

Построение графиков функций со знаком модуля

Определение модуля

Модуль числа равен самому числу, если данное число неотрицательное, и равен противоположному числу, если данное число отрицательное.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Построение графика функции $y = |f(x)|$

Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, надо сначала построить график функции $y = f(x)$, а затем участки этого графика, лежащие выше оси абсцисс, оставить без изменения, а участки, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить относительно этой оси.

Пример 1.

Построить график функции $y = |\sin x|$

График функции $y = \sin x$

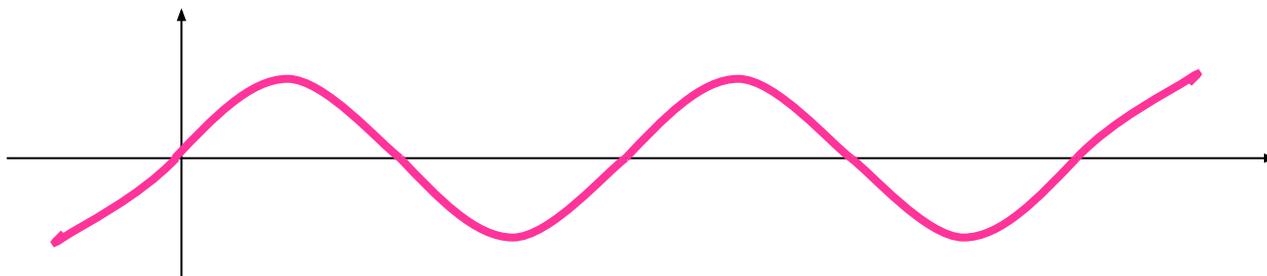
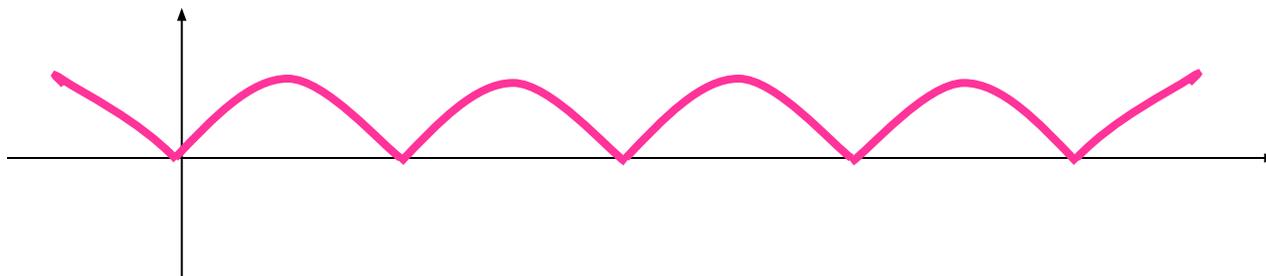
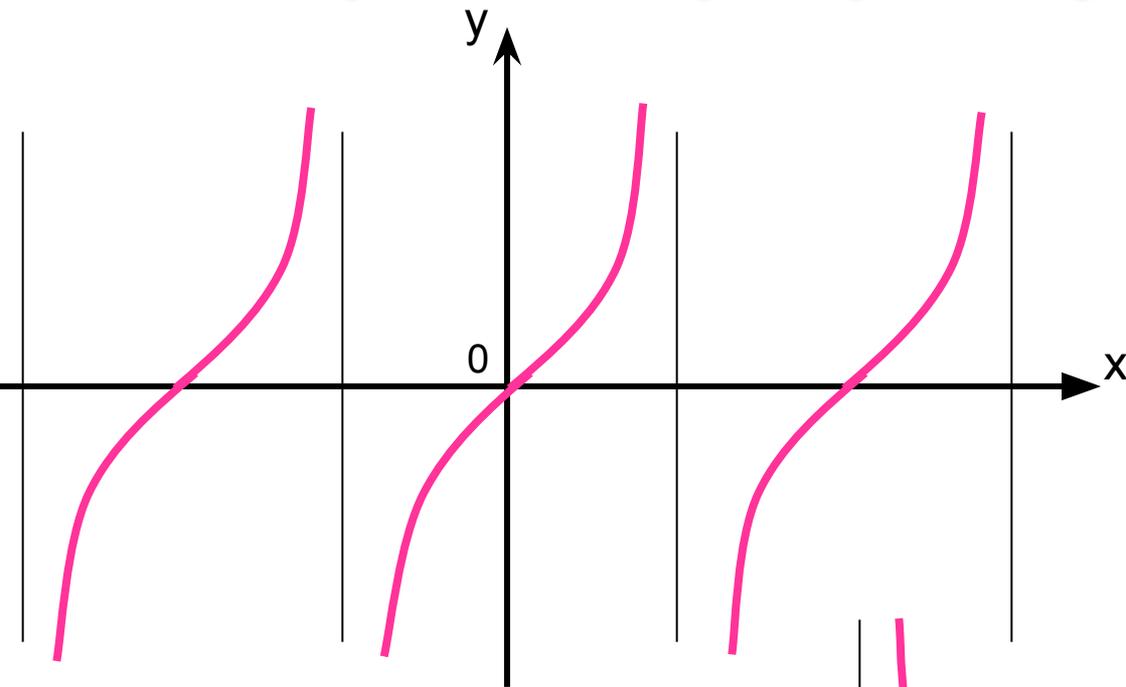


