

Математическая логика и теория алгоритмов

В настоящее время можно выделить несколько основных значений логики:

Логика – последовательная связь предметов и явлений окружающего мира. Типичными примерами употребления рассматриваемого термина в таком значении являются выражения «логика вещей», «логика исторического развития», «логика

Логика – порожденная логической последовательностью в действиях человека. Например, логика поступка, логика поведения.

Психология изучает мышление как один из психи-ческих процессов наряду с эмоциями, волей и т. д. Она уделяет значительное внимание изучению как механизмов возникновения того или иного опре-деленного типа мышления, так и непосредствен-ное проявление этих типов мышления на практике. Однако психологию не интересует истинность этих типов мышления, наоборот, ее предметом высту-пает исследование отклоняющихся от

Физиология раскрывает механизмы, которые обуславливают процесс мышления. При этом ее мало интересует отражение действительности, возникающее в процессе мышления.

Логика – закономерности в связях и развитии мыс-ли. В данном случае в качестве примеров можно привести такие выражения, как «женская логика», «железная логика», «логика рассуждения». **Логика** – наука о структуре и закономерностях правильного мышления.

Необходимо отметить отличие предмета логики от предмета других наук о мышлении.

Философия исследует мышление в целом. Она ре-шает вопрос об отношении человека, а, следова-тельно, его мышления к окружающему миру. При этом философию мало интересуют те механизмы, на основе которых формируется человеческое мышление.

Своеобразие логики заключается в том, что она изучает мышление, его содержание, формы, законы, истинность. Поэтому более точным определением логики как науки будет следующее высказывание: **логика** это наука о законах и формах **правильного рассуждения**, на основе которых получаем **правильные выводы**, наука о **методах познания**. Логика занимается формальными рассуждениями безотносительно к их содержанию. Отличают **правильные** (истинные) и **неправильные** (ложные) утверждения.

Софизм (от греч. σοφισμα, «мастерство, умение, хитрая выдумка, уловка, мудрость») — ложное высказывание, которое, тем не менее, при поверхностном рассмотрении кажется правильным. Софизм основан на преднамеренном, сознательном нарушении правил логики. Это отличает его от паралогизма и апории. Логические ошибки, допускаемые в доказательстве, как и в рассуждениях вообще непреднамеренно, называются **паралогизмы** (от греч. paralogismos-неправильное рассуждение). **АПОРИЯ** (от греч. aporia — затруднение, недоумение) — трудноразрешимая проблема,

Софизм Эватла

У древнегреческого **софиста Протагора** учился **со-фистике** и в том числе **судебному красноречию** не-кий Эватл. По заключенному между ними договору Эватл должен был заплатить за обучение 10 тысяч драхм только в том случае, если выиграет свой первый судебный процесс. В случае проигрыша первого судебного дела он вообще не был обязан платить.

Однако, закончив обучение, Эватл не стал участвовать в судебных тяжбах. Как следствие, он считал себя свободным от уплаты за учебу. Это длилось довольно долго,

Таким образом, должен был состояться первый судебный процесс Эватла.

Протагор привёл следующую аргументацию:

«Каким бы ни было решение суда, Эватл должен будет заплатить. Он либо выиграет свой первый процесс, либо проиграет. Если выиграет, то заплатит по договору, если проиграет, заплатит по решению суда».

Эватл возражал: «Ни в том, ни в другом случае я не должен платить. Если я выиграю, то я не должен платить по решению суда, если проиграю, то по договору».

Апории Зенона и проблема движения

Ахилл и черепаха. Ахилл — выдающийся спортсмен. Черепаха, как известно, одно из самых медлительных животных. Тем не менее Зенон утверждал, что Ахилл проиграет черепахе состязание в беге. Примем следующие условия. Пусть Ахилла отделяет от финиша расстояние 1, а черепаху — $\frac{1}{2}$. Двигаться Ахилл и черепаха начинают одновременно. Пусть для определенности Ахилл бежит в 2 раза быстрее черепахи. Тогда, пробежав расстояние $\frac{1}{2}$, Ахилл обнаружит, что черепаха успела за то же время преодолеть отрезок $\frac{1}{4}$ и по-прежнему находится впереди

Далее картина повторяется: пробежав четвертую часть пути, Ахилл увидит черепаху на одной восьмой части пути впереди себя и т. д. Следовательно, всякий раз, когда Ахилл преодолевает отделяющее его от черепахи расстояние, последняя успевает поползти от него и по-прежнему остается впереди. Таким образом, Ахилл никогда не догонит черепаху. Начав движение, Ахилл никогда не сможет его завершить. Принципиальная незавершаемость данной последовательности заключается в том, что в ней *отсутствует последний элемент*. Всякий раз, указав очередной член последовательности, мы можем указать и

Дихотомия. Для того, чтобы пройти весь путь, движущееся тело сначала должно пройти половину пути, но чтобы преодолеть эту половину, надо пройти половину половины и т. д. до бесконечности. Иными словами, при тех же условиях, что и в предыдущем случае, мы будем иметь дело с перевернутым рядом точек: $(\frac{1}{2})^n, \dots, (\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^1$. Если в случае апории *Ахилл и черепаха* соответствующий ряд не имел последней точки, то в *Дихотомии* этот ряд не имеет *первой* точки. Следовательно, заключает Зенон, движение не может начаться. А поскольку движение не только не может закончиться, но и не может начаться,

Существует легенда, о которой вспоминает
А. С. Пушкин в стихотворении «Движение»:

*Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце
ходит,*

Однако ж прав упрямый Галилей.

Представим себе, что по дороге в одном
направле-нии движутся быстроногий Ахилл и
две черепахи, из которых Черепаха-1

Можно показать, что Ахилл не сможет перегнать Черепаху-1. За то время, как Ахилл пробежит разделяющее их вначале расстояние, Черепаха-1 успеет уползти несколько вперед и такое положение будет бесконечно повторяться. Ахилл будет все ближе и ближе к Черепахе-1, но никогда не сможет ее пере-гнать. Такой вывод, конечно же, противоречит нашему опыту, но логического противоречия у нас пока нет.

Пусть, однако, Ахилл примется догонять более дальнюю Черепаху-2, не обращая никакого внимания на ближнюю. Можно утверждать, что Ахилл сумеет вплотную приблизиться к Черепахе-2, но это означает, что он перегонит Черепаху-1. Теперь мы приходим уже к

Проанализировав более тщательно две приведенные апории, мы обнаружим, что обе они опираются на допущение о *непрерывности* пространства и времени в смысле их *бесконечной делимости*. Такое допущение непрерывности отличается от современного, но имело место в древности. Без допущения тезиса о том, что любой пространственный или временной интервал можно разделить на меньшие по длине интервалы, обе апории рушатся.

Различают: формальную логику (классическая логика), индуктивную логику, символическую логику, (Дж. Буль предложил логику рассуждений безотносительно к содержанию определить формальным символическим языком **формальной логики**, утверждениям присваиваются абстрактные значения True (**истина**) или False (**ложь**), прагматистскую логику. В конце XIX – начале XX в.в., возникла логическая теория, получившая название математической логики. Со временем это направление получило название классической логики. Разнообразные неклассические направления,

Классическая логика основывается на принципе, согласно которому каждое высказывание является либо истинным, либо ложным. Это так называемый принцип двужначности. Логику, основанную на этом принципе, называют **двужначной**. Ей противопоставляют **многозначные системы**. В последних наряду с истинными и ложными утверждениями допускаются также разного рода неопределенные суждения, учет которых не только усложняет, но и меняет всю картину. В 1920 г. Я. Лукасевичем была предложена **трехзначная логика**, основанная на предположении, что высказывания бывают

Логика входит в состав фундаментальных математических дисциплин современной информатики, объединяемых в **дискретной математике**.

Логика связана с **алгоритмизацией и автоматическим решением задач**.

Важнейшим достижением логики в программировании являются теоремы, которые разработаны на основе логики.

Программируемая функция. Логика позволяет определить верный путь для достижения истинных знаний, а также выявить последствия, к которым приводит неправильный ход рассуждения.

Мировоззренческая функция. Логика влияет на формирование человеческого мышления, которое, в свою очередь, определяет жизненную позицию человека.

Методологическая функция. Следует отметить, что законы логики играют важную роль в разработке методологий различных наук. В то же время логическая теория также является методом познания.

Идеологическая функция. Логика часто используется в идеологических целях в силу своих внутренних антагонизмов и противоречий (например, между материализмом и идеализмом, диалектикой и

Современные приложения логики - проектирование циф-ровых схем, программирование экспертных систем, уп-равление базами данных, логическое управление.

Различают два основных раздела математической логики: **логика высказываний** и **логика предикатов**.

В **логике высказываний** рассуждения из **вербальной** фор-мы преобразуются в символическую форму и определяю-тся основные законы правильных рассуждений. Законы позволяют абстрагироваться от смысла конкретных высказываний, выполнить анализ и алгебраические преобразо-вания высказываний в символической форме.

В **логике предикатов** рассматриваются законы

Логика высказываний

Раздел логики, в котором изучаются истинностные взаимосвязи между высказываниями. **Высказывания** (пропозиции, простые **предложе-ния**) рассматриваются только с точки зрения их истинности или ложности, безотносительно к их содержанию.

Формулы высказываний

Простые высказывания – истинные либо ложные по смыслу простые предложения. Примерами простых высказываний являются:

- 1) **свойства** объектов,
5-число, Петров высокий, фрукт красный.

Даже, если мы никогда не видели Петрова и ябло-ка, мы верим, что это истина и верим в то, что фрукт красный.

2) **отношения** между объектами, *Олег брат Сергея, 5 больше 7, прямая на плоскости.*

3) Двухзначные **события** в технике, в природе, в жизни – *контакт F замкнут, двигатель включен, дождь идет, Иванов болен, ...*

А почему замкнут – истина, а разомкнут – ложь? На практике нам может быть важнее считать, что истинным является **инверсный смысл** – *разомк-нутый* контакт.

Смысл высказываний для практических приложений может иметь важное значение, но для формальной логики основная цель состоит в формальной записи рассуждений и обосновании правильных рассуждений при любых значениях истинности.

Рассуждение “Если $(3 > 5)$ и $(5 > 7)$, то $(3 > 7)$ ” формально правильное и при ложных посылках $3 > 5$, $5 > 7$ и $3 > 7$, если считаем их истинными.

Также можно строить неправильные рассуждения при истинных посылках. Таким образом, различаем **правильность** и **истинность** рассуждений. В логике высказываний исследуется формальная **ис-**

Символическая запись на языке логики позволяет избежать двусмысленности, свойственной рассуждениям в естественном языке.

Синтаксис языка логики – формальная запись структуры рассуждений. **Семантика** языка логики – правильные (истинные – T безотносительно к информационному полю) или неправильные (ложные – F безотносительно к информационному полю) утверждения и рассуждения. Простые высказывания обозначаются буквами – $A, B, C, \dots$ и называются **атомами**. Значения простых высказываний и соответствующих символов $\{T, F\}$ не связаны с каким-либо смыслом.

Составные высказывания истинные или ложные состоят из простых высказываний, которые разделяются синтаксически.

