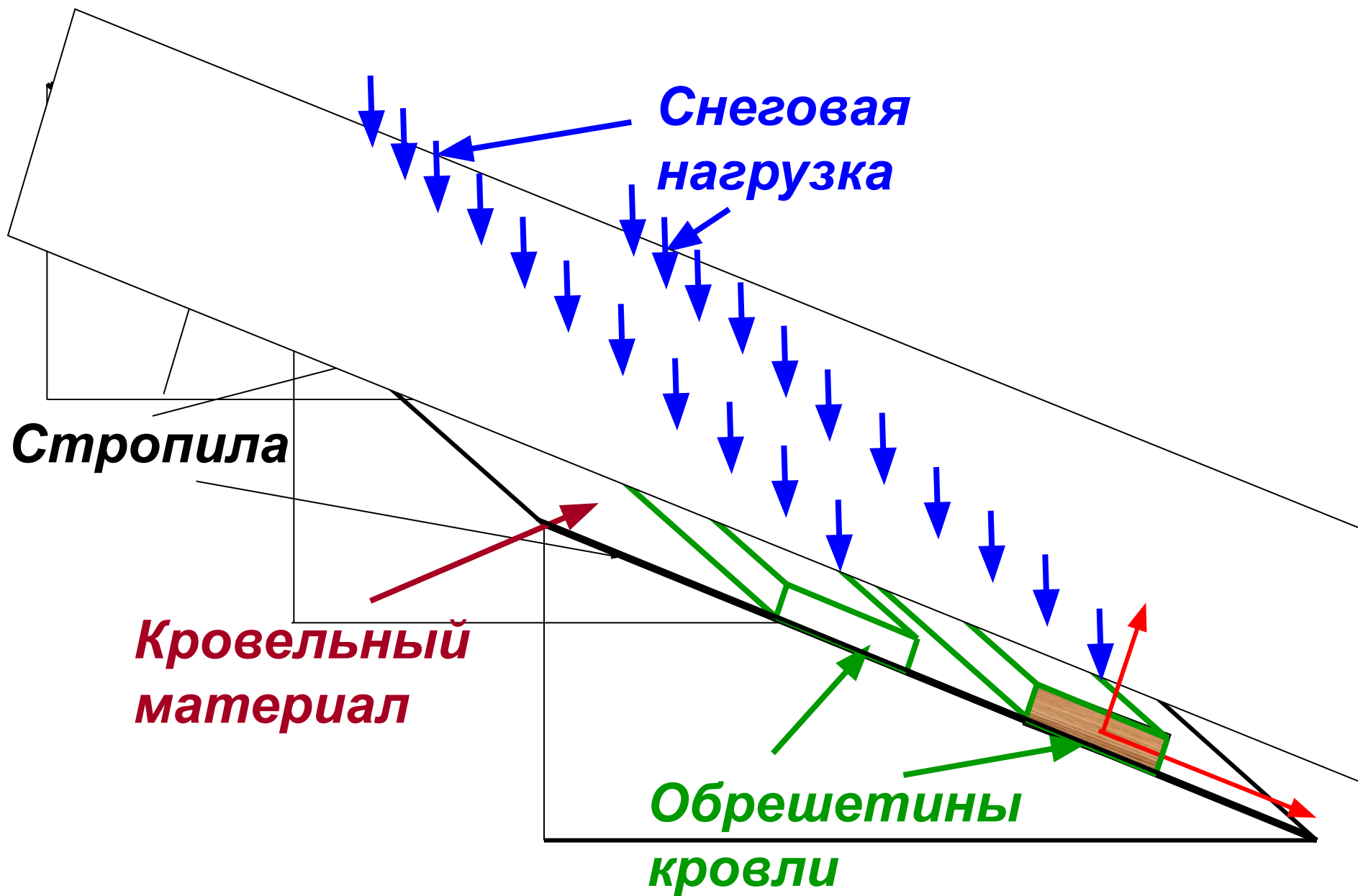
Прямой плоский изгиб

Рис.1

Косой плоский изгиб

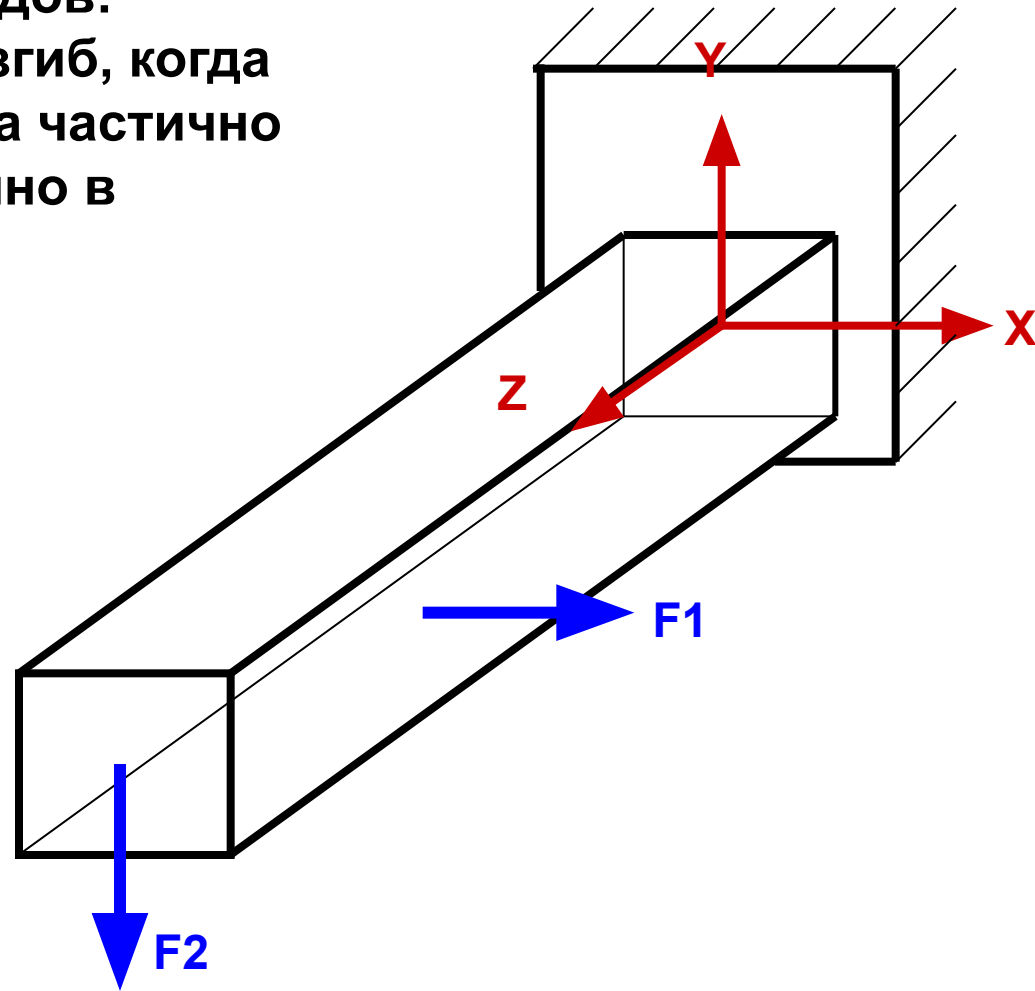
Рис.2

Косой изгиб возникает, например, в обрешетинах кровли от веса самой кровли, собственного веса обрешетин, снеговой нагрузки.



Типы косого изгиба.

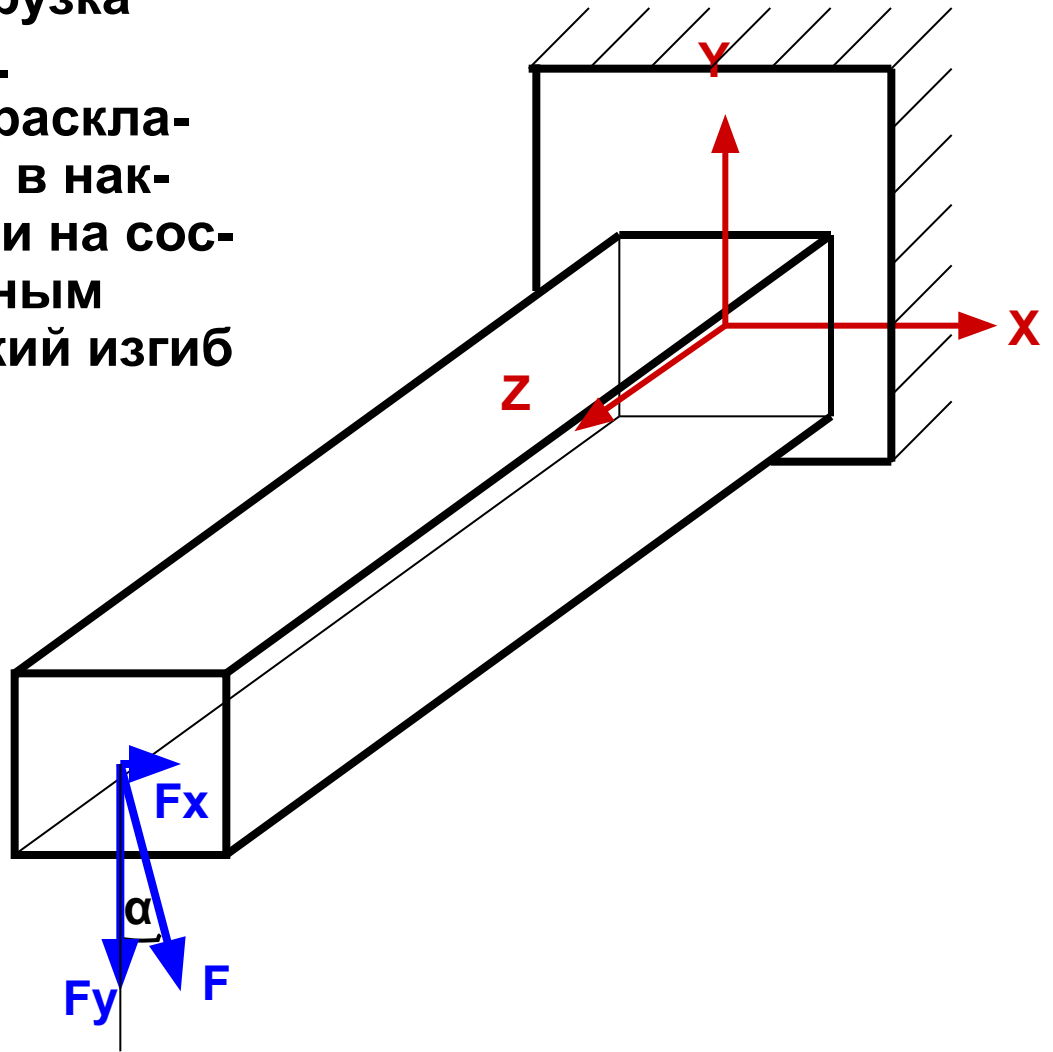
Косой изгиб бывает двух видов:
1) пространственный косой изгиб, когда действующая на брус нагрузка частично лежит в вертикальной, частично в горизонтальной плоскостях;