График функции $y = |\sin x|$

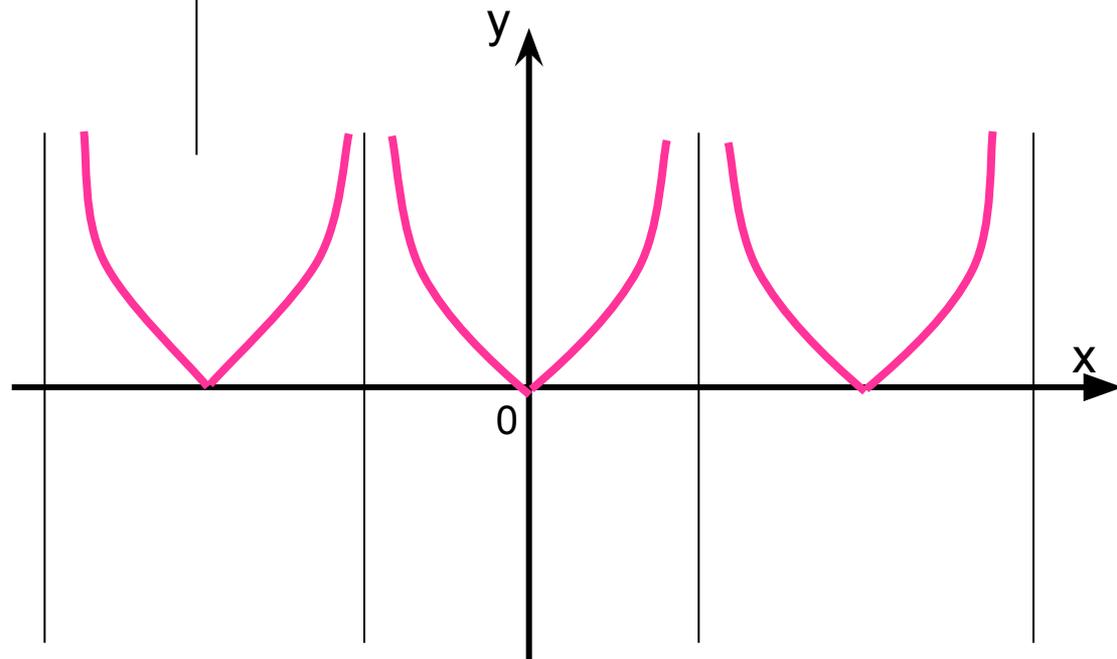


Пример 2.