Составные высказывания определяются **формулами**, состоящими из атомов и символов, обозначающих связи безотносительно к их содержанию и конкретному смыслу. Элементарные формулы из одного или двух атомов (простых высказываний) обозначают **связки** и однозначно определяются **таблицами истинности**.

1) **Конъюнкция ($\wedge$)**

*“Составное высказывание $A \wedge B$ истинное тогда, когда A истинно **И** B истинно”.*

Если класс объектов Q определяется двумя свойствами – высказываниями A и B , или **двумя битами информации**, то его можно определить высказыванием-конъюнкцией $Q = A \wedge B$. По отношению к этому классу все множество объектов Q называют **универсальным** множеством.

Пример класса.

“четное И положительное число” = “Некоторое число четное (А) И положительное число”(В).

Пример отношений.

“Сидоров И Петров в школе”.

В естественном языке связка **И** может явно отсутствовать, вместо нее может использоваться противопоставление (*число четное, но отрицательное*), знаки препинания – запятые, точки,

Пример *Период* подлежащих и прилагательных.

Служащие мужского пола с непрерывным стажем работы не меньше пяти лет, получающие пенсионную прибавку.

Рассматривается универсальный класс Служащих.

Служащие – мужчины (m). Служащие, имеющие стаж работы не менее 5 лет (f), Служащие получают пенсионную прибавку (d).

Другая запись этого утверждения через запятые (точки), что эквивалентно связке **И**.

Формула для этого утверждения – $m \& f \& d$ определяет класс служащих со свойствами m , d и отношением f .

2) **Дизъюнкция** (ИЛИ, $\vee$) - соединительное ИЛИ.

“Составное высказывание ($A \vee B$) истинное, когда **А ИЛИ В истинны**”.

Пример.

“В преступлении могли участвовать A , B , C ” – формула рассуждения $A \& B \& C$ скорее всего неправильная и выби-раем $A \vee B \vee C$, так как некоторые из $\{A, B, C\}$ могли не участвовать в преступлении.

3) **отрицание** (**НЕ**, $\neg$)

Если высказывание “*А истинно*” = *А*,
то “**НЕ А - ложно**” = $\neg A$.

Забастовка продолжается (*А*) и забастовка не продолжается ($\neg A$).

4) **Эквивалентность** ($\sim$)

“Высказывание *А* $\sim$ *В* истинно тогда, когда *А* **И** *В* истинны **ИЛИ** *А* **И** *В* ложны”. Предложение можно записать следующим равенством

$$(A \sim B) = (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B).$$

Пример.

“Сидоров ходит в школу **ТАКЖЕ, КАК** Петров” = “Сидоров **И** Петров в школе **ИЛИ** Сидорова **НЕТ** в школе **И** Петрова **НЕТ** в школе”.

5) **Исключающее ИЛИ** (ЛИБО, ЛИБО, $\oplus$) –
разделительное ИЛИ.

Связка ЛИБО (**ИЛИ /НО НЕИ**)

“А либо В истинно ($A \oplus B$) тогда и только тогда, когда А
ИЛИ В истинны, но А **И** В ложны” = $(A \oplus B) \equiv ((A \vee B) \& \neg$
 $(A \& B))$. Здесь используем тождество.

“Петров **ЛИБО** Семенов в школе” = “**ЛИБО** Петров в
школе, **ЛИБО** Семенов в школе” = “Петров **ИЛИ**
Семенов в школе, **НО НЕ** вместе”.

6) **Импликация** ($\rightarrow$)

ЕСЛИ А истинно, **ТО** В истинно. Здесь А – посылка, а
В – следствие.

Пример.

“**ЕСЛИ** Петров в школе, **ТО** Сидоров тоже в школе”
= “А нет в школе **ИЛИ** В в школе”.

Сходство импликации с другими связками указывает на то, что при переходе к символической записи утверждений необходимо проверять по таблице истинности все условия. Неправильный выбор связки приводит к ошибочным рассуждениям.

В математике утверждение "если p , то q " читается как " p **достаточно** для q " = " q **необходимо** для p ".

Если выполняется *необходимость* и *достаточность* p для q , то утверждения p и q эквивалентны, что можно записать в следующей символической форме

$$((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)) = (p \sim q).$$

Парадоксы импликации — это парадоксы, возникающие в связи с содержанием условных утверждений классической логики. Главная функция этих утверждений — обоснование одних утверждений ссылкой на другие.

В классической логике условное утверждение имеет форму «Если A , то B ». Оно ложно только в том случае, если A истинно, а B ложно, и истинно во всех остальных случаях. Содержание утверждений A и B при этом во внимание не принимается. Если даже они никак не связаны друг с другом по смыслу, составленное из них условное утверждение может быть истинным.

Так истолкованное условное утверждение носит название «материальной импликации». Оно обладает следующими особенностями:

Если B истинно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности A . То есть, истинное утверждение может быть обосновано с помощью любого утверждения. Пример: утверждение «Если дважды два равно пяти, то снег бел» является

Если A ложно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности B . То есть, с помощью ложного утверждения можно обосновать все, что угодно. Пример: утверждение «Если дважды два равно пяти, то снег красный» является истинным. Если A является противоречивым утверждением, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности B . То есть, из противоречивого утверждения можно вывести все, что угодно. Пример: утверждение «Если дважды два равно четырем и дважды два не равно четырем, то Луна сделана из зеленого сыра» является истинным.

Если B является тавтологией, то истинность всего условно-го утверждения уже не зависит от истинности A . То есть логические законы следуют из любых утверждений.

Пример: утверждение «Если снег бел, то дважды два равно четырем или дважды два не равно четырем» является истинным.

Эта особенность материальной импликации является прямым следствием двух основных допущений классической логики:

1) всякое утверждение либо истинно, либо ложно, а треть-его не дано:

2) истинностное значение сложного утверждения зависит только от истинностных значений входящих в него простых утверждений, а также от характера связи между ними, и не зависит от их содержания.

В рамках этих двух допущений более удачное построение условных утверждений невозможно.

Подобное положение дел, отстаиваемое классической логикой, получило название

С целью решения этих парадоксов была предложена «строгая импликация», которая как-то отражала связь простых утверждений, составляющих условное утверждение, по смыслу. Правда, потом оказалось, что строгая импликация сама не свободна от парадоксов. Поэтому был предложен другой вариант условной связи — «реле-вантная импликация», которая разрешает не только парадоксы материальной импликации, но и парадоксы строгой импликации. Этой импликацией можно связывать только такие утверждения, которые имеют общее содержание.

Импликация на примере дедукции

Что собой представляет эта импликация, можно посмотреть на примере дедукции — метода умозаключений, в котором применяются условные

Классическим примером дедукции является следующее:

все люди — смертны,

все греки — люди,

следовательно, все греки — смертны.

Условная связь этих утверждений станет очевидна, если мы представим их в следующем виде:

если все люди смертны

и если все греки — люди,

то все греки смертны. В логике это умозаключение имеет следующую форму: если первое, то второе; имеет место первое, значит, есть и второе. Такая форма дедукции является правильной. Неправильной дедукцией будет такая форма: если первое, то второе; имеет место второе; значит, есть и первое. Если вложить в эту форму прежнее содержание, то

Ясно, что это умозаключение является **неправильным**.
В качестве классификационного признака берется смерт-ность объектов. Первая посылка приписывает этот при-знак наиболее общему классу данной классификации, то есть классу людей. Само собой, что следующие, более частные классы данной классификации также будут обла-дать этим признаком. Поэтому когда вторая посылка уста-навливает принадлежность греков к данной классифика-ции, то тем самым она наделяет их и признаком смерт-ности. Заключительный вывод только констатирует это, не внося в рассуждения ничего нового.

В свою очередь, в неправильной форме данной дедукции вторая посылка ставит более частный класс на один уровень с исходным классом, из которого и

Определение. Формула правильно построена (**Well formed formula – Wff**), если содержит только перечисленные связи, причем бинарные связи правильно попарно соединяют атомы и формулы. В дальнейшем предполагаются по умолчанию только **Wff** формулы. Формальная запись рассуждения в **Wff** позволяет устранить неопределенности, свойственные естественному языку. При этом сохраняется **независимость и различимость** простых утверждений в составном высказывании, благодаря применению различных обозначений. Следствием этого являются:

- 1) Возможность применения формул для исследования правильности рассуждений и преобразований рассуждений независимо от содержательного смысла.

При возвращении к содержательной форме сохраняется истинный смысл исходного утверждения.

2) Возможность соединения в одном рассуждении высказываний из различных классов – событий, свойств и отношений.

Примеры.

1. Если яблоко зеленое (A), то оно кислое (B) $= A \rightarrow B$
 $=$

$= \neg A \vee B$ = “яблоко не зеленое ($\neg A$) или кислое (B)”.

Здесь A , B разные свойства для одного класса и пример преобразования формулы, сохраняющей истинный смысл рассуждения.

2. “Если влажность высокая (A), то после полудня (B) или (либо) вечером (C) будет дождь ($B \oplus C$)”.

Высказывания A , B , C – события из разных классов,
 $A \rightarrow (B \oplus C)$.

3. “Лечение не будет найдено (A), пока не определены причины болезни (B) и не найдены новые лекарства (C)”.

Высказывания A, B, C – события из разных классов,

4. “Требуется (необходимы !) храбрость (A) и мастер-ство (B), чтобы подняться на эту гору (C)”.

A, B – свойства, C – событие, $C \rightarrow A \& B$.

5. “Для того, чтобы число было нечетным (A), необходимо, чтобы число было простым (B) и не делилось на два (C)”.

A, B, C – свойства чисел, $A \rightarrow B \& C$.

6. “Если $(2 < 5)$ (A) и $(5 > 10)$ (B), то $(2 \neq 10)$ (C)”.

A, B, C – отношения в классе чисел. $A \& \neg B \rightarrow C$.

Интерпретация логических формул

Определение. Пусть задана формула $\Phi(A, B)$, где A, B – атомы. Подстановка конкретных высказываний (или просто их значений F или T) и вычисление истинности составного высказывания называется

интерпретацией формулы

- Формулы разделяют на:
- 1) **выполнимые** – существует интерпретация, при которой формула истинна:
 - а) если формула Φ истинна в интерпретации I , то $\Phi(I)$ выполнима в I , а I называется **моделью** Φ ;
 - б) если формула Φ ложна в I , то $\Phi(I)$ опровергается в I .
 - 2) **тавтологии (общезначимые)** – формулы, истинные на всех наборах атомов;
 - 3) **противоречия** – ложные формулы на всех наборах атомов.

Заменяя содержательные рассуждения формулами, получаем возможность проверить истинность утверждений в общем случае, когда смысл утверждений не очевиден и зависит от истинности простых высказываний. Формулы решаются следующие задачи:

1) Проблема автоматической (алгоритмической) проверки формулы на **выполнимость** (Satisfiability Automation Testing – **SAT**). Если формула не выполнима, то является противоречием.

2) Проблема **разрешимости** в логике – проверить, является ли формула **тавтологией** (общезначимой).

Обе задачи связаны с интерпретацией значения формулы. Формулу $\Phi(A, B)$ называют **логической функцией**, если использовать логическую переменную $F = \Phi(A, B)$ как значение формулы для

Пример.

Требуется проверить правильность рассуждения – общезначимость формулы.