Косой пространственный изгиб

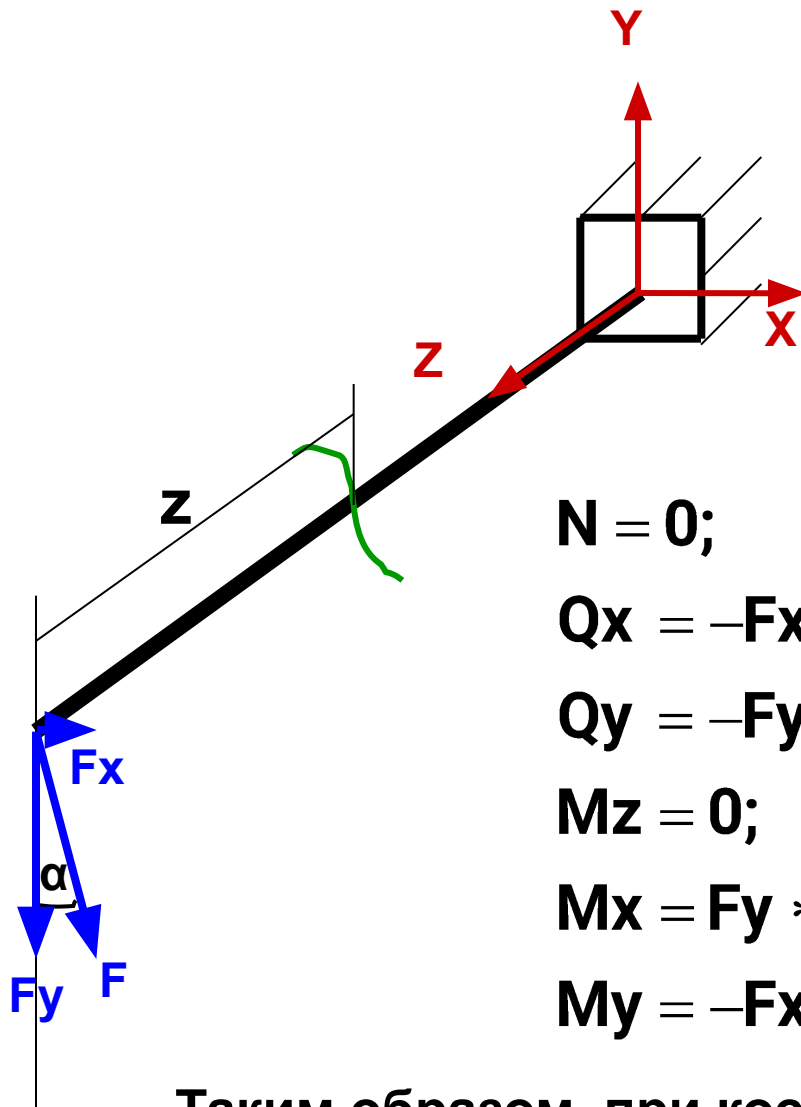
2) плоский кривой изгиб, который возникает в случаях, когда вся действующая на брус нагрузка лежит в одной плоскости .

Из рисунка видно, что , раскладывая нагрузку, лежащую в наклонной силовой плоскости на составляющие по координатным осям, можно свести плоский изгиб к пространственному.



Кривой плоский изгиб

Внутренние усилия при косом изгибе.



Рассмотрим брус, на свободный конец которого действует сила F , линия действия которой наклонена к оси Y на угол α .

Разложим силу на проекции по координатным осям.

Сделаем произвольное сечение бруса, отбросим часть бруса с жесткой заделкой, поместим туда систему координат и выпишем значения внутренних усилий

$$N = 0;$$

$$Q_x = -F_x;$$

$$Q_y = -F_y;$$

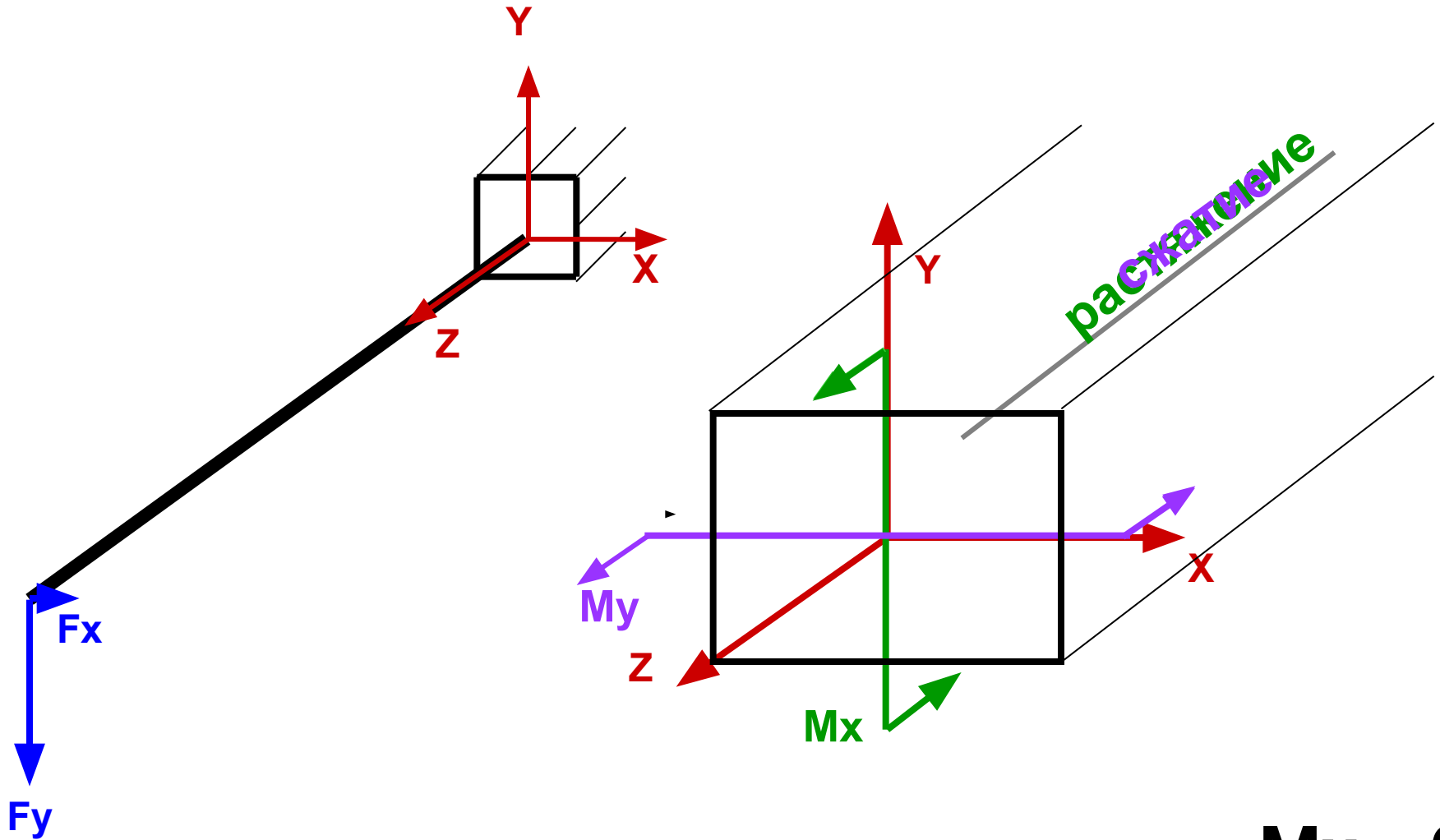
$$M_z = 0;$$

$$M_x = F_y * z;$$

$$M_y = -F_x * z.$$

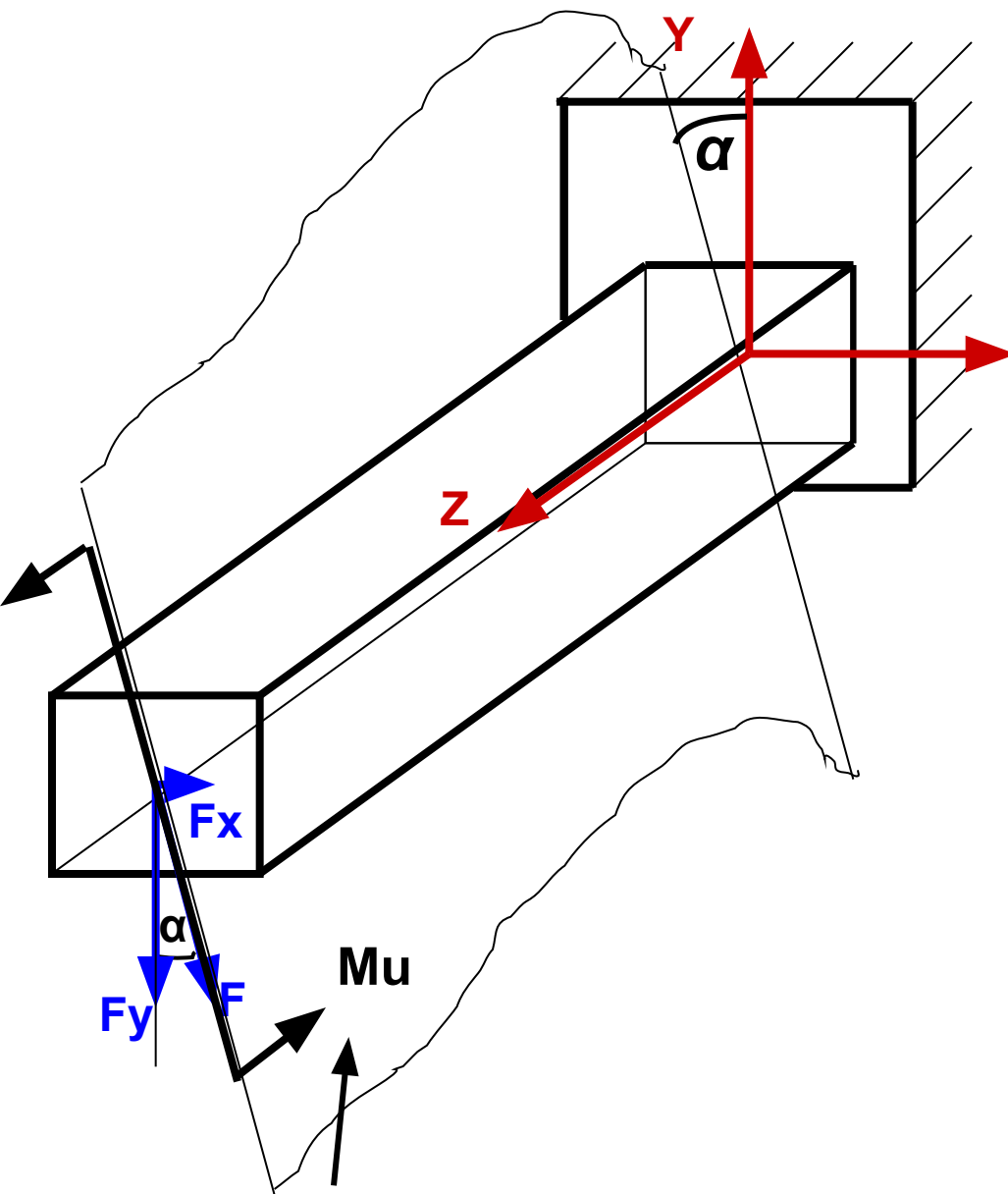
Таким образом, при косом изгибе в сечении бруса возникает одновременно два изгибающих момента— M_x и M_y .