Построить график функции $y = |\operatorname{tg} x|$

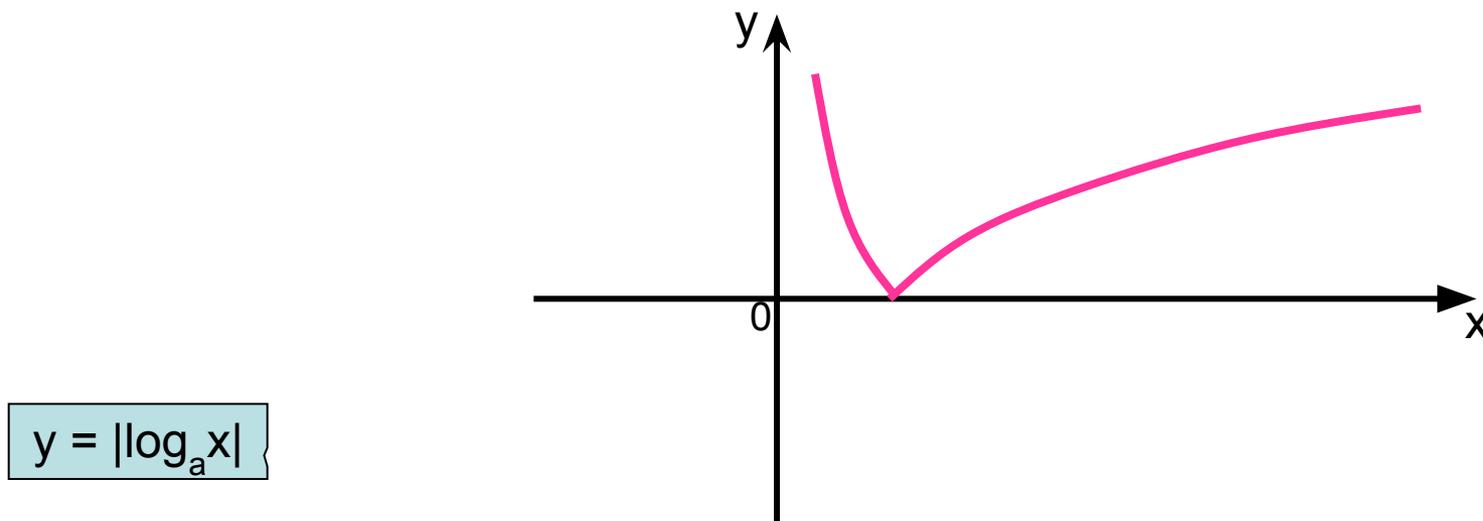
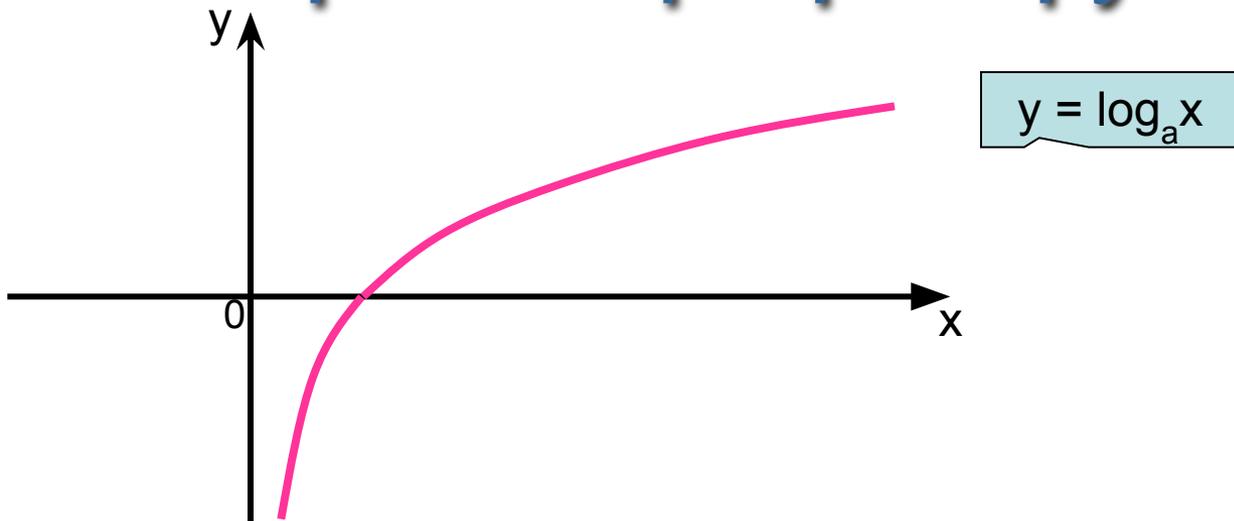


$$y = |\operatorname{tg} x|$$



Пример 3.

Построить график функции $y = |\log_a x|$



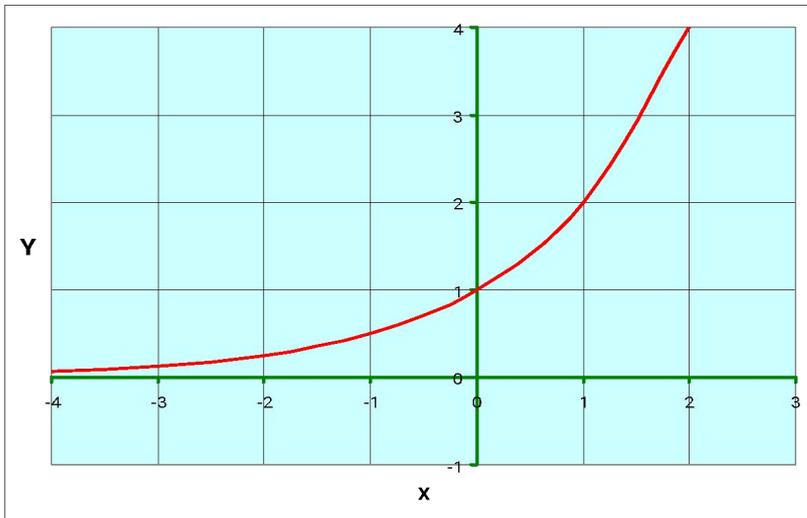
Построение графика функции $y = f(|x|)$

Так как $f(|-x|) = f(|x|)$, то функция $y = f(|x|)$ чётная и для построения её графика следует удалить точки графика функции $f(x)$, находящиеся слева от оси Oy , а все точки, лежащие на оси Oy и справа от неё, отобразить симметрично относительно оси Oy .