“Если я пойду завтра на первое занятие (a), то должен буду встать рано (b), а если я пойду вечером на танцы (c), то лягу спать поздно (d). Если я лягу поздно (d), а встану рано (b), то я должен буду довольствоваться пятью часами сна (e). Но я не в состоянии обойтись пятью часами сна ($\neg e$). Следовательно, я должен или пропустить первое занятие ($\neg a$), или не ходить на танцы ($\neg c$)”

$$(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) = (\neg a \vee b)(\neg c \vee d)$$

$$db \rightarrow e = \neg d \vee \neg b \vee e$$

$$\neg e$$

1.	$\neg a \vee b$	b		
2.	$\neg c \vee d$	d		
3.	$\neg d \vee \neg b \vee e$	$\neg d \vee \neg b \vee e$	e	
4.	$\neg e$	$\neg e$	$\neg e$	
5.	$\neg(\neg a \vee \neg c)$	ac		

противоречие, следовательно, заключение есть логическое следствие имеющихся посылок.

Пример.

Требуется определить набор значений простых высказываний, при котором рассуждение ложно и **уточнить рассуждение**, приводя его к тавтологии.

Проверим истинность следующего рассуждения.

Студент пойдет домой (a) или останется в институте (b),
($a \vee b$).

Студент решил остаться в институте (b),
следовательно, он не пойдет домой, ($(\neg a \vee b) \& b \rightarrow \neg a$).
Формула составного высказывания, ($(\neg a \vee b) \& b \rightarrow \neg a$).

Сокращенным способом выбираем значения атомов, опровергающих это утверждение:

$\neg a = F$ при $((a \vee b) \& b) = T$. При $b = T$ выражение истинно.

Таким образом, исходная формула может быть ложной и рассуждение не верно.

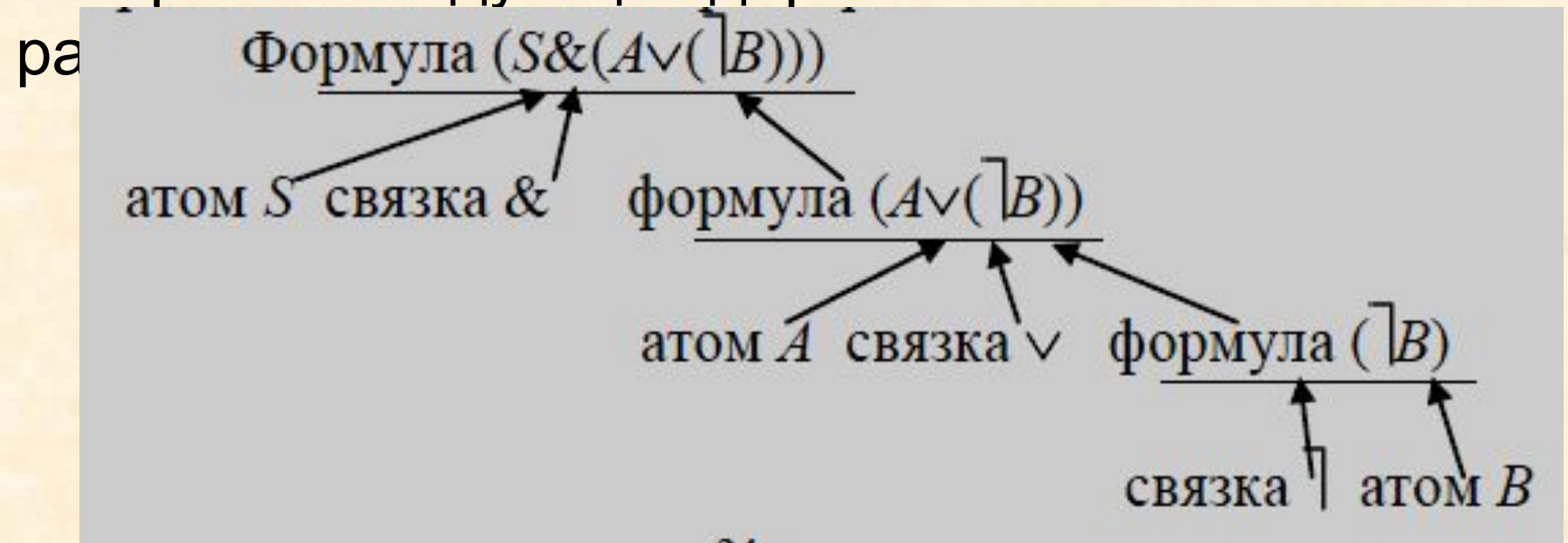
Действительно, “ошибка” в выборе связки ИЛИ.

Должна быть связка ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ (a либо b), что можно было уточнить при записи формулы для первого высказывания. $((a \oplus b) \& b) \rightarrow \neg a$.

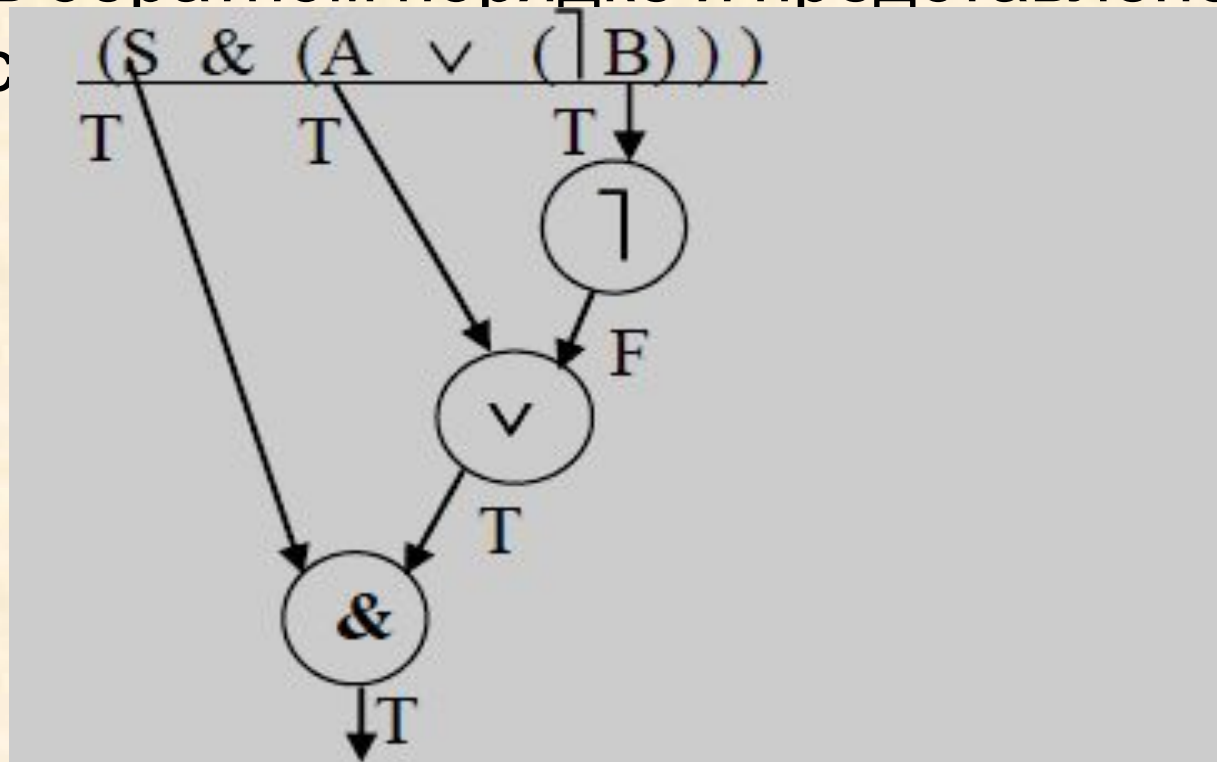
Инверсное составное высказывание $\neg \Phi$ является **про-тиворечием** – на всех интерпретациях ложно, если Φ – тавтология.

Если требуется доказать общезначимость формулы, то для инверсной формулы (**обратный метод**) проверяется выполнимость (применение обратного метода решения с использованием SAT-алгоритмов).

Для логической формулы $F=(S \& (A \vee (\neg B)))$ может быть построено следующее дерево синтаксического



Вычисление истинности при интерпретации выполняется в обратном порядке и представлено графом вычис



Если в формуле N атомов, то таблица истинности содержит 2^N условий (наборов значений) истинности атомов. Таким образом, в общем случае, когда формула противоречива, для решения SAT-проблемы и проверки общезначимости требуется перебор из 2^N

Принцип подстановки

Утверждение 1. Если формула $\Phi(A)$ – тавтология и формула $\Phi(B)=\Phi(A/B)$ получена из $\Phi(A)$ при подстановке формулы B вместо любого вхождения символа A в $\Phi(A)$ (обозначим A/B), то формула $\Phi(B)=\Phi(A/B)$ тоже тавтология.

Следствие. Если $\Phi(A)$ тавтология, то $\Phi(A \vee \neg A) = \Phi(\neg A)$ тавтология.

Пример.

Доказать, что формула $\Phi(A, B) = A \rightarrow (B \vee A)$ тавтология.

Сделаем подстановку $\Phi(A, B) = \Phi(A/\neg A, B/\neg B) = \neg A \rightarrow (\neg B \vee \neg A) = A \vee \neg B \vee \neg A$, полученная

Определение. Две формулы $A(x_1, \dots, x_n)$ и $B(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ – атомы, называются **равносильными** (тождественно равными), если при любых интерпретациях значения истинности совпадают.

В этом случае записывается *тождество*

$$A(x_1, \dots, x_n) \equiv B(x_1, \dots, x_n).$$

Лемма. Формулы $A(x_1, \dots, x_n)$ и $B(x_1, \dots, x_n)$ тождественно равны ($A=B$), если $A \sim B$ – тавтология.

Например, закон контрапозиции $(p \rightarrow q) \sim (\neg q \rightarrow \neg p)$ может быть записан в виде тождества $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Следствие. Тождество сохраняется при произвольных перестановках аргументов.

Например, закон контрапозиции $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ сохраняется при подстановках $(q/p, p/q)$.

Утверждение 2. (Принцип подстановки).

Пусть $\Phi(A)$ – формула, в которой выделена формула A и в результате замены формулы A на формулу B (A/B) получим формулу $\Phi(B)$, тогда: $\Phi(A) = \Phi(B)$, если $A = B$.

Алгебра логики высказываний

Утверждения в виде тождеств относятся к законам логики. Применение тождественных подстановок относятся к алгебраическим формальным преобразованиям.

Законы логики высказываний

1) Законы коммутативности - перестановка формул в симметричных связках $\&$, $\vee$

$$a \& b = b \& a;$$
$$a \vee b = b \vee a.$$

2) Законы ассоциативности - порядок применения бинарных связок и расстановка скобок

$$a \& (b \& c) = (a \& b) \& c;$$
$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$$

3) **Идемпотентность** – тождественное исключение эквивалентных формул в бинарных связках $\&$, $\vee$

$$a \vee a = a;$$

$$a \& a = a.$$

4) **Дистрибутивность** - распределительный закон для бинарных связок $\&$, $\vee$

$$a \& (b \vee c) = (a \& b) \vee (a \& c);$$

$$a \vee (b \& c) = (a \vee b) \& (a \vee c).$$

5) **Законы поглощения**

$$a \& (a \vee b) = a;$$

$$a \vee (a \& b) = a.$$

Булева алгебра высказываний

Алгебра логики (булева алгебра) определена на множестве высказываний $S = \{A, B, \dots\}$.