Момент M_x (M_y) положителен, если он вызывает в точках первой четверти системы координат XU растягивающие напряжения.



В данном примере момент M_x вызывает растяжение продольного волокна, а момент M_y – сжатие, поэтому

$M_x > 0;$
 $M_y < 0.$



Силовая плоскость

В случае плоского косо-го изгиба удобно пользоваться понятием так называемого полного изгибающего момента M_u , который вводится по формулам:

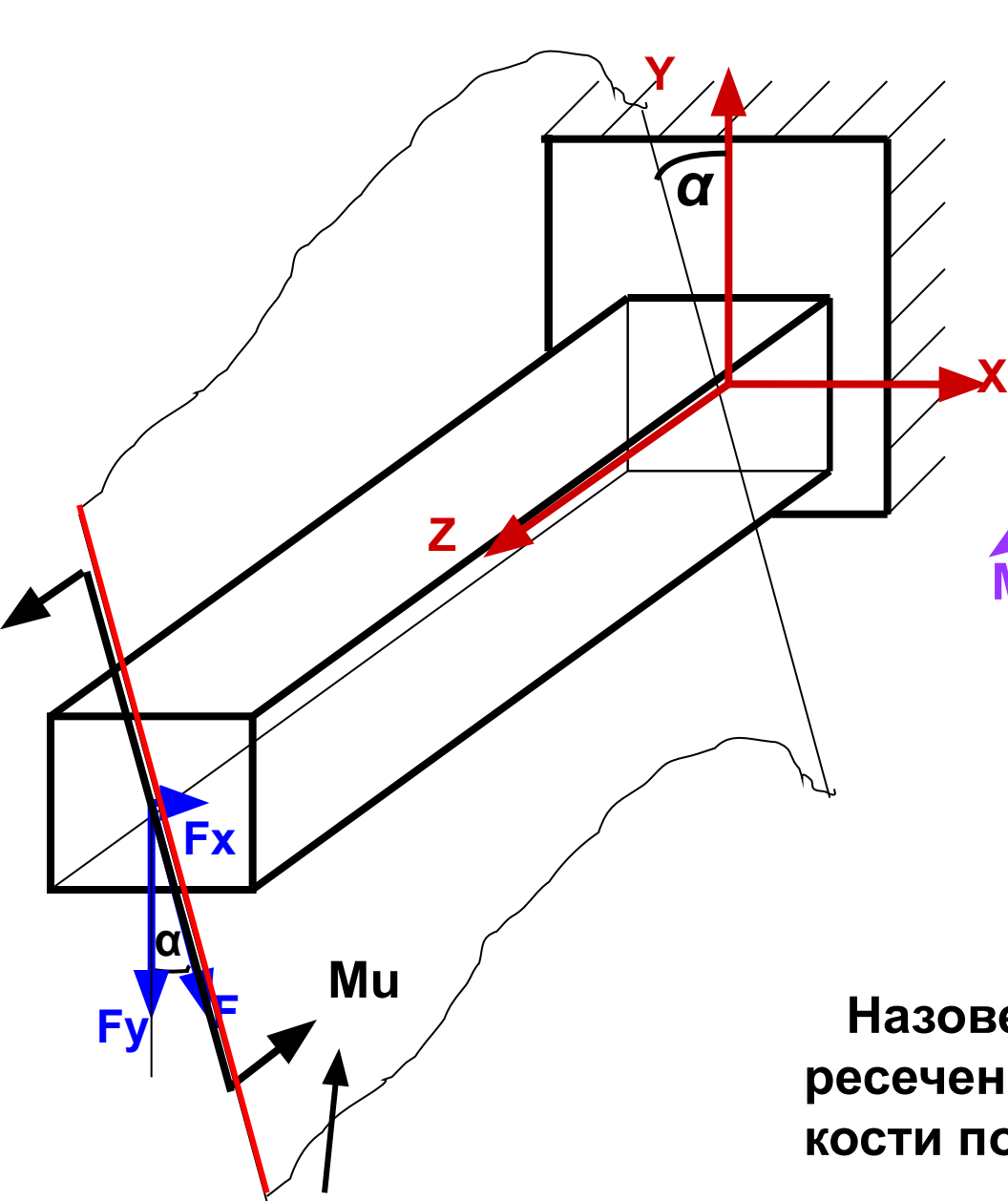
$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

где

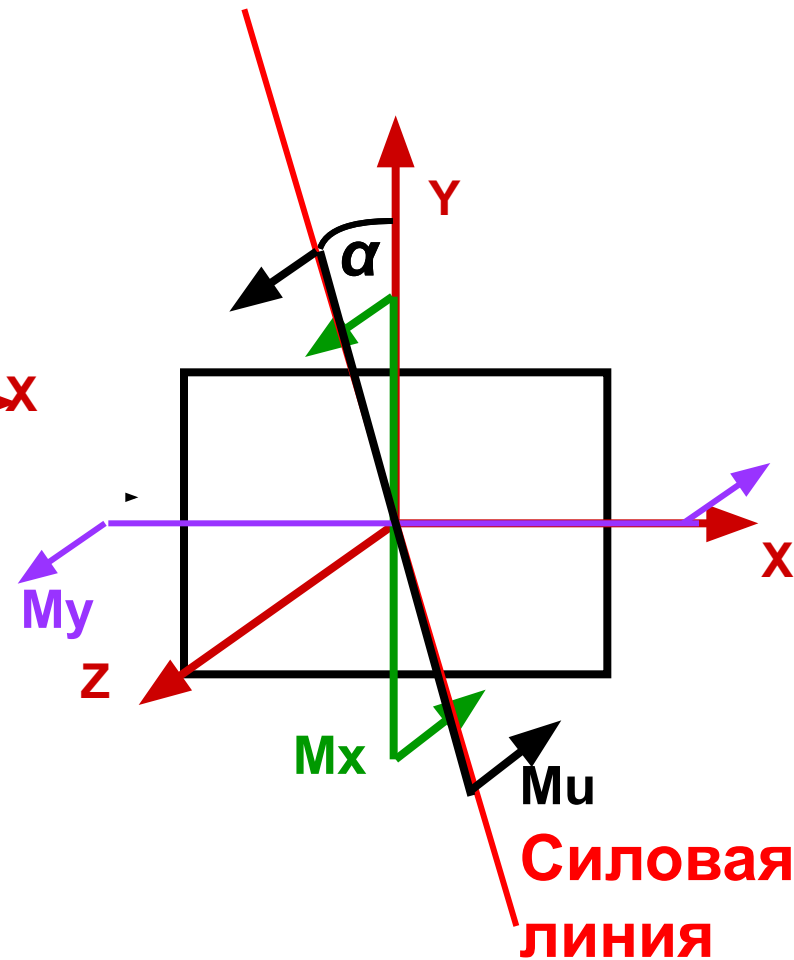
$$M_x = M_u \cdot \cos \alpha \quad (8.1)$$

$$M_y = M_u \cdot \sin \alpha$$

Плоскость действия полного изгибающего момента совпадает с силовой плоскостью.

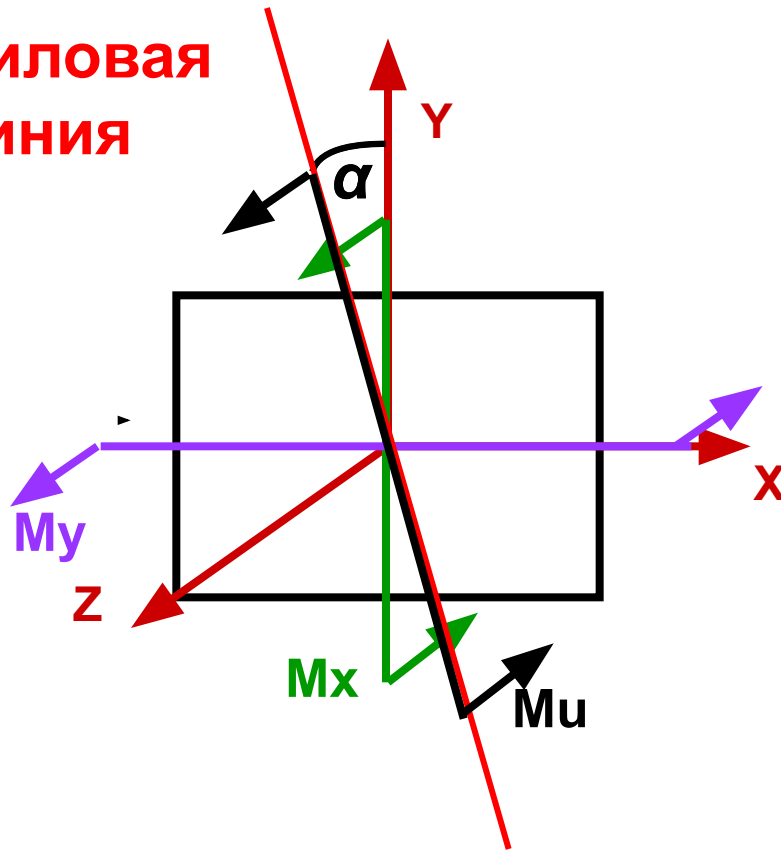


Силовая плоскость



Назовем силовой линией линию пересечения силовой плоскости и плоскости поперечного сечения.