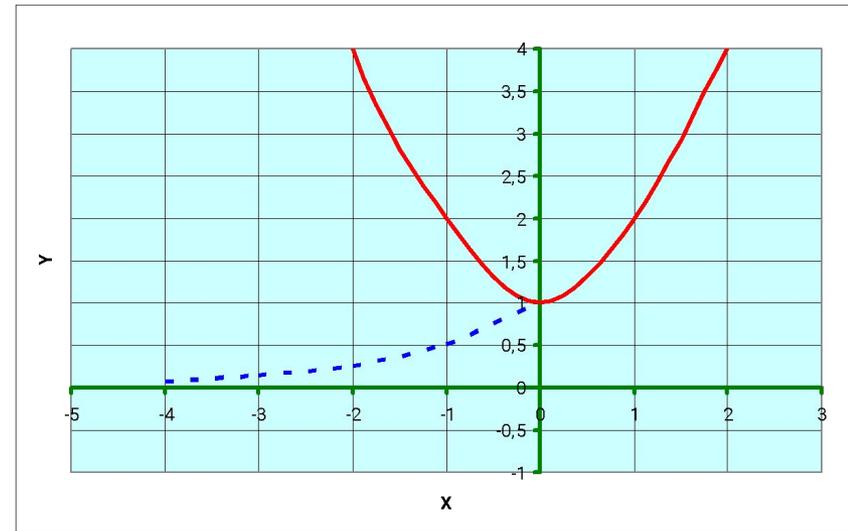
Пример 1.