Булева алгебра высказываний – метод вычисления значений составных высказываний, определяемых формулами высказываний.

Дополним множество высказываний S двумя константами: $T=1$ и $F=0$. На множестве S справедливы законы нуля и единицы, что следует из таблиц истинности для бинарных связок $\&$, $\vee$:

6) **Законы нуля и единицы**

$$0 \vee a = a; \quad 1 \vee a = 1;$$

$$0 \& a = 0; \quad 1 \& a = a.$$

Для произвольного высказывания a и инверсии $\neg a$, которая, по определению связки НЕ, обозначает единственное высказывание в S для каждого a , выполняются следующие тождества:

7) **Законы дополнительного элемента**

$$a \vee \neg a = 1; \quad a \& \neg a = 0.$$

При этом также выполняются следующие законы, которые определяют свойства операции инверсии в алгебре логики:

8) **Закон двойного отрицания**

$$\neg(\neg a) = a.$$

9) **Законы двойственности** (правила де Моргана) – приведение инверсии к атомам

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b;$$

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b.$$

10) **Замена импликации бинарными связками $\wedge$, $\vee$**
 $a \rightarrow b = \neg a \vee b.$

11) **Замена эквивалентности**
 $a \sim b = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a) = (\neg a \vee b)(\neg b \vee a).$

12) **Замена исключающего ИЛИ**
 $a \oplus b = \neg(a \sim b) = \neg(a \rightarrow b)(b \rightarrow a) = (a \neg b) \vee (\neg a b).$

13) **Законы сокращения** – применяются для упрощения формул
 $a \vee (\neg a \& b) = a \vee b;$
 $a \& (\neg a \vee b) = a \& b.$

14) **Правило склеивания** – применяется для упрощения формул
 $(a \& b) \vee (\neg a \& b) = b.$

Законы алгебры логики позволяют применять систематические алгебраические методы преобразования формул логики, которые сводятся к тождественным подстановкам в соответствии с тождествами (1-14).

Атомы в формулах являются булевыми переменными и могут принимать значения $\{0,1\}$.
Логические связки могут быть заменены знаками (& - логическое умножение (), операция отрицания $\neg a$

Булеву алгебру можно использовать для проверки тождеств, тавтологий, в преобразованиях, упрощающих рассуждения.

Применение булевой алгебры для проверки тождеств

Можно выделить основные законы булевой алгебры и законы, которые могут быть доказаны с применением аксиом. К основным законам относят (1, 4, 6, 7)

Доказательство правила де Моргана

$$\neg(a \vee b) = \neg a \& \neg b.$$

Рассмотрим формулу $a \vee b \vee \neg a \& \neg b =$
дистрибутивный закон
 $= (a \vee b \vee \neg a) \& (a \vee b \vee \neg b) = 1$ закон
дополнительного элемента

Рассмотрим формулу $(a \vee b) \& \neg a \& \neg b =$
дистрибутивный закон
 $= a \& \neg a \& \neg b \vee \neg a \& b \& \neg b = 0$. закон дополнительного
элемента

Таким образом, получены тождества:

$$\begin{cases} a \vee b \vee \bar{a} \& \bar{b} = 1 \\ (a \vee b) \& \bar{a} \& \bar{b} = 0, \end{cases}$$

но согласно законам дополнительного элемента

$$c \vee \neg c = 1;$$

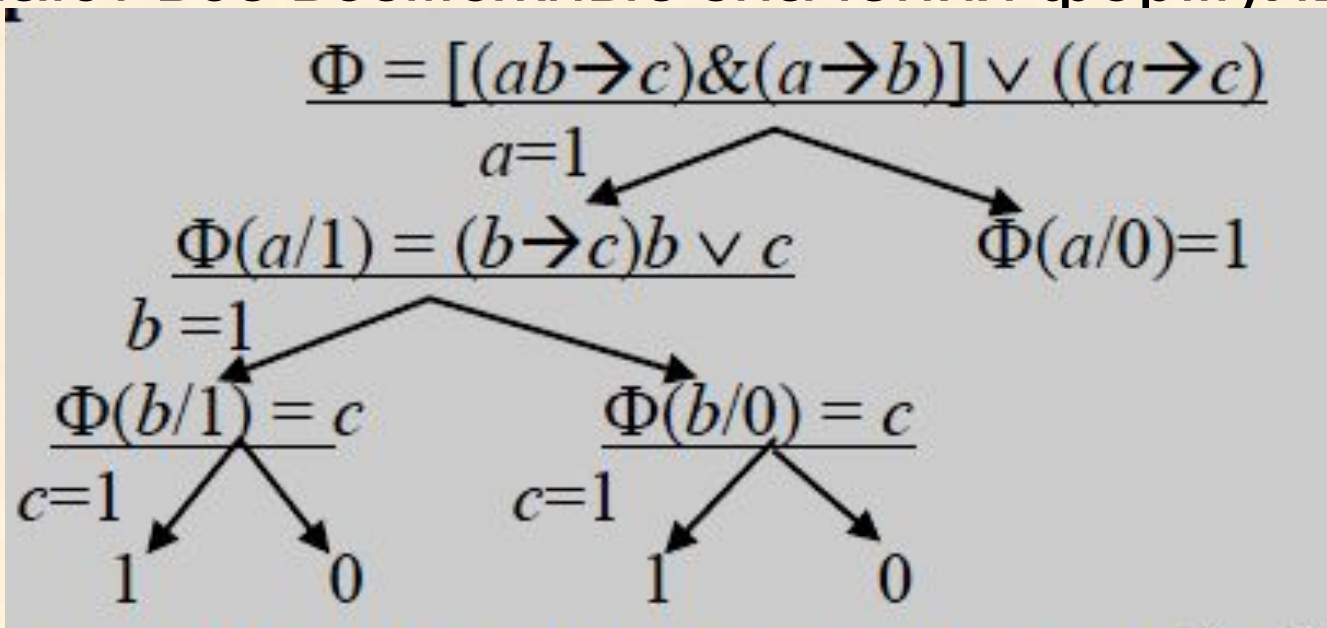
$$c \& \neg c = 0,$$

пусть $c = a \vee b$, тогда, из полученных тождеств,
следует, что

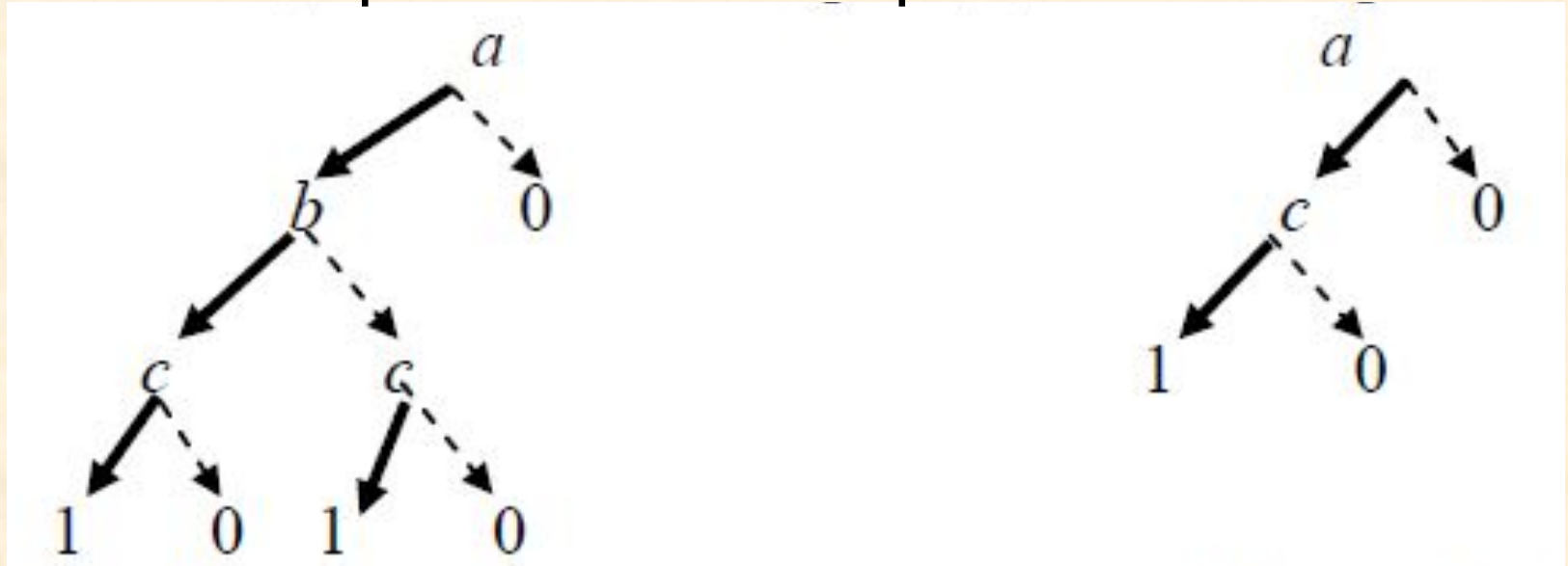
$\neg c = \neg(a \vee b) = \neg a \& \neg b$, что и требовалось доказать.

Применение алгебры для вычислений – метод Квайна

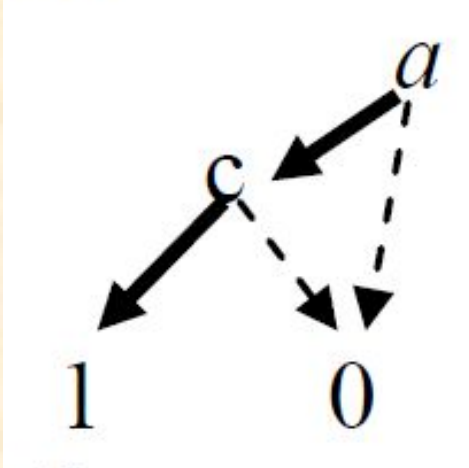
Метод Квайна заключается в следующем: последовательно подставляются значения истинности в формулу для аргументов и вычисляются значения истинности, или выполняются алгебраические преобразования формул до тех пор, пока не получим алгоритм вычислений строится в виде бинарного дерева (двоичной диаграммы) – концевые вершины обозначают все возможные значения формулы.



Двоичная диаграмма, построенная методом Квайна, может быть использована для вычислений при заданных наборах значений переменных.