**Силовая
линия**



Угол α наклона силовой линии к оси Y найдем из формул (8.1):

$$M_x = M_u \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = M_u \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \alpha \quad (8.2)$$

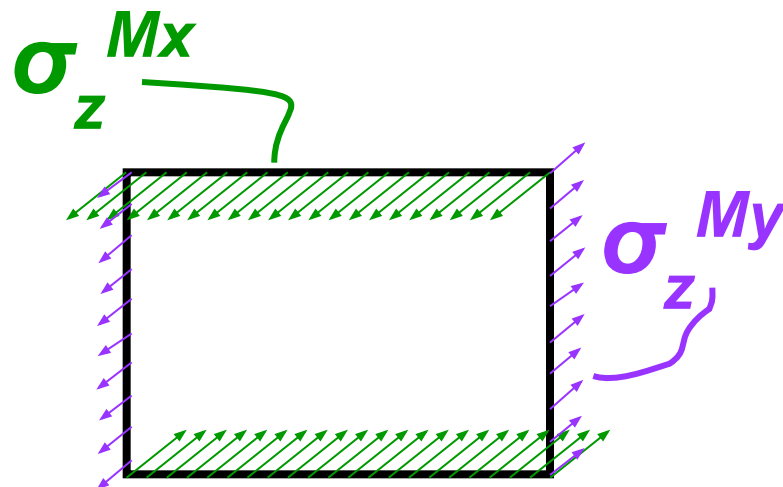
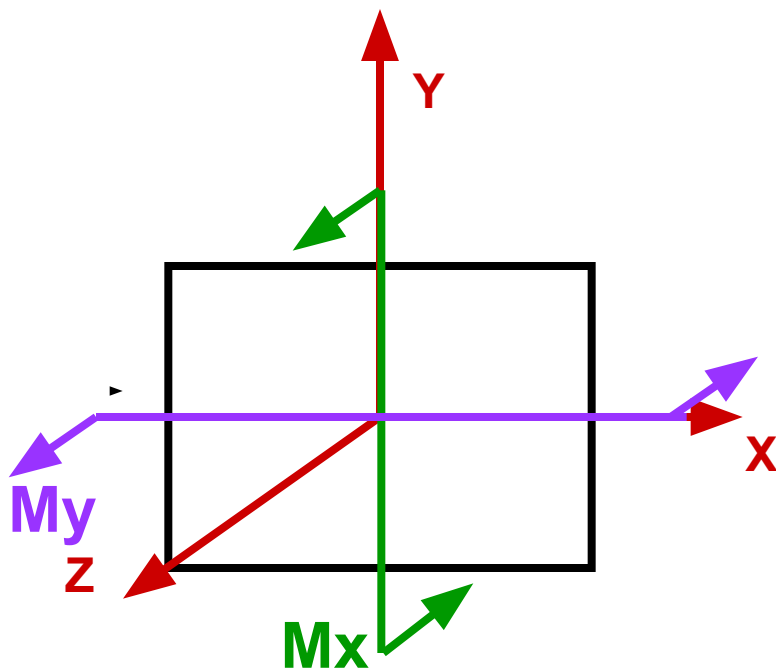
Положение опасного сечения бруса определяется по эпюре полного изгибающего момента M_u в случае плоского косого изгиба и по двум эпюрам M_x и M_y в случае пространственного косого изгиба.

Напряжения при косом изгибе

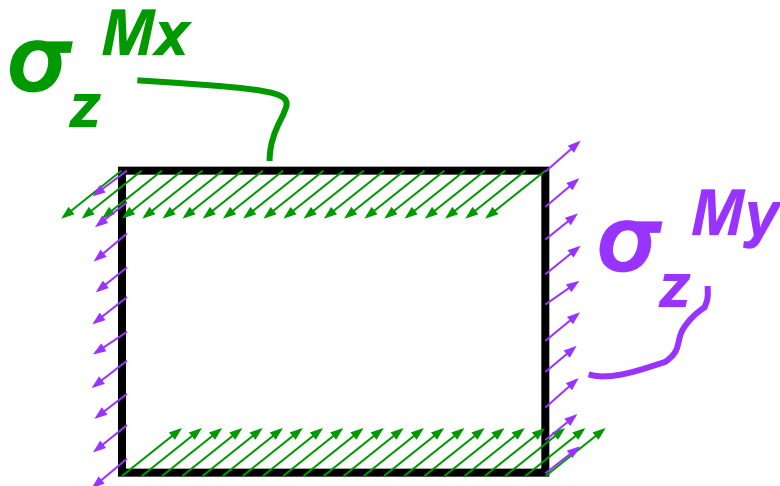
Напряжения во всех случаях сложного сопротивления, в том числе и при косом изгибе, определяются с помощью принципа независимости действия сил, то есть находят напряжения от каждого внутреннего усилия отдельно, а затем находят их сумму. При косом изгибе возникают и нормальные, и касательные напряжения.

1. Нормальные напряжения.

При косом изгибе возникают два изгибающих момента, поэтому в сечении возникают и две системы нормальных напряжений – от каждого из изгибающих моментов.



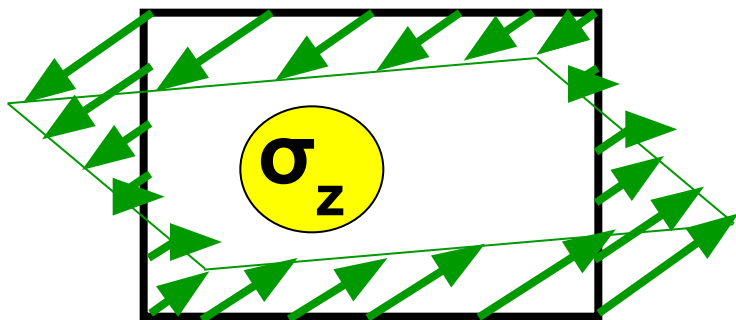
При определении нормальных напряжений достаточно найти их алгебраическую сумму, так как эти напряжения действуют в одной плоскости и параллельны одной линии.



$$\sigma_z^{Mx} = \frac{Mx}{Jx} y$$

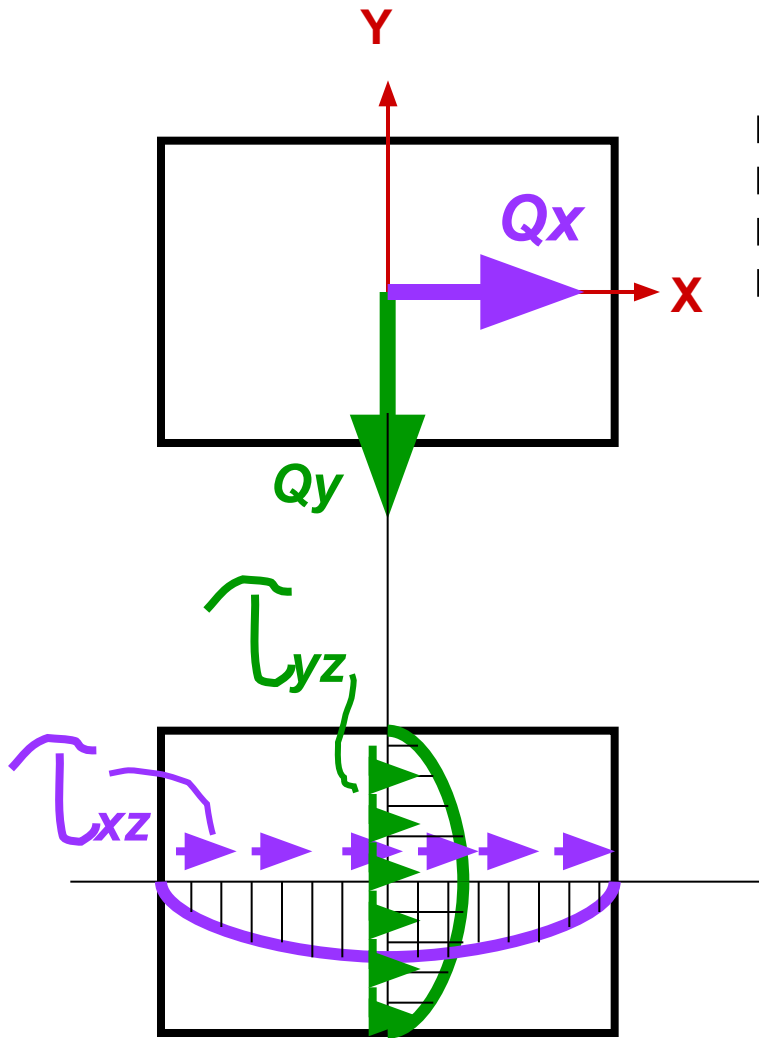
$$\sigma_z^{My} = \frac{My}{Jy} x$$

$$\sigma_z = \frac{Mx}{Jx} y + \frac{My}{Jy} x \quad (8.3)$$



В формуле (8.3) x и y – это координаты точки, в которой определяется напряжение.

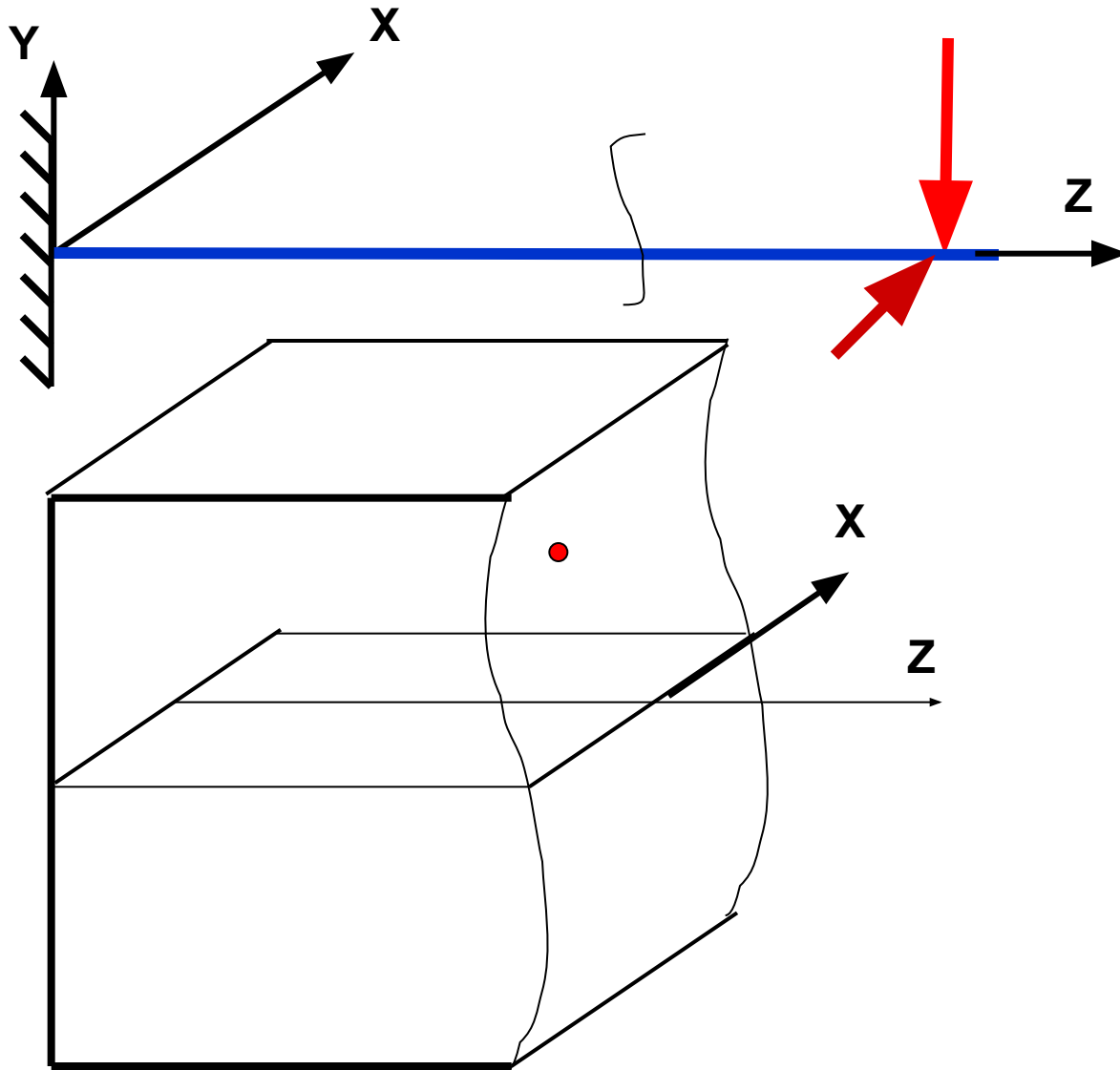
2. Касательные напряжения.



