

## *Урок 15. Точечная оценка числовой характеристики случайной величины, ее свойства.*

---

## *Определение.*

- Выборочная оценка, используемая в качестве приближенного значения неизвестной генеральной характеристики, называется ее точечной статистической оценкой.

|                                             |                                 |
|---------------------------------------------|---------------------------------|
| Генеральная совокупность, $\Gamma$          | Выборка, $V_n$                  |
| Генеральная характеристика, $\Theta$        | Точечная оценка, $\bar{\Theta}$ |
| Математическое ожидание, $MX$               | Выборочная средняя, $\bar{X}$   |
| Генеральная дисперсия, $DX$                 | Выборочная дисперсия, $S^2$     |
| Среднеквадратическое отклонение, $\sigma_x$ | Выборочное отклонение, $S$      |
| Вероятность, $P$                            | Относительная частота, $\omega$ |

$$\Theta \approx \bar{\Theta}$$

- **Вопрос: Как хорошо выбрано приближение?**
- **Свойства точечных оценок:**
- 1. **Точечная оценка называется состоятельной, если для любого значения  $\varepsilon > 0$  выполняется условие**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{\Theta} - \Theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

**Чем больше объем информации, тем оценка более состоятельна,  $V_n > 30\%$  от генеральной совокупности ( $\Gamma$ ).**

2. Оценка  $\bar{\Theta}$  называется несмещенной, если для любого фиксированного числа наблюдений  $n$  выполняется условие:

---

$$M(\bar{\Theta}_n) = \Theta$$

**т.е. среднее значение оценки совпадает с точным значением генеральной характеристики.**

3. Несмещенная оценка генеральной характеристики называется эффективной, если она среди всех несмещенных оценок той же характеристики обладает наименьшей дисперсией.

| Закон<br>распределения                                                                                          | $\min \bar{X}$       | $\min \bar{DX}$      |   |   |   |     |   |                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|---|---|---|-----|---|--------------------|
| Нормальный<br>закон<br>распределения                                                                            | $\frac{\sigma^2}{n}$ | $\frac{\sigma^4}{n}$ |   |   |   |     |   |                    |
| <table border="1"> <tr> <td>X</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>P</td><td>p</td><td>1-p</td></tr> </table> | X                    | 1                    | 0 | P | p | 1-p | - | $\frac{p(1-p)}{n}$ |
| X                                                                                                               | 1                    | 0                    |   |   |   |     |   |                    |
| P                                                                                                               | p                    | 1-p                  |   |   |   |     |   |                    |

## ***Задача.***

---

- Пусть генеральную совокупность образуют 5 чисел: -2;-1;0;2;6.
- 1. Вычислить генеральное среднее и генеральную дисперсию;
- 2. Составить все возможные выборки с возвратом объема  $n=2$ ;
- 3. Для каждой выборки определить выборочную среднюю и выборочную дисперсию;
- 4. Установить, какими свойствами обладают выборочные характеристики.

*Решение:*

1. Составить ряд распределения и вычислить генеральные характеристики:

|          |            |            |            |            |            |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>X</b> | <b>-2</b>  | <b>-1</b>  | <b>0</b>   | <b>2</b>   | <b>6</b>   |
| <b>P</b> | <b>1/5</b> | <b>1/5</b> | <b>1/5</b> | <b>1/5</b> | <b>1/5</b> |

$$MX=1/5(-2-1+0+2+6)=1$$

$$DX=1/5((-2-1)^2+(-1-1)^2+(0-1)^2+(2-1)^2+(6-1)^2)=8$$

2. Составить все возможные выборки с возвратом объема  $n=2$  и вычислить для каждой выборочную среднюю и выборочную дисперсию, заполнив таблицу:

| Выборка<br>$X_1 \quad X_2$ | $P(x_1; x_2)$ | $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ | $\left(\bar{X}\right)^2$ | $\bar{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ | $DX = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2$ |
|----------------------------|---------------|---------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| -2   -2                    | 1/25          | -2                              | 4                        | 4                                     | 0                              |



**3. Построить ряд распределения выборочной средней и найти ее математическое ожидание:4.**

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\bar{X}$ | -2   | -3/2 | -1   | -1/2 | 0    | 1/2  | 1    | 2    | 5/2  | 3    | 4    | 6    |
| $P$       | 1/25 | 2/25 | 3/25 | 2/25 | 3/25 | 2/25 | 2/25 | 3/25 | 2/25 | 2/25 | 2/25 | 1/25 |

$$M \bar{X} = \frac{1}{25} (-2 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \frac{5}{2} \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1) = 1$$

**Аналогично, построить ряд распределения выборочных дисперсий и найти их математическое ожидание.**

5. Определить, какими свойствами обладают выборочные характеристики.
- Состоятельность:  $V(\Gamma)=5$ ;  $V_{n=2} (2/5)*100\%=40\%>30\%$ , следовательно оценки состоятельны.

- Несмещенность:  $M(\bar{X}) = MX = 1$

$$M(D\bar{X}) \neq DX$$

Выборочная средняя несмещенная.

Выборочная дисперсия смещенная.

■ **Эффективность.**  $\min \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{8}{5} = 1,6$

**Среди всех выборочных дисперсий нет значения, равного 1,6, следовательно выборочная средняя не эффективна.**

| Точечная<br>оценка | состоятель<br>ность | несмещенн<br>ость | эффектив<br>ность |
|--------------------|---------------------|-------------------|-------------------|
| $\bar{X}$          | +                   | +                 | -                 |
| $\bar{DX}$         | +                   | -                 | -                 |