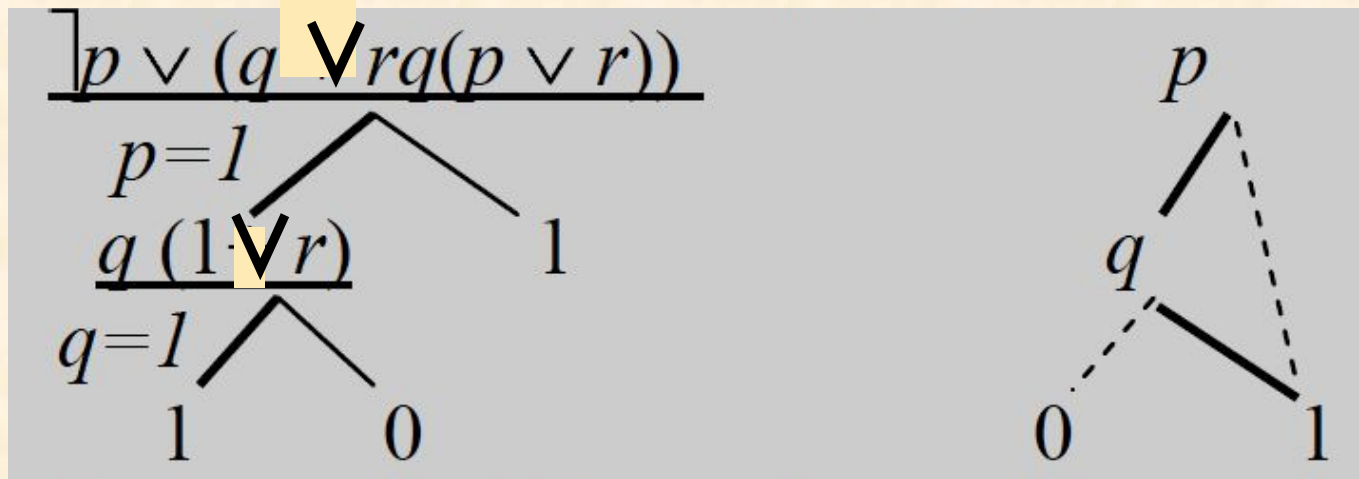
Двоичная бинарная диаграмма - **Binary Decision Diagram (BDD)** может быть получена сверткой бинарного дерева относительно значений истинности



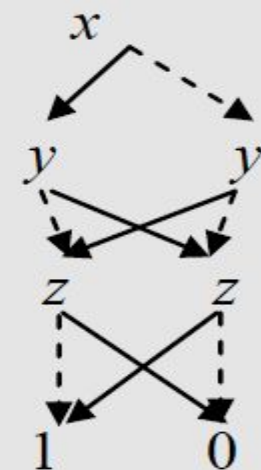
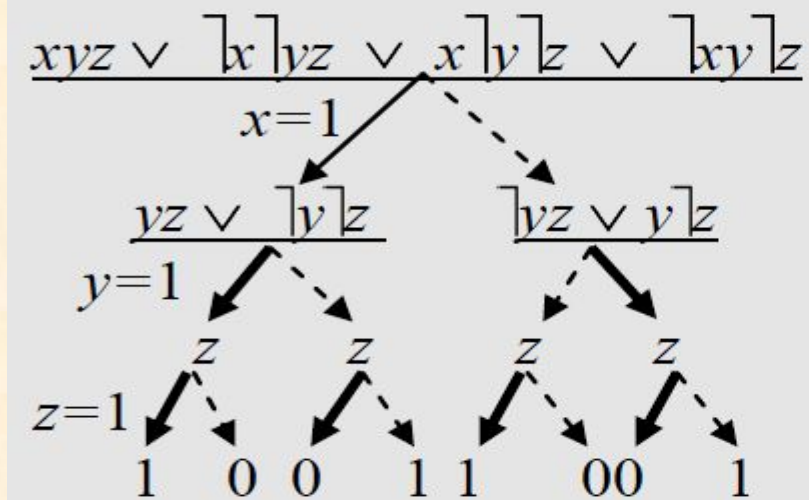
if (*a*)

if (*c*) $\Phi=1$;
 else $\Phi=0$;
 else $\Phi=0$.

Пример. Построить BDD для формулы



Пример. Построить BDD для функции суммирования



Применение алгебры для доказательства общезначимости

Утверждение 3. Если в результате тождественных алгебра-ических преобразований формула $\Phi(a, b, \dots)$ тождествен-но равна единице, то формула Φ - тавтология (*прямой ме-тод доказательства*).

Утверждение 4. Если в результате тождественных алгебра-ических преобразований формула $\neg\Phi(a, b, \dots)$ тождествен-но равна нулю, то формула Φ – тавтология (*обратный ме-тод доказательства*).

Пример - применение прямого метода.

Требуется проверить общезначимость формулы транзитивности

$$\begin{aligned} ((p \rightarrow r) \& (r \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) &= \neg(p \rightarrow r) \vee \neg(r \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q) = \\ &= p \neg r \vee r \neg q \vee \neg p \vee q = \neg r \vee r = 1. \end{aligned}$$

Пример - применение обратного метода.

$$\begin{aligned} \neg(((p \rightarrow r) \& (r \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)) &= (p \rightarrow r) \& (r \rightarrow q) \& \neg(p \rightarrow q) = \\ &= (\neg p \vee r) \& (\neg r \vee q) \& p \& \neg q = q \& \neg q \& p = 0. \end{aligned}$$

Т.е. $\neg\Phi=0$, значит формула Φ – тавтология.

6. SAT-проблема (прямой метод)

Преобразование формулы в ДНФ позволяет получить конъюнктивные термы, соответствующие выполнимым интерпретациям (наборам).

Проверка общезначимости формул (обратный метод)

Преобразование инверсии формулы $\neg\Phi$ в ДНФ позволяет опровергнуть общезначимость Φ обратным методом. ДНФ состоит из конъюнктивных термов, определяющих выполнимые интерпретации.

Пример. Проверить общезначимость следующей формулы

$$\Phi = (ab \vee \neg c)(a \neg b \vee \neg ac).$$

Инверсия этой формулы в алгебраической форме

$$\begin{aligned}\neg\Phi &= \neg((ab \vee \neg c)(a \neg b \vee \neg ac)) = \neg(ab) \vee \neg(a \neg b) \vee \neg(\neg ac) = \\ &= (\neg a \vee \neg b) \vee c \vee (a \vee b) \vee ac = \\ &= \neg ac \vee \neg bc \vee \neg aa \vee ba \vee \neg a \vee c \vee b \vee c.\end{aligned}$$

Можно использовать любой из термов для выбора интер-претации, в которой формула $\neg\Phi$ выполнима, а Φ не выполнима, например, для $\neg ac=1$ значения $a=0$ и $c=1$. Следовательно, формула Φ не общезначима.

Метод Девиса - Патнема (DP)

Решение SAT-проблемы

КНФ рассматривается как множество дизъюнктов

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}.$$

Алгоритм SAT включает формальные шаги в виде правил преобразования множества S :

1) Правило однолитерных дизъюнктов:

а) Если присутствуют однолитерные дизъюнкты L и дизъюнкты $L \vee A$, то дизъюнкты $L \vee A$ исключаются по закону поглощения $L \& (L \vee A) = L$;

б) Найдем для каждого однолитерного дизъюнкта L дизъюнкт, который содержит $\neg L$, тогда в дизъюнктах можно исключить $\neg L$ по закону сокращения $L \& (\neg L \vee A) = A$;

в) после преобразования дизъюнктов вычеркивается од-нолитерный дизъюнкт L , так как S выполнимо при $L=1$ и оставшееся множество дизъюнктов не зависит

2) **Правило чистых литер:**

Литера L – *чистая*, если во множестве дизъюнктов S не существует ни одного дизъюнкта с отрицанием ($\neg L$)
 $(L \vee s_1) \& (L \vee s_2) \& \dots \& (L \vee s_n) = (L \vee s_1 \& s_2 \& \dots \& s_n)$.

Вычеркиваются все дизъюнкты, содержащие L , так как S выполнимо при $L=1$, а оставшееся множество дизъюнктов не зависит от L .

3) **Если правила 1) и 2) не применимы**, то можно выбрать для одной из оставшихся литер значение 0 и 1, применить метод Квайна и проверить выполнение правил 1) и 2).

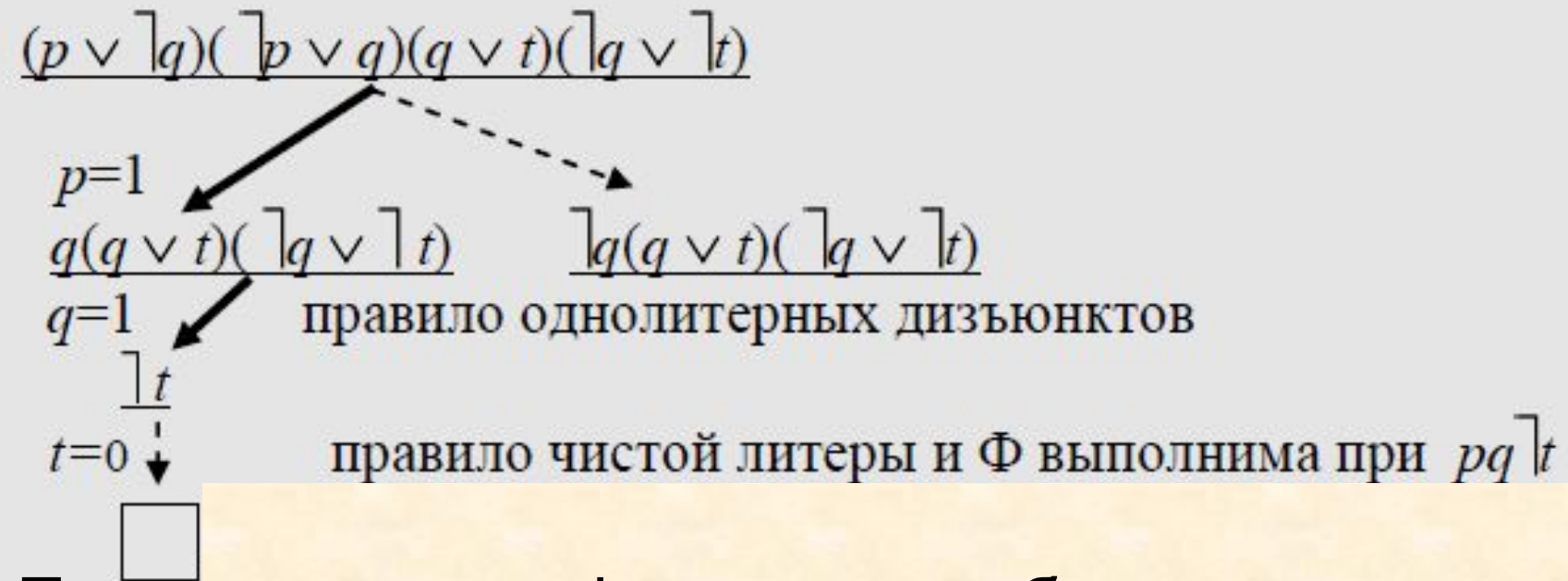
4) **Повторить правила 1) - 3)**, пока не будут получены пустая формула или противоречивые дизъюнкты на шаге 1а. Пустая формула обозначает, что при исключении литер $L_1 L_2 \dots L_m = 11 \dots 1$ найдена интерпретация, в которой **Φ выполняма**.

Пример.

Проверить выполнимость формулы

$$\Phi = (p \vee \neg q)(\neg p \vee q)(q \vee t)(\neg q \vee \neg t).$$

Правила Девиса - Патнема не применимы, поэтому на первом шаге используем метод Квайна



Получена пустая формула и выбрана интерпретация $pqt=110$, при которой формула Φ выполнима. Другие интерпретации можно найти по правой ветви дерева при $p=0$, например, при $pqt=001$.