При определении касательных напряжений необходимо определять их геометрическую сумму, так как эти напряжения лежат в разных плоскостях:

$$\tau_{xz} \parallel OX ; \tau_{yz} \parallel OY$$

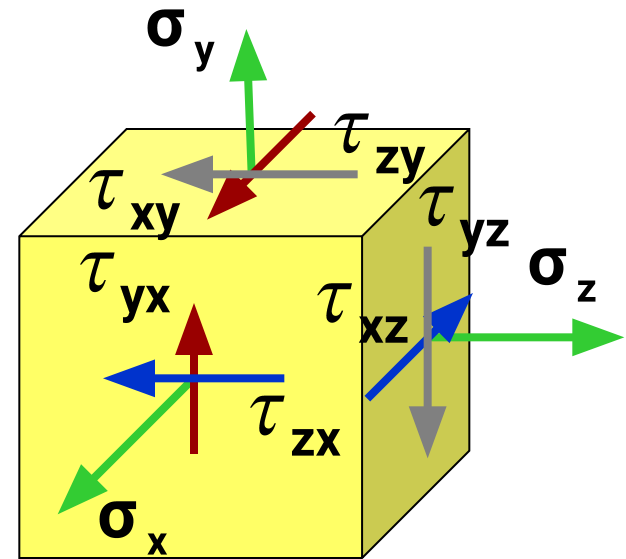
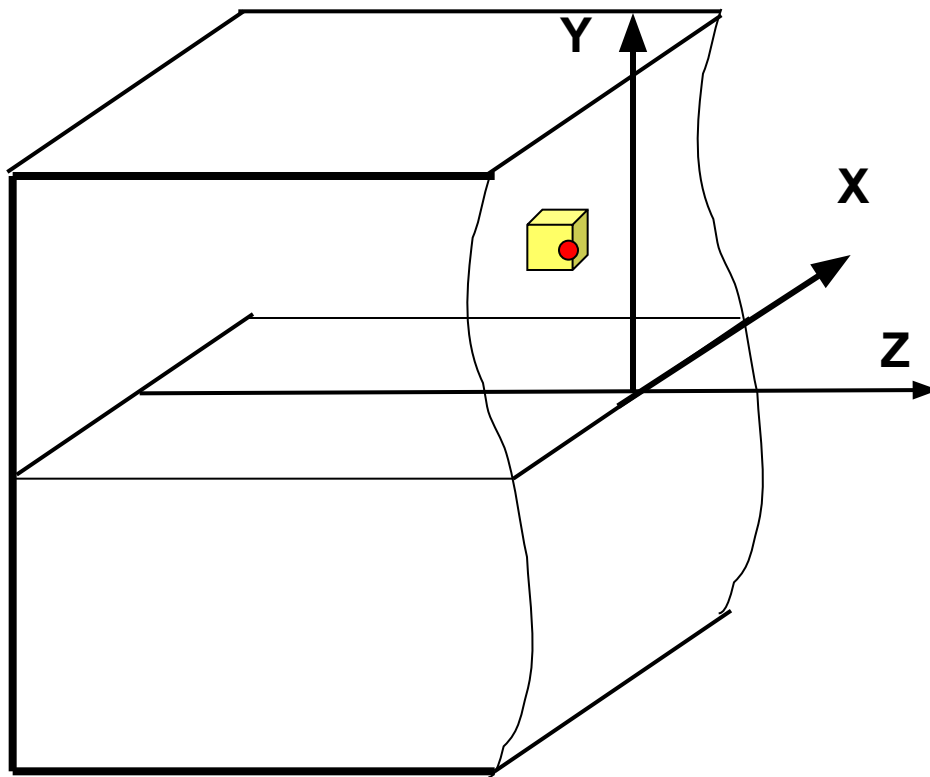
Исследование напряженного состояния в точке при косом изгибе.



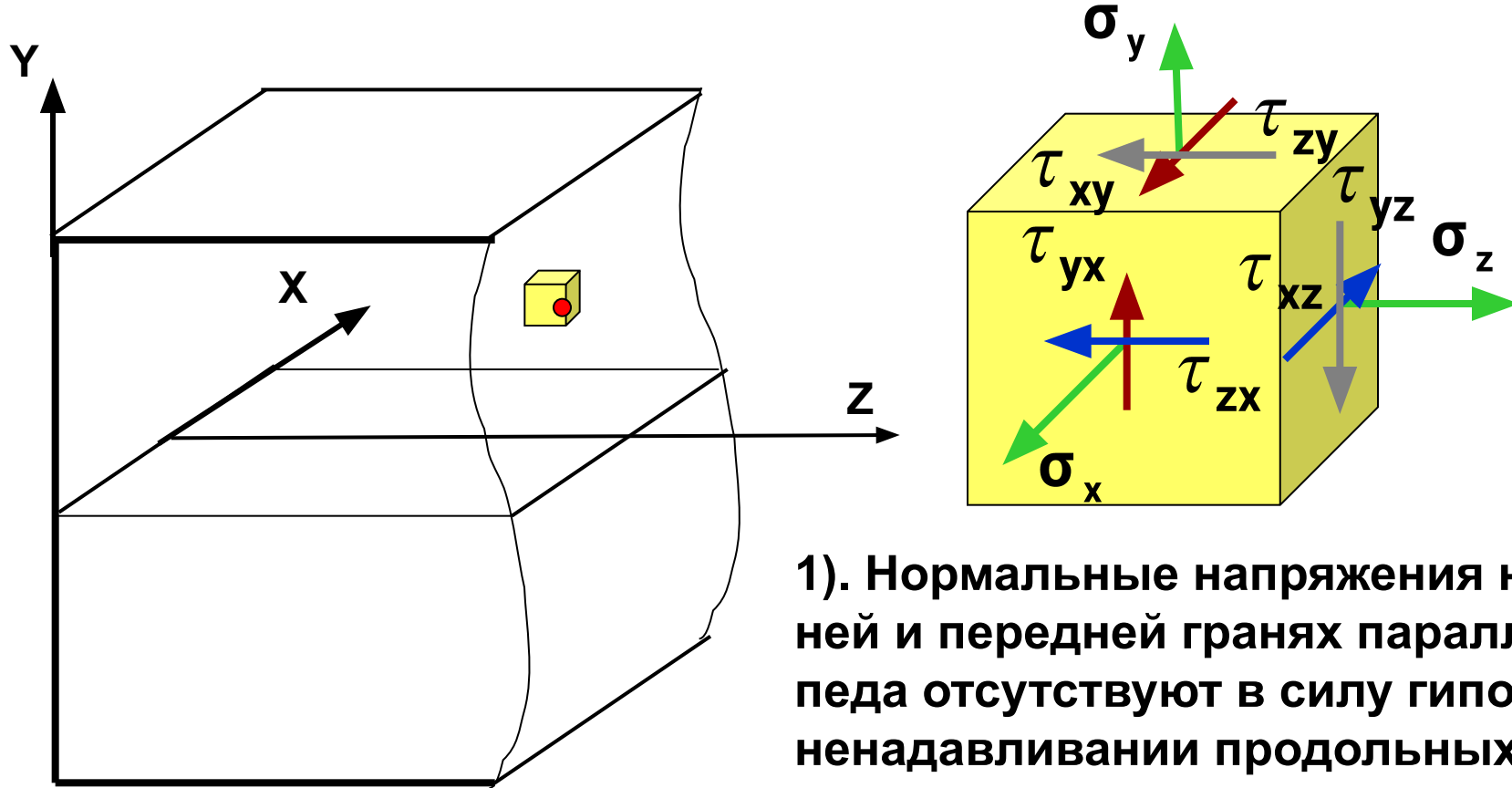
Рассмотрим консольную балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную, например, сосредоточенными силами.

Проведем в этой балке произвольное сечение и отбросим часть балки, лежащую, например, справа от сечения.

Выберем в этом сечении произвольную точку.



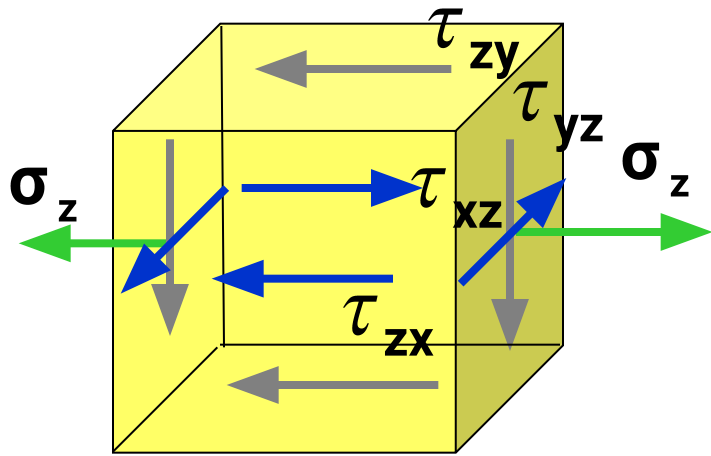
Вырежем вокруг этой точки элементарный параллелепипед. Изобразим этот параллелепипед в увеличенном виде, нагрузим его грани напряжениями, которые могут возникать в самом общем случае и определим, какие из них будут отсутствовать в случае косого изгиба. Для простоты изображения покажем напряжения только на трех видимых гранях параллелепипеда.