Построить график функции $y = 2^{|x|}$

$$y = 2^x$$

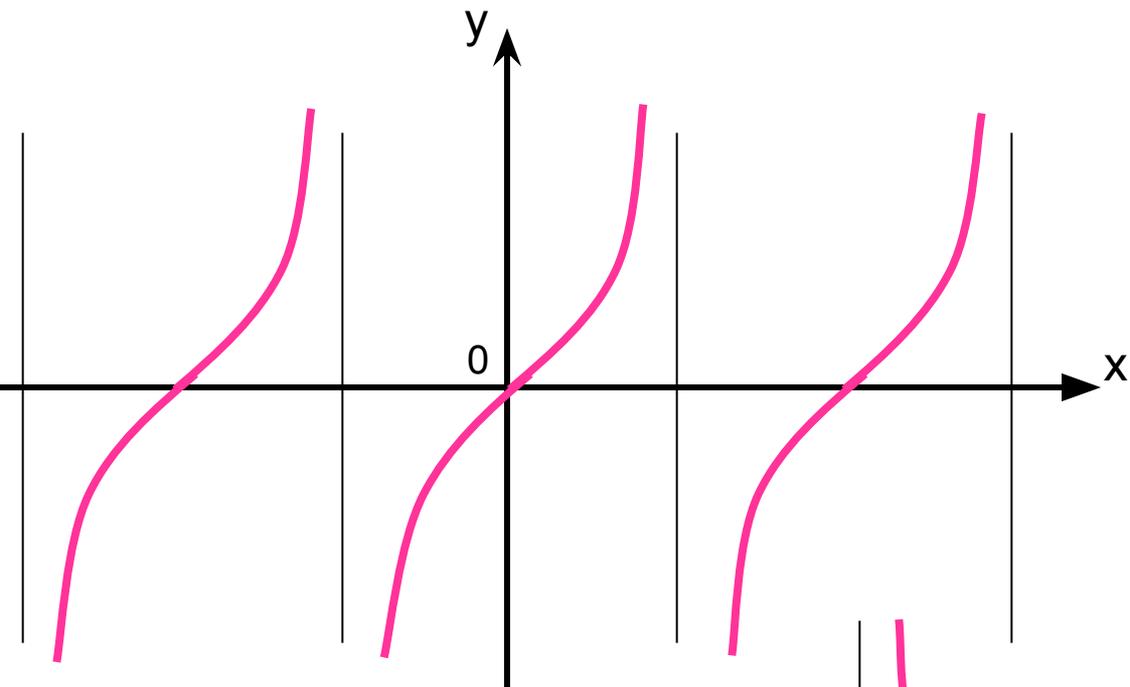


$$y = 2^{|x|}$$

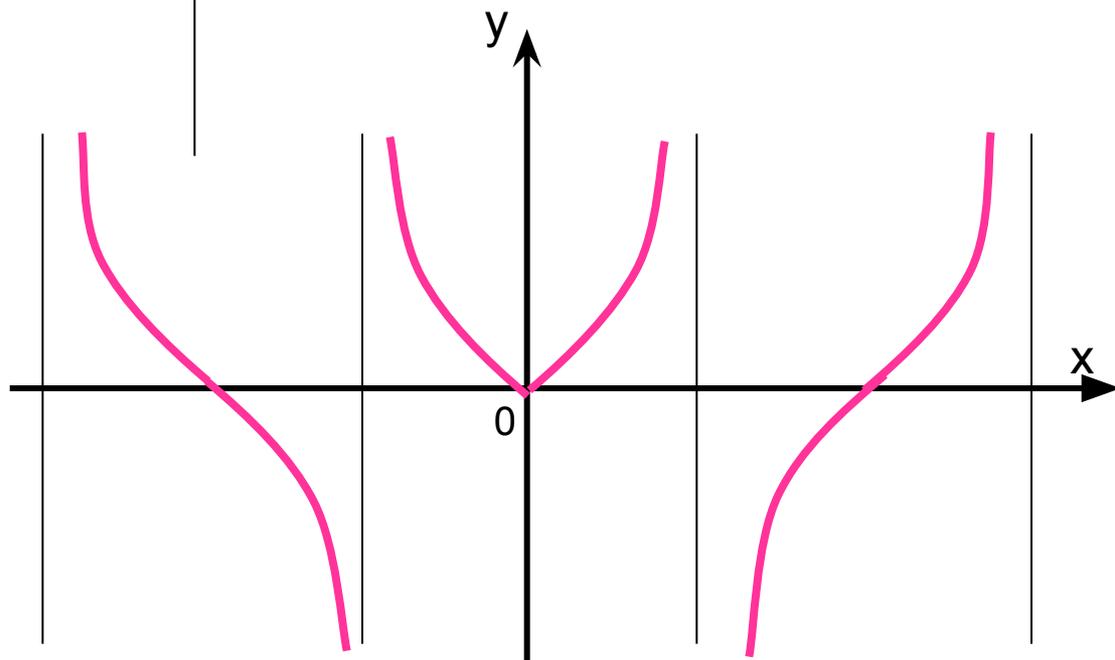


Пример 2.