Проверка формулы на общезначимость

Метод DP применим для проверки формулы на общезначимость обратным методом. Для опровержения достаточно найти хотя бы одну выполнимую интерпретацию SAT-алгоритмом для инверсной формулы $\neg\Phi$ в КНФ.

В этом случае формула $\neg\Phi$ выполнима и Φ не общезначима.

Если на шаге 1а останутся инверсные однолитерные

Пример. Проверить общезначимость закона транзитивности импликации

$$\begin{aligned}\Phi &= (((p \rightarrow r)(r \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)) = \\ &= \neg(p \rightarrow r) \vee \neg(r \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q) \quad \text{исключение} \\ &\quad \text{импликации}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg\Phi &= (p \rightarrow r)(r \rightarrow q)\neg(p \rightarrow q) = \quad \text{инверсия } \Phi \\ &= (\neg p \vee r)(\neg r \vee q)p \neg q \quad \text{исключение всех}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \neg p \vee r \quad p=1 \quad r \\
 \neg r \vee q \quad \rightarrow \quad \neg r \vee q \quad \rightarrow \quad \neg q \\
 p \\
 \neg q
 \end{array}
 \quad \square$$

применяя правило 1 для p и r , получим противоречие $q \& \neg q = 0$, следовательно, $\neg \Phi$ противоречие и Φ общезначима.

Пример.

Проверить общезначимость формулы
 $\Phi = (p \vee q) \& (p \vee \neg q) \& (r \vee q) \rightarrow (\neg r \& q).$

$$\neg \Phi = (p \vee q) \& (p \vee \neg q) \& (r \vee q) \& \neg(\neg r \& q)$$

$$\begin{array}{l}
 \neg p \vee r \quad p=1 \quad r \\
 \neg r \vee q \quad \rightarrow \quad \neg r \vee q \quad \rightarrow \quad \neg q \\
 p \\
 \neg q
 \end{array}
 \quad \square$$

$\neg\Phi$ выполнима при $p=1$ и $r=1$, следовательно, Φ не обще-значима.

Применение тавтологий в рассуждениях

Схемы рассуждений должны быть логически правильно построены, только тогда выводы могут быть признаны истинными.

Тавтологии являются формальными **схемами правильных рассуждений** и стратегией доказательства в математике (например, теоремы элементарной геометрии).

Рассуждения строятся в виде цепочки **общезначимых схем** рассуждений.

Доказательства общезначимости схем формируются алгебраически или DP-методом.

Некоторые простые схемы рассуждений:

1) Правило отделения

$$p(p \rightarrow q) \rightarrow q.$$

“Если условие p истинно и доказано, что из p всегда следует q , то следствие q истинно.”

$$(p(p \rightarrow q)) \rightarrow q = \neg(pq) \vee q = \neg p \vee \neg q \vee q = 1.$$

Очевидным обобщением правила является правило **modus ponens** (**MP**, лат. правило вывода), где p , $p \rightarrow q$ и q -тавтологии.

Остальные правила также применимы к тавтологиям.

2) Правило Евклида

$$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p.$$

“Если из предположения, что p ложно следует, что p истинно, то p истинно”.

$$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p = \neg p \vee p = 1.$$

3) Правило доказательства разбором случаев

$$(p \vee q)(p \rightarrow r)(q \rightarrow r) \rightarrow r.$$

“Доказывается утверждение r , выбираются по крайней мере два условия p и q (одно или оба истинные), для которых может быть доказано $(p \rightarrow r) \& (q \rightarrow r)$ тогда r истинное утверждение”

$$\begin{array}{l} \neg \Phi = (p \vee q)(p \rightarrow r)(q \rightarrow r) \neg r \\ \begin{array}{lll} (p \vee q) & (p \vee q) & q \\ (p \rightarrow r) = (\neg p \vee r) & \neg p & p=0 \\ (q \rightarrow r) = (\neg q \vee r) & \rightarrow & \neg q \end{array} \end{array} \quad \square$$

противоречие и Φ общезначима.

4) Правило контрапозиции (доказательство от противного)

$$(p \rightarrow q) = (\neg q \rightarrow \neg p)$$

“ $(p \rightarrow q)$ истинно тогда, когда истинно $(\neg q \rightarrow \neg p)$.”

Требуется доказать, что из истинности утверждения p следует истинность утверждения q . При этом существует содержательный или конструктивный метод доказательства тождественного утверждения $(\neg q \rightarrow \neg p)$. Следовательно, приходим к противоречию с

условием $(p \rightarrow q) \sim (\neg q \rightarrow \neg p)$ тавтология, то

$\Phi = ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))((p \rightarrow q) \leftarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$ тоже тавтология.

$$\Phi = (p \neg q \vee q \vee \neg p) (p \neg q \vee q \vee \neg p) = 1.$$

5) Правило косвенного доказательства

$$(\neg p \rightarrow q)(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p.$$

$\downarrow$
 $q, \neg q$ – противоречие, следовательно, p – истина.

“Доказывается утверждение p . Для этого выбирается не-которое утверждение q , для которого можно доказать, что из p следует как q , так и $(\neg q)$. Тогда для $\neg p$ приходим к противоречию $q \& \neg q$ и утверждение p истинно.”

$$(\neg p \rightarrow q)(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p = (p \vee q)(p \vee \neg q) \rightarrow p = p \rightarrow p = 1.$$

6) Правило доказательства эквивалентностью

$$(a \sim b) = ((a \rightarrow b)(b \rightarrow a)).$$

“Для доказательства эквивалентности двух утверждений a и b в математике доказываются необходимость и доста-точность для одного из утверждений $((b \rightarrow a) = (a \text{ необхо-димо для } b))$ и $(a \rightarrow b) = (a \text{ достаточно для } b))$. Левая и пра-вая части тождества истинны и ложны при одинаковых интерпретациях”.

Это тождество использовалось при определении

связи эквивалентности

7) Правило доказательства цепочкой импликаций (свойство транзитивности импликации –

силлогизм – умозаключение, в котором из двух суждений – посылок получается третье – вывод)

$$(p \rightarrow r)(r \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q).$$

“Требуется доказать, что $(p \rightarrow q)$. Выбирается промежуточное утверждение r и последовательно доказываемся $(p \rightarrow r)$, далее $(r \rightarrow q)$. Затем делается вывод $(p \rightarrow q)$.”

$$(p \rightarrow r)(r \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) = p \downarrow r \vee r \downarrow q \vee \uparrow p \vee q = 1.$$

Аксиоматическая теория высказываний

Схемы аксиом

Множество высказываний составляет предметную область знаний. Меньшая часть этих высказываний (правил) считается истинной или доказуемой.

В математической теории доказуемые высказывания называются **теоремами**. Теоремы выводятся из некоторых фиксированных истинных высказываний (тавтологий), которые называются **аксиомами**.

Подобные математические теории называют аксиоматическими.

В математической логике минимальное множество первичных аксиом, из которых следуют все тавтологии, называют **схемами аксиом**. Логика

высказываний является аксиоматической теорией

Известны различные схемы аксиом, например, теорема **исчисления высказываний**. Теоремами этой теории являются тавтологии. **Гильберта Аккермана**:

$$A1) A \vee A \rightarrow A;$$

$$A2) A \rightarrow (A \vee B);$$

$$A3) (A \vee B) \rightarrow (B \vee A);$$

$$A4) (A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B).$$

Можно подставлять вместо символов любые формулы и в соответствии с утверждением 2 формулы остаются тавтологиями. Доказывается, что все тавтологии могут быть получены из этой схемы аксиом с использованием **под-становок** и одного **правила отделения MP** из множества схем

Определение рассуждений.

Формальное доказательство (схема вывода) – последовательность формул, каждая из которых:

- аксиома;
- получена подстановкой формул в аксиому;
- результат применения правила MP.

Все формулы в последовательности – тавтологии и последняя формула в этой последовательности – логическое следствие или **теорема**.

Из схемы аксиом выводятся только тавтологии,
которые обозначаются

$B \vdash$

Вывод - доказательство теорем – нетривиальная
задача, требующая изобретательности и интуиции.

Вывод - альтернатива алгебраическому
доказательству и доказано, что он всегда существует.

Пример вывода:

Доказать $\vdash (A \vee \neg A)$, используя **вывод** из аксиом.

1) $A \vee A \rightarrow A$; (A1)

2) $((A \vee A) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \vee (A \vee A) \rightarrow \neg A \vee A)$;
(из A4: $C/\neg A$, $A/(A \vee A)$,

B/A)
3) $\neg A \vee (A \vee A) \rightarrow \neg A \vee A$; (MP: (1, 2) $\rightarrow$ 3)

4) $(A \rightarrow (A \vee A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$; (тождественная замена
дизъюнкции)

- 5) $A \rightarrow A \vee A$; (A2: B/A)
- 6) $A \rightarrow A$; (MP: $(4, 5) \rightarrow 6$)
- 7) $\neg A \vee A$; (замена импликации на дизъюнкцию)
- 8) $\neg A \vee \neg A$; (A3: $B/A, A/\neg A$)
- 9) $A \vee \neg A$. (MP: $(7, 8) \rightarrow 9$)

Теорема доказана.

Правила преобразования тавтологий

1) Удаление конъюнкции (УК, Simplification)

“Если $p \& q$ тавтология, то, по определению конъюнкции и импликации, p, q - тавтологии”

$$\frac{p \& q}{p, q.}$$

Если формула $p \& q$ тавтология, то $p \& q = 1$ и, по определению конъюнкции, $p = q = 1$.

2) Введение конъюнкции (ВК, Conjunctions)

“Если p и q тавтологии, то, по определению конъюнкции, $p \& q$ тавтология”

$$\frac{p, q}{p \& q.}$$

При доказательстве используются обратные рассуждения для предыдущего правила.

3) Введение дизъюнкции (ВД, Addition)

«Если p - тавтология, то $p \vee q$ –тавтология»

$$\frac{p}{p \vee q.}$$

Если $p=1$, то справедливы тождества $p \vee q = 1 \vee q = 1$.

4) Удаление дизъюнкции (УД, Disjunction Syllogism)

“Если $p \vee q$ тавтология и p противоречие, то q тавтология”

$$\frac{p \vee q, \neg p}{q.}$$

5) Дизъюнктивное расширение (ДР)

“Если $p \rightarrow q$ тавтология, то при добавлении к условию p и следствию q любого высказывания получим тавтологию”

$$\frac{\frac{}{p \rightarrow q}}{p \vee b \rightarrow q \vee b.}$$

Тавтология $p \rightarrow q = \neg p \vee q = 1$,
тождества $\neg p \vee q = \neg p \vee q \vee b = (\neg p \vee b) \vee (q \vee b) =$
 $= (p \vee b) \rightarrow (q \vee b) = 1$.