1). Нормальные напряжения на верхней и передней гранях параллелепипеда отсутствуют в силу гипотезы о ненадавливании продольных волокон друг на друга, то есть

$$\sigma_x = \sigma_y = 0.$$

2). Касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ в силу того, что на верхней (нижней) и боковых гранях балки отсутствуют внешние нагрузки, которые могут эти напряжения вызвать.



Таким образом, у элементарного параллелепипеда нет свободных от напряжений площадок, то есть имеет место пространственное напряженное состояние.

Можно, однако, показать, что касательные напряжения при ком изгибе намного меньше нормальных и ими обычно пренебрегают.

Тогда в точке балки образуется линейное напряженное состояние, т.е.

если $\sigma_z > 0$, то $\sigma_1 = \sigma_z^{\max}$;

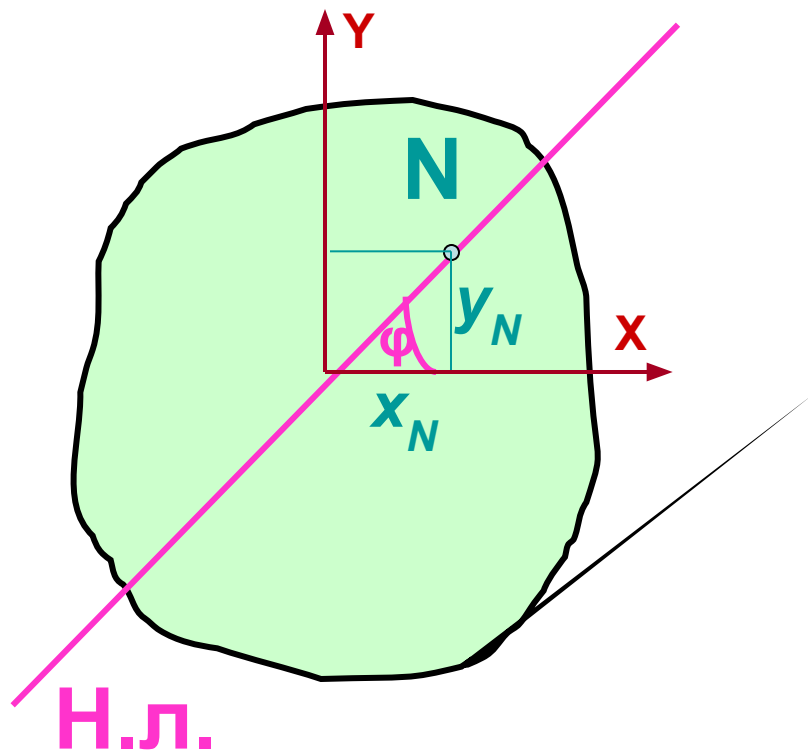
если $\sigma_z < 0$, то $\sigma_3 = \sigma_z^{\max}$;

и условие прочности записывается в виде $\sigma_z^{\max} \leq R$ (8.4)

Опасные точки сечения. Нейтральная линия сечения.

Из формул (8.3) и (8.4) следует, что прежде, чем воспользоваться условием прочности, необходимо сначала определить координаты x и y опасных точек сечения, то есть точек, в которых возникают наибольшие нормальные напряжения.

Для этого научимся определять положение нейтральной линии сечения, то есть линии, во всех точках которой нормальные напряжения равны нулю.



Предположим, что точка $N (x_N, y_N)$ лежит на нейтральной линии.

Тогда $\sigma_z^N = 0$.

Из (8.3) $\sigma_z = \frac{Mx}{Jx} y + \frac{My}{Jy} x$

$$\sigma_z^N = \frac{My}{Jy} x_N + \frac{Mx}{Jx} y_N = 0; \rightarrow$$

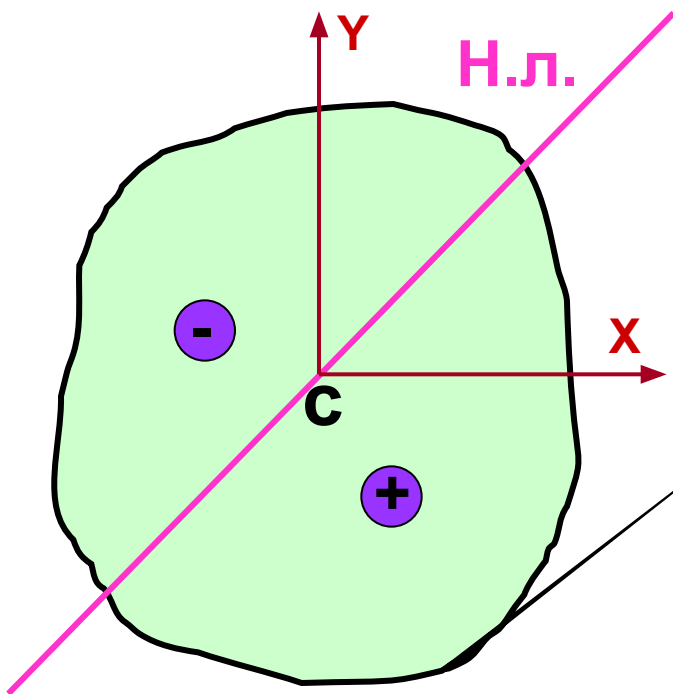
$$\frac{y_N}{x_N} = -\frac{My}{Mx} \cdot \frac{Jx}{Jy}; \rightarrow \frac{y_N}{x_N} = \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \varphi = -\frac{My}{Mx} \cdot \frac{Jx}{Jy}} \quad (8.5)$$

По формуле (8.5) определяется угол наклона φ нейтральной линии к оси X , то есть определяется положение нейтральной линии. При этом положительный угол φ откладывается от оси X против хода часовой стрелки.

Выясним, какими свойствами обладает нейтральная линия при косом изгибе.

1). Найдем напряжения в центре тяжести сечения т.С(0,0). Из (8.3) получаем:

$$\sigma_z^c = \frac{M_x}{J_x} \cdot 0 + \frac{M_y}{J_y} \cdot 0 = 0, \text{ то есть}$$



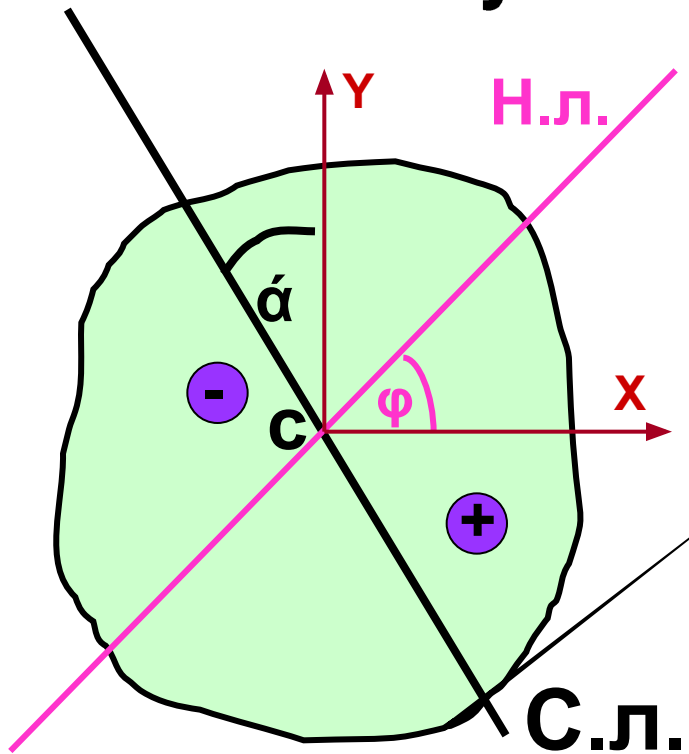
Нейтральная линия всегда проходит через центр тяжести сечения.

2). Нейтральная линия делит сечение на две зоны— зону растяжения и зону сжатия.

3). Сравним выражения (8.2) и (8.5).

$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \alpha \quad (8.2) \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (8.5) \quad \longrightarrow$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (8.6) \quad , \text{ то есть, если } J_x \neq J_y, \\ \text{ то } \angle \alpha \neq \angle \varphi$$



Нейтральная и силовая линии в общем случае не перпендикулярны друг другу и всегда проходят через разные четверти системы координат.

4) Получим зависимость величины нормальных напряжений в точке сечения от положения этой точки относительно нейтральной линии. Для этого преобразуем сначала формулу (8.3):

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = \frac{M_x}{J_x} \left(y + \frac{M_y J_x}{M_x J_y} x \right)$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} (y + x \cdot \operatorname{tg} \varphi)$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi} (y \operatorname{Cos} \varphi + x \operatorname{Sin} \varphi) \quad (8.7)$$

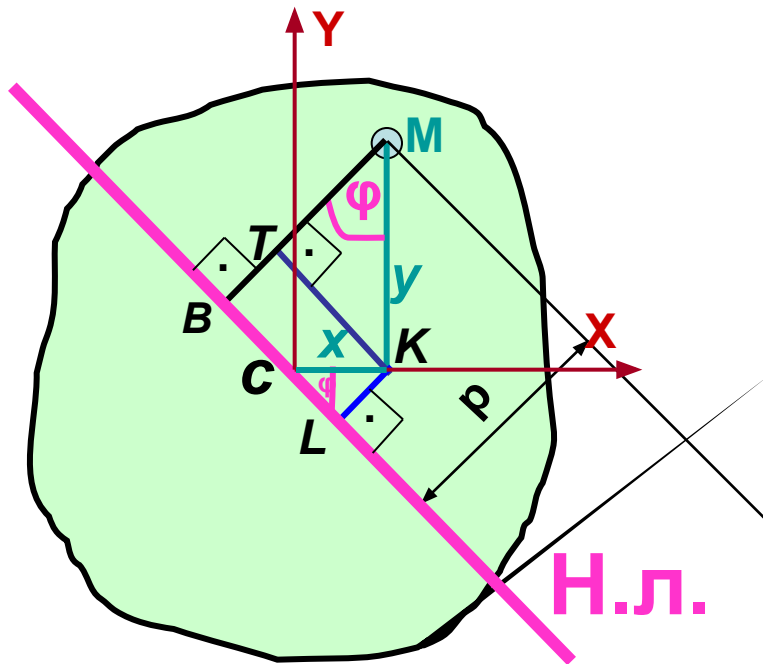
Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$.

Опустим из этой точки два перпендикуляра – MK на ось X и MB на нейтральную линию.

Обозначим длину перпендикуляра MB через p .