Построить график функции $y = \operatorname{tg} |x|$

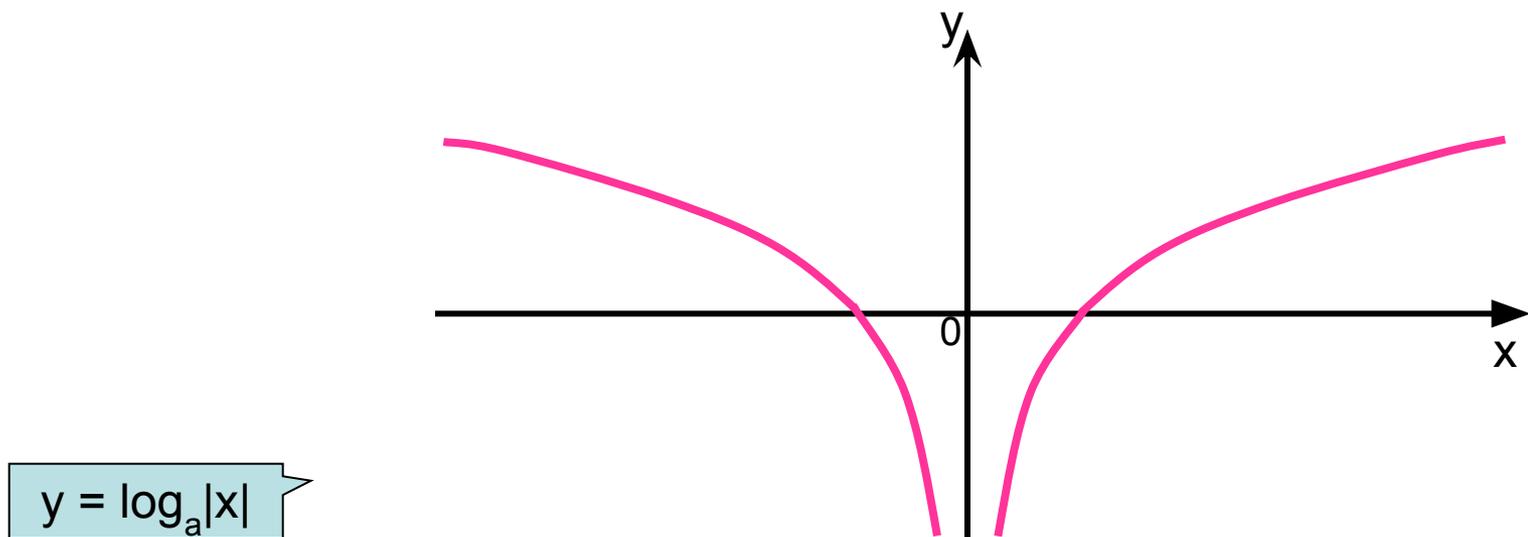
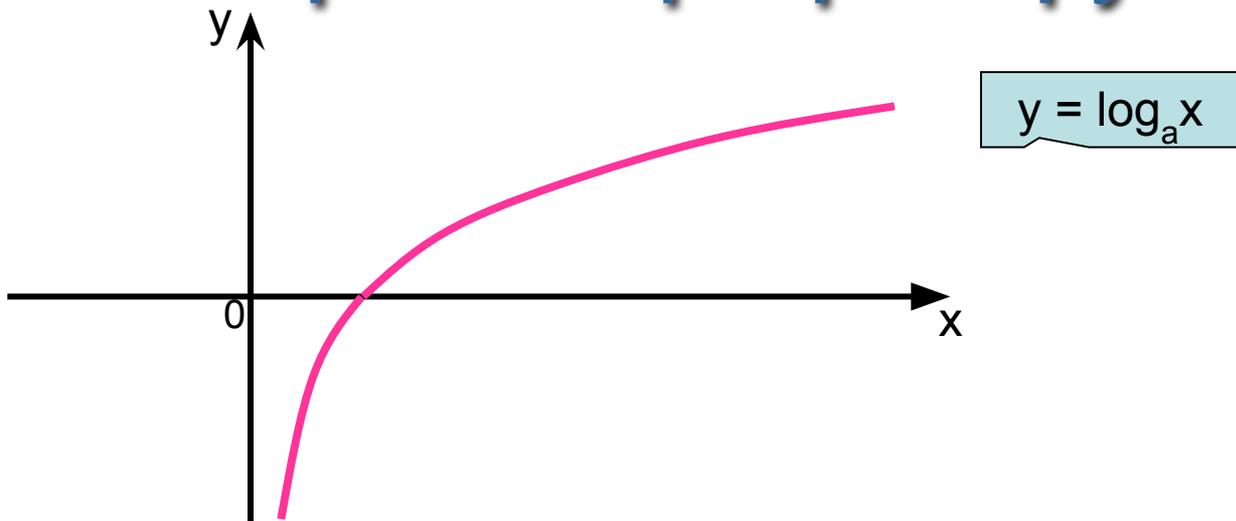


$y = \operatorname{tg} |x|$



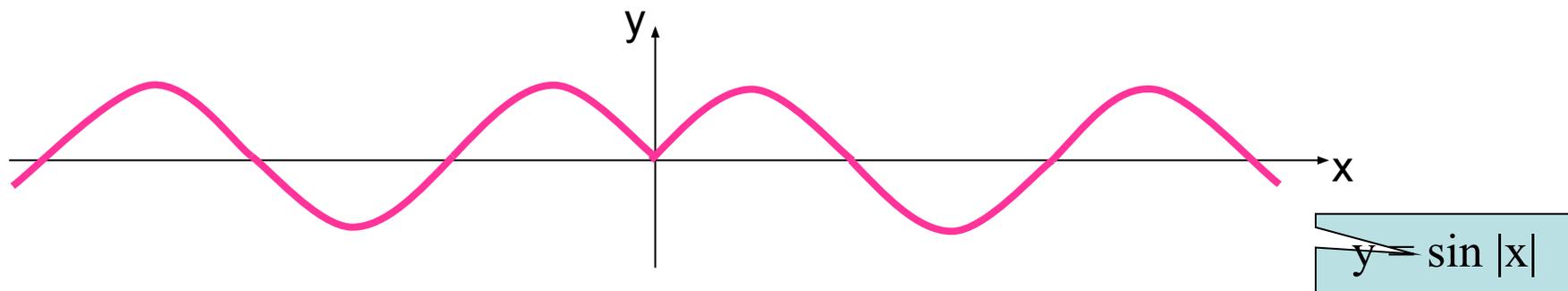
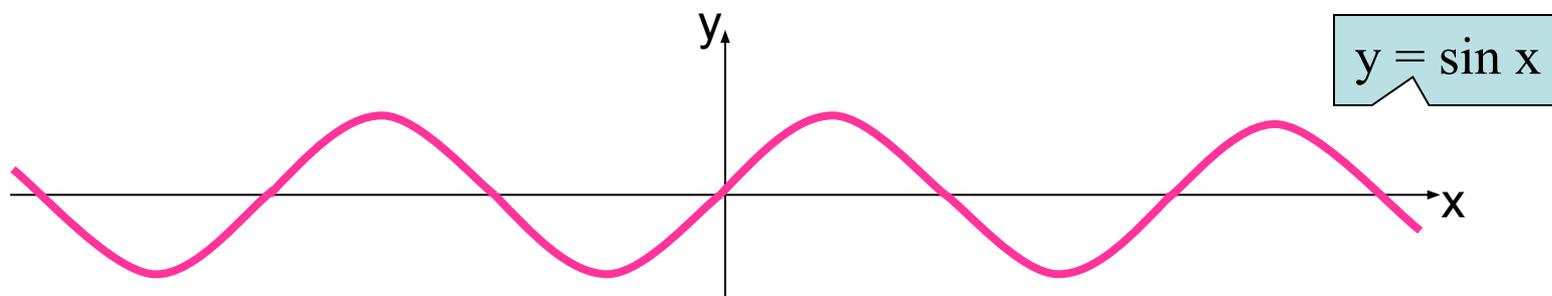
Пример 3.