6) Транзитивность импликации (ТИ, Hipotez Syllogism)

«Если $(p \rightarrow r)$ и $(r \rightarrow q)$ тавтологии, то по закону транзитивности $(p \rightarrow q)$ тавтология»

$$\frac{p \rightarrow r, r \rightarrow q}{p \rightarrow q.}$$

7) Конструктивная Дилемма (CD)

$$\frac{a \vee b, a \rightarrow c, b \rightarrow d}{c \vee d.}$$

Тавтологии $(a \vee b)(b \rightarrow d) = (\neg a \rightarrow b)(b \rightarrow d) = (\neg a \rightarrow d) = 1$
 (6-
 правило)

$(\neg a \rightarrow d) = (\neg d \rightarrow a)(a \rightarrow c) = (\neg d \rightarrow c) = (d \vee c) = 1$ (6-
 правило)

Утверждение о полноте теории высказываний
 $(c \vee d)$ тавтология.
 Если формула A – тавтология, то она является
 теоремой исчисления высказываний.

Утверждение о непротиворечивости

Не существует формулы A такой, что A и $\neg A$ являются
 теоремами.

Следствие. Существуют формулы, которые не
 являются тавтологиями. Если A – тавтология, то $\neg A$ –
 не тавтология (противоречие).

Логический вывод из гипотез

Гипотезы – истинные по определению, убеждению или опыту утверждения в некоторой области.

В отличие от аксиом теории высказываний гипотезы Γ не обязательно тавтологии, но *непротиворечивы*. В отличие от вывода в аксиоматической теории, вывод формулы B из гипотез $(\Gamma \quad B)$ подтверждает не общезначимость формулы B , а только ее истинность при интерпретациях, в которых истинны гипотезы Γ . Формула B вне этой области истинности конкретных гипотез может быть ложной. Следовательно, правильные рассуждения имеют смысл только в данной конкретной области знаний. Причем тавтология не может быть получена при выводе из гипотез, которые не являются тавтологиями - что следует из полноты и непротиворечивости теории исчисления высказываний.

Прямой метод вывода

Определение.

Формула ***V*** *логическое следствие* из гипотез $\Gamma = \{F_1, F_2, \dots, F_m\} (m \geq 0)$, если при любой интерпретации I , где $F_1(I)$ и $F_2(I) \dots$ и $F_m(I)$ истинны ***V(I)*** так же истинно. Обозначается $F_1 F_2 \dots F_m \vdash V$.

Утверждение 7.

Если $\Gamma = \{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash V$, то $\Phi = F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \rightarrow V =$
 $= \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \dots \vee \neg F_n \vee V = (F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow \dots \rightarrow (F_n \rightarrow V))) \dots$
тавтология.

Таким образом, *прямой метод вывода* любой формулы ***V*** из гипотез сводится к доказательству общезначимости формулы.

Для заданных гипотез $F_1, F_2, \dots, F_n$ строится цепочка формул с применением правил вывода, пока не будет получена заданная формула ***V***.

Правила при выводе из гипотез:

- если существует интерпретация I , при которой гипотезы выполнимы, то и следствие из гипотез в этой интерпретации выполнимо;
 - если гипотезы общезначимы в некоторой области интерпретации, тогда и следствие общезначимо в этой области.
- Правила логического вывода аксиоматической теории высказываний применимы и при выводе из гипотез.

1) Правило отделения (MP, modus ponens)

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}.$$

По определению импликации $(\neg A \vee B)A = AB = B = 1$, при $A=1$.

2) Отрицательный модус (МТ, modus tollens)

$$\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\neg A}.$$

По определению импликации $(\neg A \vee B) \neg B = \neg A \neg B = \neg A = 1$ при $\neg B = 1$.

3) Удаление конъюнкции (УК)

$$\frac{P \& Q}{P, Q}.$$

По определению конъюнкции, если $P(I) \& Q(I)$ выполнима в I , то $P(I)$, $Q(I)$ так же выполнимы.

4) Введение конъюнкции (ВК)

$$\frac{P(I), Q(I)}{P(I) \& Q(I)}.$$

Если $P(I)$ и $Q(I)$ выполнимые гипотезы в интерпретации I , то и конъюнкция $P(I) \& Q(I)$ выполнима в этой интерпретации.

5) Введение дизъюнкции (ВД, Addition)

$$\frac{A(I)}{A(I) \vee B(I)}.$$

Если $A(I)$ выполнима, то $A(I) \vee B(I)$ тоже выполнима в этой интерпретации.

$A(I) \rightarrow (A(I) \vee B(I)) = \neg A(I) \vee A(I) \vee B(I) = 1$ тавтология при любых интерпретациях, следовательно $A(I) \vee B(I)$ выполнима при I .

6) Удаление дизъюнкции (УД)

$$\frac{P(I) \vee Q(I), \neg P(I)}{Q(I)}.$$

Если $\neg P(I)$ выполнима в некоторой интерпретации I и $P(I) \vee Q(I)$ выполнима в этой интерпретации, то выполнима и $Q(I)$.

$(P(I) \vee Q(I)) \& \neg P(I) = P(I) \& \neg P(I) \vee Q(I) \& \neg P(I) = 0 \vee Q(I) \& \neg P(I)$
выполнима и $Q(I)$ (по УК).

7) Дизъюнктивное расширение (ДР)

$$\frac{P(I) \rightarrow Q(I)}{P(I) \vee B(I) \rightarrow Q(I) \vee B(I)}.$$

$(P(I) \rightarrow Q(I)) \rightarrow (P(I) \vee B(I) \rightarrow Q(I) \vee B(I)) =$
 $= (P(I) \rightarrow Q(I)) \rightarrow (\neg P(I) \& \neg B(I) \vee Q(I) \vee B(I)) =$
 $= (P(I) \rightarrow Q(I)) \rightarrow (\neg P(I) \vee Q(I) \vee B(I)) = (P(I) \rightarrow Q(I)) \rightarrow ((P(I)$
 $\rightarrow Q(I)) \vee B(I)) = P(I) \rightarrow (P(I) \vee B(I)) = 1$, тавтология, при
любых интерпретациях, следовательно, выполняема
при I .

8) Транзитивность импликации (ТИ)

$$\frac{(P(I) \rightarrow R(I)), (R(I) \rightarrow Q(I))}{P(I) \rightarrow Q(I)}.$$

Если $(P(I) \rightarrow R(I))$ и $(R(I) \rightarrow Q(I))$ выполнимы в
интерпретации I , то $(P(I) \rightarrow Q(I))$ выполнима в этой
интерпретации.

$$\begin{aligned}
 (P(I) \rightarrow R(I)) \& (R(I) \rightarrow Q(I)) &= (\neg P(I) \vee R(I)) \& (\neg R(I) \vee Q(I)) \\
 (\neg P(I) \vee R(I)) \& (\neg R(I) \vee Q(I)) &\rightarrow (\neg P(I) \vee Q(I)) = \\
 = P(I) \& \neg R(I) \vee R(I) \& Q(I) \vee \neg P(I) \vee Q(I) &= \\
 = \neg P(I) \vee Q(I) \vee \neg R(I) \vee R(I) &= T \text{ выполнима при любых} \\
 \text{интерпретациях, следовательно, } P(I) \rightarrow Q(I), &\text{ выполнима}
 \end{aligned}$$

9) Конструктивная Дилемма (CD)

$$\frac{a \vee b, a \rightarrow c, b \rightarrow d}{c \vee d}$$

$$\begin{aligned}
 ((a \vee b)(a \rightarrow c)(b \rightarrow d)) &\rightarrow (c \vee d) = \\
 = ((\neg a \neg b) \vee (a \neg c) \vee (b \neg d)) &\vee (c \vee d) = \\
 = (\neg a \vee a \vee b \vee c \vee d) &= T, \text{ при любых интерпретациях.}
 \end{aligned}$$

Пример.

Есть три гипотезы:

$$\frac{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D}{c \vee d}$$

Предполагаемое следствие из гипотез: $c \vee d$.

- 1) $A \rightarrow C$ (гипотеза);
- 2) $A \vee B \rightarrow C \vee B$ (правило ДР к 1 $\rightarrow$ 2);
- 3) $B \rightarrow D$ (гипотеза);
- 4) $C \vee B \rightarrow C \vee D$ (правило ДР к 3 $\rightarrow$ 4);
- 5) $A \vee B \rightarrow C \vee D$ (правило ТИ к 2, 4 $\rightarrow$ 5)
- 6) $A \vee B$ (гипотеза);
- 7) $C \vee D$ (правило МР к 5, 6 $\rightarrow$ 7).

Пример.

Гипотезы: $(A \& D) \rightarrow B, A, C, C \rightarrow D$

Следствие: B .

- 1) A (гипотеза);
- 2) C (гипотеза);
- 3) $C \rightarrow D$ (гипотеза);
- 4) D (МР 2, 3 $\rightarrow$ 4);
- 5) $A \& D$ (ВК 1, 4);
- 6) $(A \& D) \rightarrow B$ (гипотеза);
- 7) B (МР 5, 6 $\rightarrow$ 7).

Эффективный частный случай логического вывода из гипотез известен как **метод математической индукции**. Осознание метода математической индукции как отдельного важного метода восходит к **Блезу Паскалю** и **Герсониду**. Современное название метода было введено де Морганом в 1838 году.

Лёви бен Гершом (Герсонид) (1288-1344) — средневековый еврейский ученый, философ, математик, астроном, талмудист. Он оставил ряд сочинений на иврите по математике, астрономии, философии, богословию, психологии, медицине, физике, метеорологии, астрологии. В трактате «Дело вычислителя» (1321) Герсонид первым в Европе вывел основные комбинаторные формулы для подсчета числа сочетаний, перестановок и размещений; для их доказательства применил метод математической

В трактате «О синусах, хордах и дугах» Леви бен Гершом доказал теорему синусов; составил пятизначные таблицы синусов. Изобретенный им навигационный квадрант на-шел применение в Мореплавании. Метод математической индукции заключается в следующем:

- 1) утверждается гипотеза $P(0)$ - **базис индукции**;
- 2) доказывается $P(0) \rightarrow P(1)$;
- 3) доказывается $P(n) \rightarrow P(n+1)$;
- 4) последовательно применяя МР-правило для любого целого $n > 0$ $P(0), P(1), \dots, P(n+1)$, **вывод** $P(n+1)$.

В общем случае применение прямого метода вывода **не эффективно**, так как отсутствует алгоритм выбора и применения правил.

Обратный метод логического вывода из гипотез

Утверждение 8.

Формула B - логическое следствие из гипотез $F_1, F_2, \dots, F_n$ тогда и только тогда, когда $\neg \Phi = F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \& \neg B$ противоречиво или $F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \& \neg B \models \square$.

Таким образом, **обратный метод** вывода из гипотез формулируется как задача проверки некоторой формулы на противоречивость. Применимы рассмотренные ранее алгебраические методы и метод DP.

Предполагается, что заключение неверно ($\neg B$), строится цепочка формул по правилам вывода до тех пор, пока не будет получено противоречие. Противоречие легко обнаружить при выводе, если на очередном шаге получены противоречивые формулы F и $\neg F$, из которых следует пустая формула $F \& \neg F = \square$.

Применение правил вывода из гипотез с использованием тождественных алгебраических преобразований

Пример.