Опустим из точки K перпендикуляры KT на отрезок MB и KL на нейтральную линию.

$\angle BMK = \angle KCL \Rightarrow$ углы между взаимно перпендикулярными сторонами.



Из чертежа следует

$$MB = p = MT + TB = MT + KL;$$

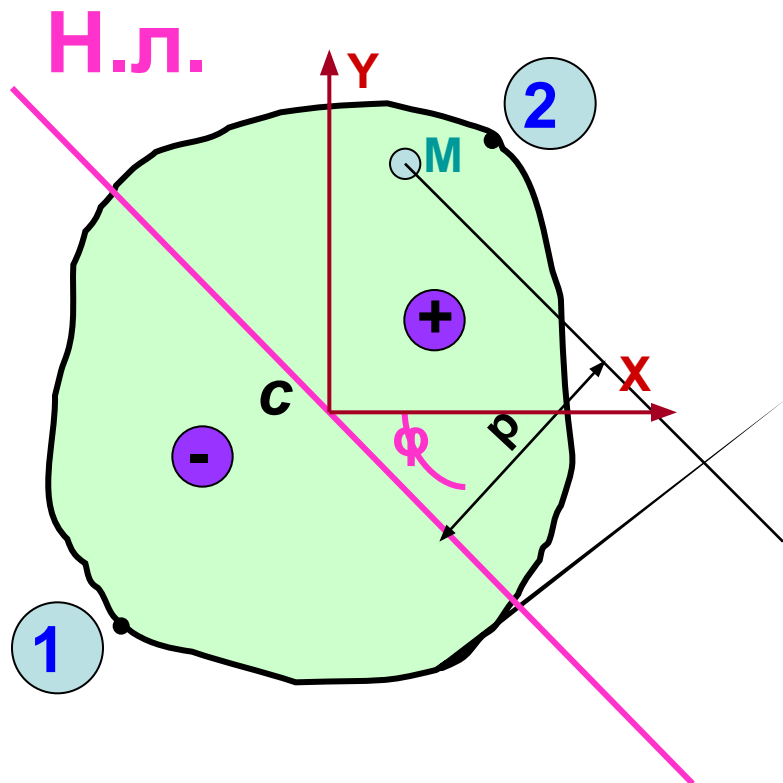
$$\text{Из } \triangle MKT: MT = y \cos \varphi$$

$$\text{Из } \triangle KCL: KL = x \sin \varphi$$

$$p = MT + KL = y \cos \varphi + x \sin \varphi$$

Подставим это выражение в
(8.7)

$$\sigma_z = \frac{Mx}{J_x} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} (y \cos \varphi + x \sin \varphi) \longrightarrow \sigma_z = \frac{Mx}{J_x} \frac{p}{\cos \varphi} \quad (8.8)$$

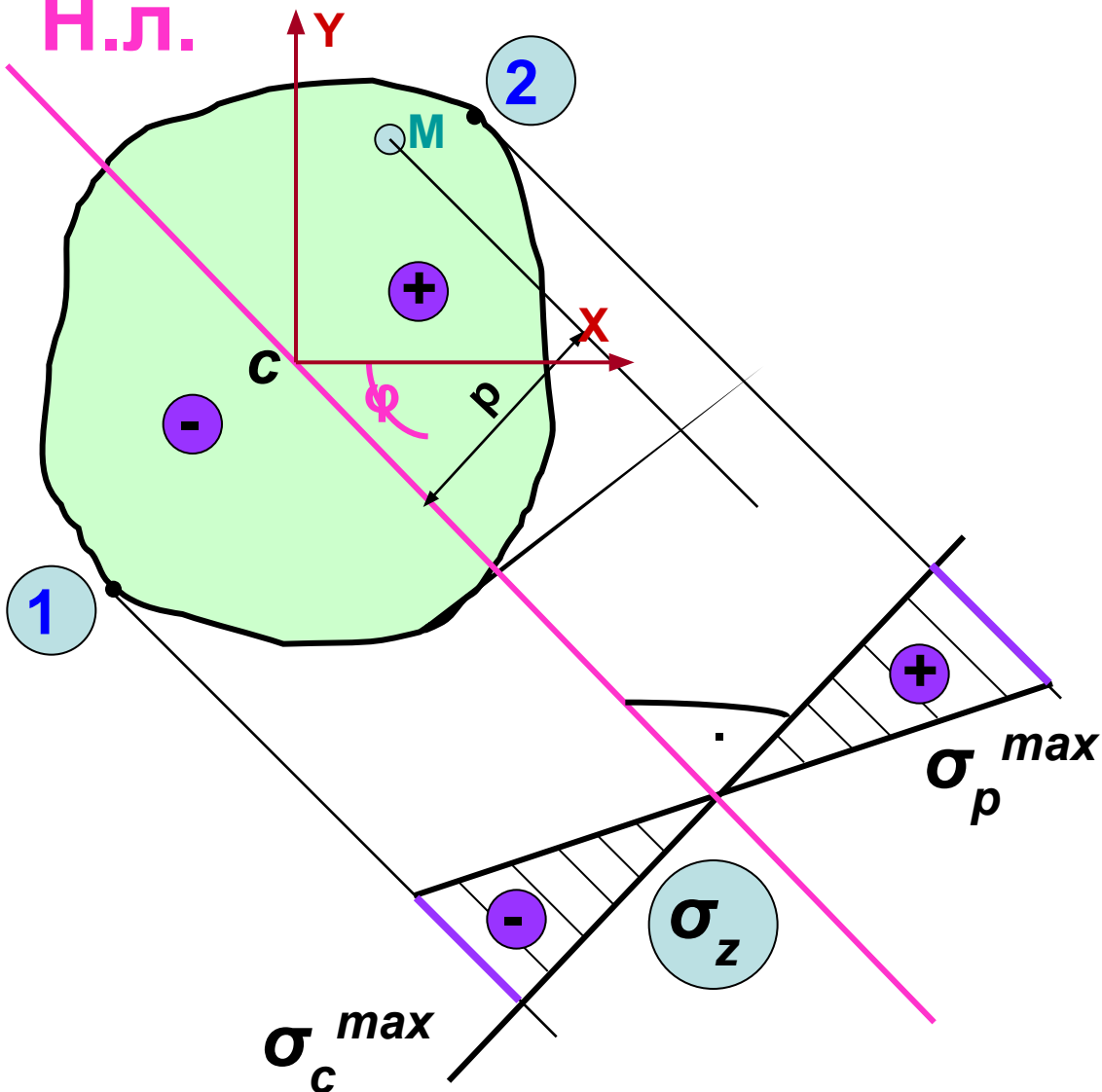


$$\sigma_z = \frac{Mx}{J_x} \frac{p}{\cos \varphi} \quad (8.8)$$

Из формулы (8.8) следует, что чем больше p , то есть чем дальше точка отстоит от нейтральной линии, тем большее напряжение в ней возникает. Таким образом, наиболее опасными точками сечения являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси

Это точка 1 – в ней возникает наибольшее сжимающее напряжение и точка 2, в которой возникает наибольшее растягивающее напряжение.

Н.л.



$$\sigma_z = \frac{Mx}{J_x} \frac{r}{\cos \varphi} \quad (8.8)$$

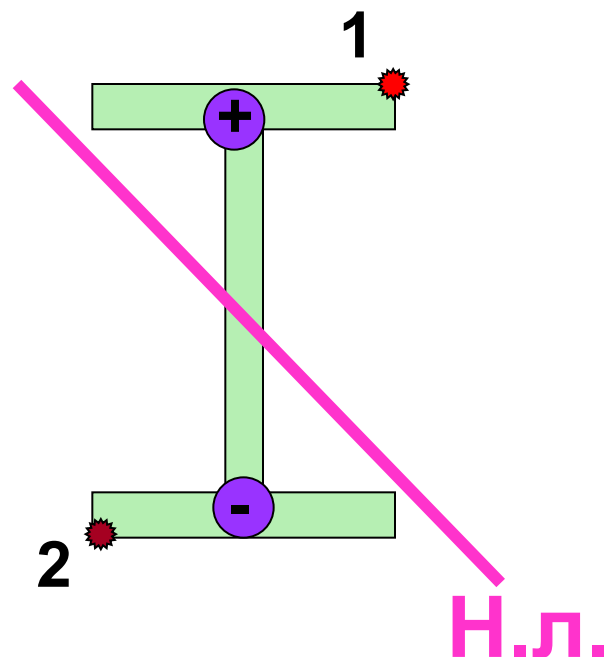
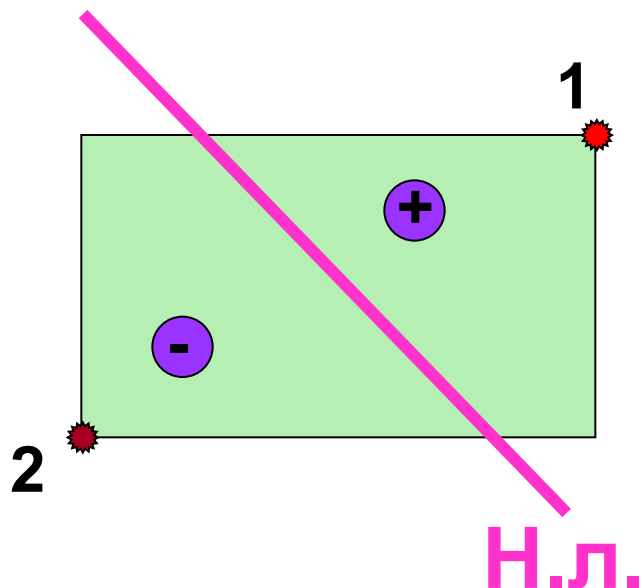
Из формулы (8.8) также следует, что напряжения линейно зависят от r .

Построим эпюру напряжений вдоль оси, перпендикулярной нейтральной линии.

В сечениях простой формы (прямоугольник, двутавр, швеллер и т. п.) опасными точками сечения будут угловые точки.