Построить график функции $y = \log_a |x|$



Пример 4.

Построить график функции $y = \sin |x|$

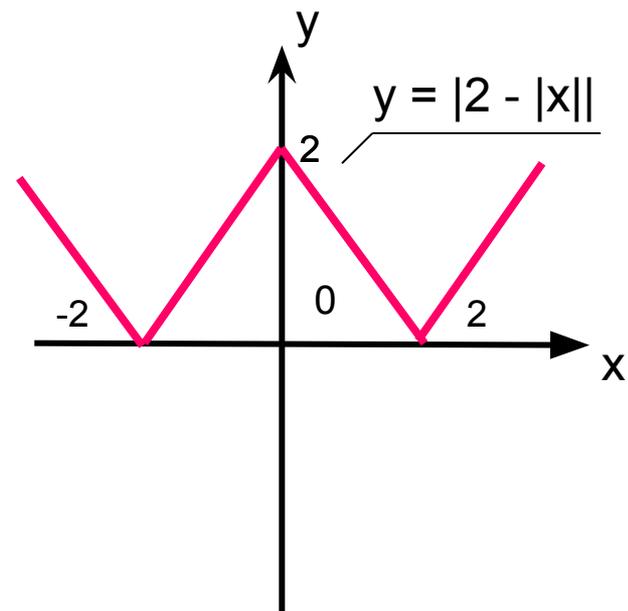
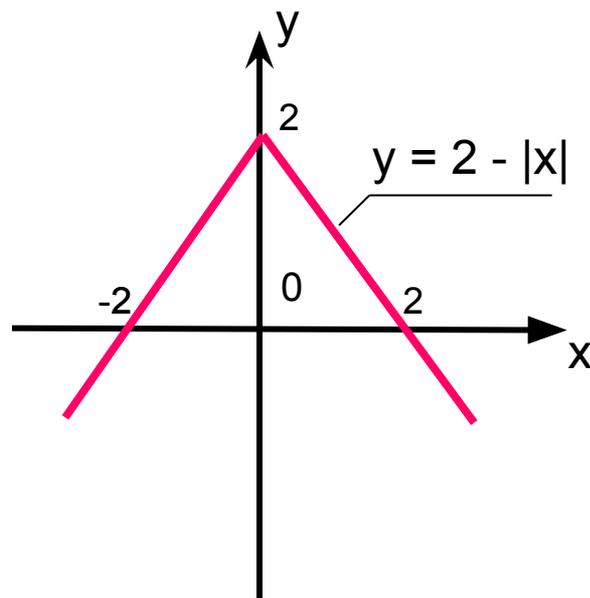
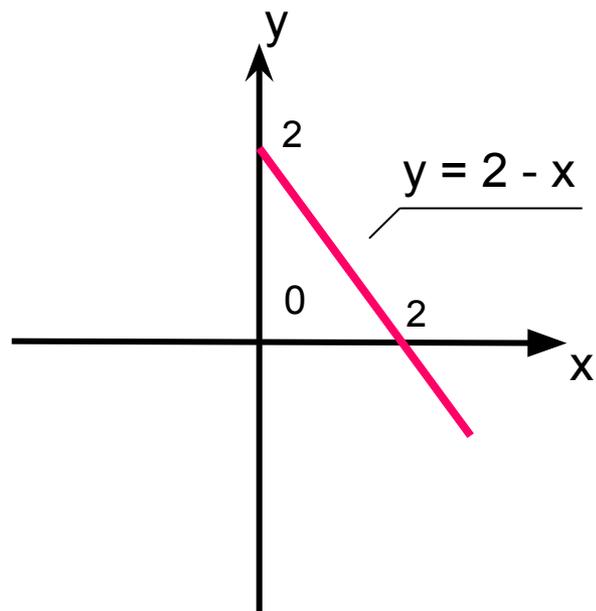