Гипотезы: $\underline{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D,}$

предполагаемое следствие: $C \vee D.$

Проверить противоречивость или общезначимость формулы $(A \vee B) \& (A \rightarrow C) \& (B \rightarrow D) \& \neg (C \vee D).$

- 1) $A \vee B;$
- 2) $A \rightarrow C;$
- 3) $B \rightarrow D;$
- 4) $\neg (C \vee D);$
- 5) $\neg C \& \neg D$ (правило де Моргана $4 \rightarrow 5$);
- 6) $\neg C$ (УК $5 \rightarrow 6$);
- 7) $\neg D$ (УК $5 \rightarrow 7$);
- 8) $\neg C \rightarrow \neg A$ (закон контрапозиции $2 \rightarrow 8$);

- 9) $\neg D \rightarrow \neg B$ (закон контрапозиции $3 \rightarrow 9$);
- 10) $\neg A$ (MP 6, 8 $\rightarrow$ 10);
- 11) $\neg B$ (MP 7, 9 $\rightarrow$ 11);
- 12) B (УД 1, 10 $\rightarrow$ 12);
- 13) A (УД 1, 11 $\rightarrow$ 13);
- 14) $\square$ ($A \& \neg A, B \& \neg B$).

Формула противоречива.

Применение DP-метода при выводе из гипотез

Формула опровержения $\neg \Phi = F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \& \neg B$ приводится к КНФ (множество дизъюнктов). Формула B - следствие из гипотез, если $\neg \Phi$ противоречие (не выполнима или не существует интерпретации, при которой $\neg \Phi$ выполнима).

Рассматривая формулу для Φ , можно встретить следующие условия:

- 1) Гипотезы могут быть тавтологией, тогда вывод тоже должен быть тавтологией. Метод DP контролирует эти условия и исключает их из S .
- 2) Гипотезы могут быть противоречивыми, тогда при любой интерпретации любая формула является выводом, что может не согласовываться со здравым смыслом, но не противоречит определению вывода. Следовательно, может быть независимо рассмотрена задача проверки гипотез на непротиворечивость, если по смыслу это не допустимо.
- 3) Гипотезы и следствие должны содержать общие атомы. В противном случае может быть интерпретация, применимая к гипотезам и не применимая к выводу. Следовательно, не выполняется условие в определении следствия из гипотез.

Дополним метод DP следующим правилом, сокращающим перебор по Квайну, заменяя его алгебраическими преобразованиями.

Правило расщепления (правило 4 для DP)

применяется в том случае, если множество дизъюнктов S – не пустое и не применимы правила 1), 2), 3) алгоритма DP.

Разделим дизъюнкты на три подмножества - с одним значением литеры L , с другим значением литеры $\neg L$ и подмножество R , не содержащее этой литеры:

$$S = (L \vee A_1) \& (L \vee A_2) \& \dots \& (\neg L \vee B_1) \& (\neg L \vee B_2) \& \dots \& R,$$

где R – подмножество не содержит литер L и $\neg L$;

$S_1 = \{A_1, A_2, \dots\}$ – подмножество дизъюнктов с литерой L ;

$S_2 = \{B_1, B_2, \dots\}$ – подмножество дизъюнктов с литерой $\neg L$.

Тогда, $S = (L \vee S_1) \& (\neg L \vee S_2) \& R$.

$$\begin{aligned}
& ((L \vee s_1) \& (\neg L \vee s_2)) \rightarrow (s_1 \vee s_2) = && \text{по} \\
& \quad \text{определению} && \text{импликации} \\
& = \neg((L \vee s_1) \& (\neg L \vee s_2)) \vee (s_1 \vee s_2) = && \text{по} \\
& \quad \text{правилу де Моргана} && \\
& = \neg s_1 \neg L \vee \neg s_2 L \vee s_1 \vee s_2 = && \text{по} \\
& \quad \text{правилу сокращения} &&
\end{aligned}$$

$= \neg L \vee L \vee s_1 \vee s_2 = T$ тавтология при любых интерпретациях, т.е. $(s_1 \vee s_2)$, по определению, – следствие из гипотез и выполнима в тех же интерпретациях, что и гипотезы, и не зависит от L .

Правило расщепления $\frac{(L \vee s_1) \& (\neg L \vee s_2)}{s_1 \vee s_2}$

В частном случае, $s_1 \vee s_2 = T$ и применимо правило 1 – исключение тавтологии.

Для продолжения преобразований по методу Девиса - Патнema формула $S_1 \vee S_2$ должна быть преобразована в конъюнктивную форму:

$$\begin{aligned}(S_1 \vee S_2) &= A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n \vee B_1 \& B_2 \& \dots \& B_m = \\ &= (A_1 \vee B_1) \& (A_1 \vee B_2) \& \dots \& A_1 \vee B_m) \& (A_2 \vee B_1) \& (A_2 \vee B_2) \& \dots \dots \& (A_n \vee B_m).\end{aligned}$$

Правила 1-4 последовательно применяются, пока не будет получена пустая формула.

Следствие. Пусть $L_1, L_2, \dots, L_k$ - последовательность вычер-кнутых литер по правилам 2), 3) и L_k - последняя вычер-кнутая литера, после которой $S_{i+1} = S$ - выполнима. Тогда условие $L_1 \& L_2 \& \dots \& L_k = T$ обозначает интерпретацию, при которой формула S выполнима.

Пример.

Проверить формулу вывода вместе с гипотезами

$$\underline{(A \vee B), (A \rightarrow C), (B \rightarrow D)}$$

$$(C \vee D)$$

$A \vee B$	$A \vee B$	$A \vee B$	$A \vee B$	
$A \rightarrow C$	$\neg A \vee C$	$\neg A \vee \neg$	$\neg A$	B
$\underline{B \rightarrow D}$	$\neg B \vee D$	$\neg B \vee \neg$	$\neg B$	$\neg B$
$C \vee D$	$\neg(C \vee D)$	$\neg$		
	$\neg$			

□

Множество дизъюнктов невыполнимо, поэтому формула $(C \vee D)$ является следствием из гипотез.

Пример.

Проверить гипотезы на выполнимость и непротиворечивость

$$\underline{(P \vee \neg Q)(\neg P \vee Q)(Q \vee T)}$$

$$Q \& T$$

$$\begin{array}{l}
 P \vee \neg Q \\
 \neg P \vee Q \\
 \hline
 Q \vee T \\
 \hline
 Q \& T
 \end{array}
 \xrightarrow{T=1}
 \begin{array}{l}
 P \vee \neg Q \\
 \neg P \vee Q \\
 \hline
 Q
 \end{array}
 \xrightarrow{Q=1}
 \begin{array}{l}
 P \\
 \hline
 P=1
 \end{array}
 \rightarrow \square$$

Гипотезы выполнимы при $PQT=111$.

Проверим гипотезу на общезначимость. Для этого проверим инверсию гипотезы $\neg(Q \& T)$ на выполнимость.

$$\begin{array}{l}
 P \vee \neg Q \\
 \neg P \vee Q \\
 \hline
 Q \vee T \\
 \hline
 Q \& T
 \end{array}
 \xrightarrow{Q=1}
 \begin{array}{l}
 P \vee \neg Q \\
 \neg P \vee Q \\
 \hline
 Q \vee T \\
 \hline
 \neg(Q \vee T)
 \end{array}
 \xrightarrow{P=1}
 \begin{array}{l}
 P \\
 \hline
 \neg T=1
 \end{array}
 \rightarrow \square$$

Формула выполнима при $PQT=110$, следовательно, она не общезначима.

Правило резолюции Робинсона

Правило расщепления с использованием алгебраических преобразований может быть заменено правилом резолюции Робинсона, применяемым только к парам дизъюнктов с контрарными литерами.

Для дизъюнктов C_1 и C_2 с контрарными литерами $C_1 = L \vee S_1$ и $C_2 = \neg L \vee S_2$ **резольвента** $C = S_1 \vee S_2$ является логическим следствием C_1 и C_2 .

Правило резолюции является частным случаем правила расщепления, применяемого к паре дизъюнктов. В результате применения правила резолюции ко всем парам дизъюнктов, устраняются противоречивые литеры L_1, L_2 , и расширяется множество дизъюнктов S_{i+1} новыми дизъюнктами $S_1 \vee S_2$. За конечное число шагов в множестве S_i

S_{i+1} – невыполнимо (противоречиво) или выполнимо тогда и только тогда, когда невыполнимо (противоречиво) или выполнимо S_i .

В частном случае, $S_1 \vee S_2 = T$ и применимо правило 1) метода Девиса и Патнема – исключение тавтологии.

Таким образом, алгоритм вывода, основанный на правилах метода Девиса и Патнема с правилом резолюций Ро-бинсона, **эффективен** – завершается за конечное число шагов и может быть использован в основе машинного метода доказательства

общезначимости и теорем в исчислении

высказываний. При этом можно выбрать одну из литер L и применить к соответствующим дизъюнктам, содержащим L , правило резолюций ко всем контрарным парам дизъюнктов. Остаются только новые резольвенты и исключаются дизъюнкты с литерой L .

Число литер в дизъюнктах сокращается, что и гарантирует завершение вывода за конечное число шагов.

Пример. Проверить общезначимость следующей формулы

$$\Phi = xy \vee xz \vee yz \vee \neg x \neg y \vee \neg x \neg z \vee \neg y \neg z.$$

Для перехода к обратному методу запишем инверсию формулы

$$\neg \Phi = (\neg x \vee \neg y)(\neg x \vee \neg z)(\neg y \vee \neg z)(x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)$$

исключение x по
правилу резолюций

$$\neg y \vee y \quad \neg y \vee z \quad \neg z \vee y \quad \neg z \vee z$$

исключение y

$$(\neg y \vee \neg z)(y \vee z)(\neg y \vee z)(\neg z \vee y)$$

исключение тавтологий

$$\neg z \vee z \quad \neg z \vee \neg z \quad z \vee z \quad z \vee \neg z$$

противоречие



Правила резолюции последовательно применяется, пока не будет найдено противоречие или дизъюнкты с конт-рарными литерами отсутствуют. В последнем варианте формула $\neg\Phi$ противоречие и Φ – тавтология. Если правило резолюции на некотором шаге не применимо, то для оставшихся дизъюнктов можно применить правила Девиса и Патнема и найти набор значений атомов, для которого формула выполнима (SAT-проблема). Например, если в примере исключить любой терм, то получим просто выполнимую формулу

$$\Phi_1 = xz \vee yz \vee \neg x \neg y \vee \neg x \neg z \vee \neg y \neg z;$$

$$\neg\Phi_1 = (\neg x \vee \neg z)(\neg y \vee \neg z)(x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) \rightarrow$$

$$\rightarrow (\neg z \vee y)(\neg y \vee \neg z)(y \vee z) \rightarrow y \neg z.$$

Выводы

В логике высказываний применимы алгебраические преобразования для вычисления значения истинности составных высказываний и при доказательстве теорем на основе выполнимых гипотез.

Метод доказательства теорем может быть построен на основе правил Девиса - Патнема, которые дополняются правилом резолюции Робинсона.

Логика высказываний — основополагающий раздел современной логики, имеющий широкое применение в различных сферах интеллектуальной деятельности человека.

Вместе с тем, поскольку в логике высказываний не учитывается субъективно-предикатная структура высказываний и ряд других содержательных положений, с ее помощью нельзя адекватно формализовать значительную часть содержательных рассуждений, используемых человеком. Для этих целей дополнительно к средствам логики высказываний используются средства **логики предикатов** и металогики.