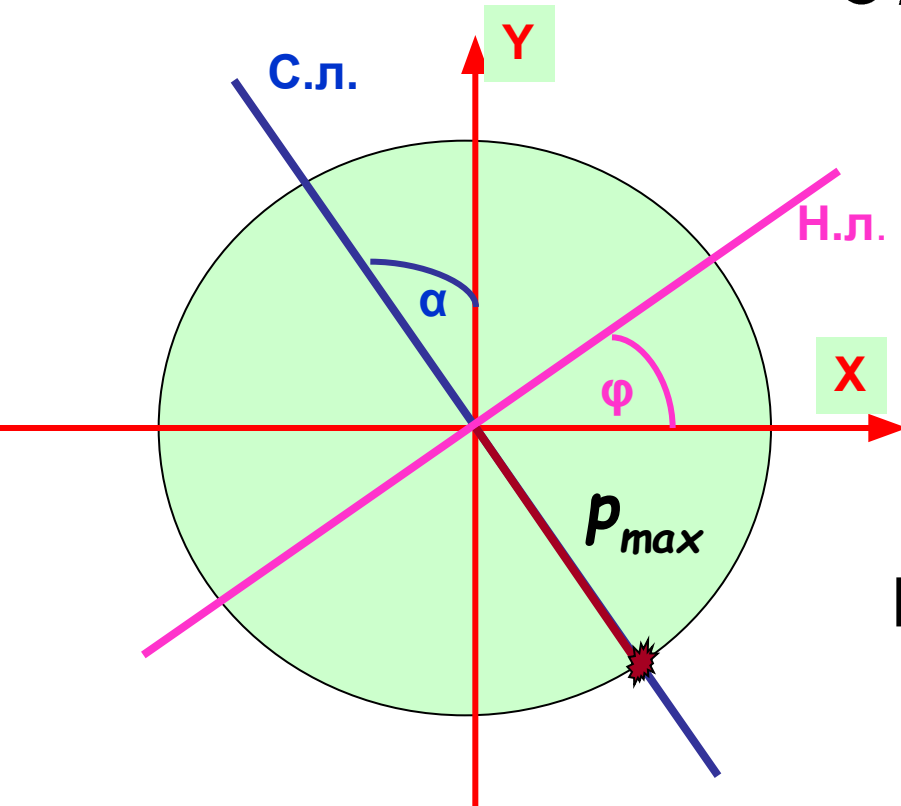
Если брус выполнен из пластического материала, то в сечении будут две равноопасных точки—т.1 и т.2.

Если брус выполнен из хрупкого материала, то более опасной точкой будет т.1, в которой возникает наибольшее растягивающее напряжение.



Расчет круглого сечения.

Выпишем формулу (8.6) $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{J_x}{J_y}$



Для круглого сечения $J_x = J_y$

и $\angle \alpha = -\angle \varphi$.

В круглом сечении силовая и нейтральная линия перпендикулярны.

Из (8.1)

$$M_x = M_u \cdot \cos \alpha = M_u \cdot \cos \varphi;$$

Из (8.8) $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \frac{p}{\cos \varphi} =$

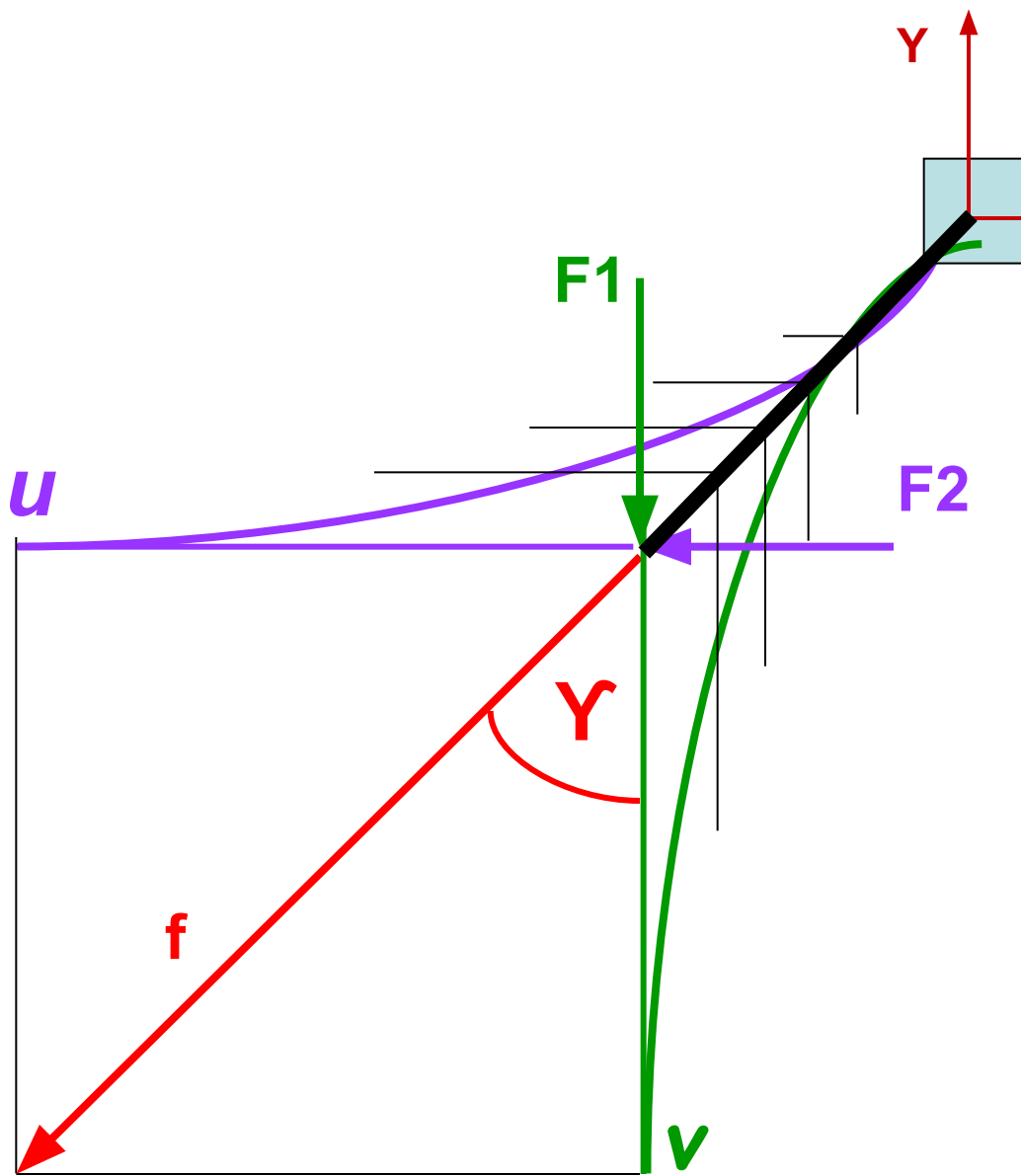
$$= \frac{M_u \cdot \cos \varphi}{J_x} \cdot \frac{p}{\cos \varphi} = \frac{M_u \cdot p}{J_x}$$



$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_u}{W_x}$$

Перемещения при косом изгибе.

Так как косой изгиб представляет собой сочетание двух прямых изгибов, то перемещения при косом изгибе определяются теми же методами, что и при прямом изгибе, например, методом Мора.



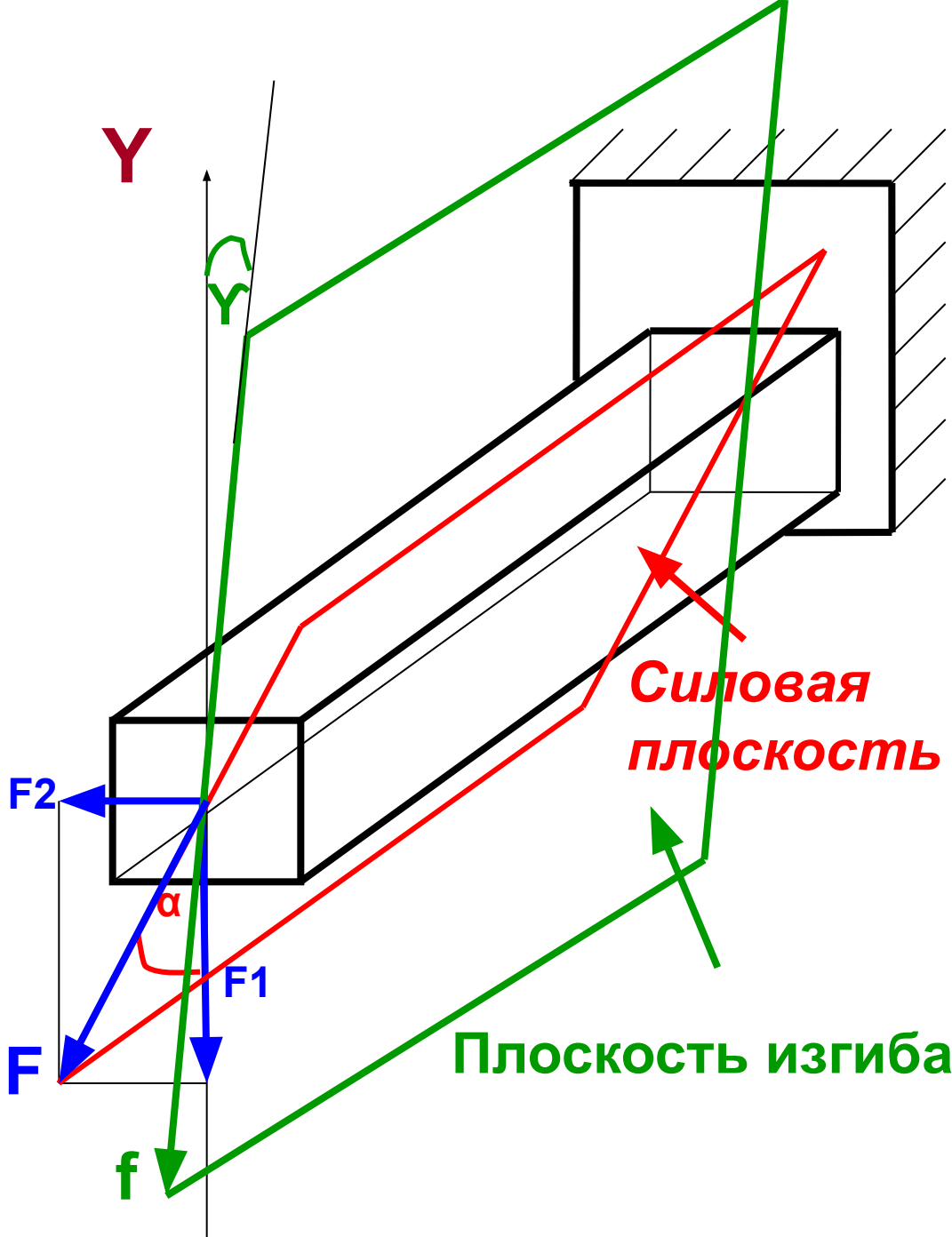
Для этого сначала все нагрузки раскладываются на составляющие, действующие в плоскостях XZ и ZY , затем находят отдельно перемещения U и V в этих плоскостях.

После этого определяют полный прогиб по теореме Пифагора

$$f = \sqrt{u^2 + v^2}$$

и направление прогиба по формуле

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{u}{v}$$



Можно показать, что

$$\frac{u}{v} = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

то есть

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\gamma \neq \alpha$$

Таким образом, при косом изгибе, в отличие от прямого, силовая плоскость и плоскость изгиба не совпадают друг с другом.