Построение графика функции $y = |f(|x|)|$

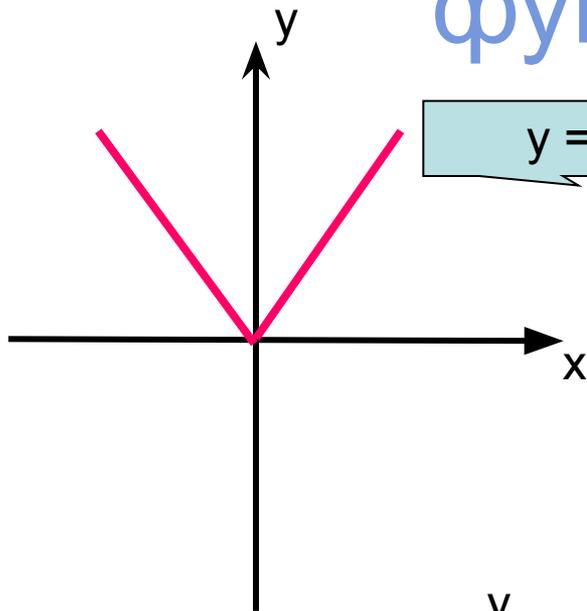
Последовательность действий в этом случае представим следующим образом:

1. построить график функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$
2. отобразить построенную часть графика симметрично относительно оси ординат;
3. участки полученного графика, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить относительно этой оси.

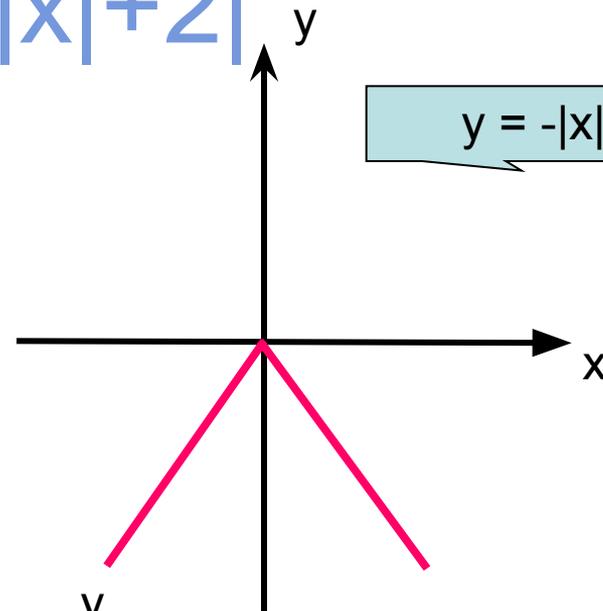
Пример 1. Построение графика функции $y = |2 - |x||$



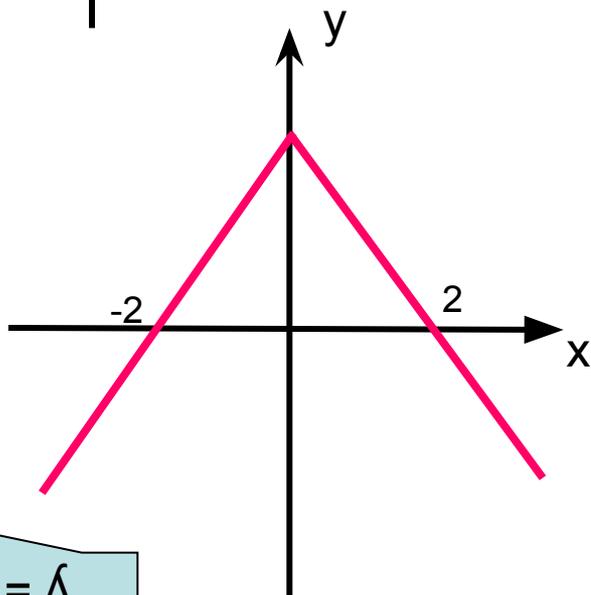
Пример 2. Построение графика функции $y = |-|x|+2|$



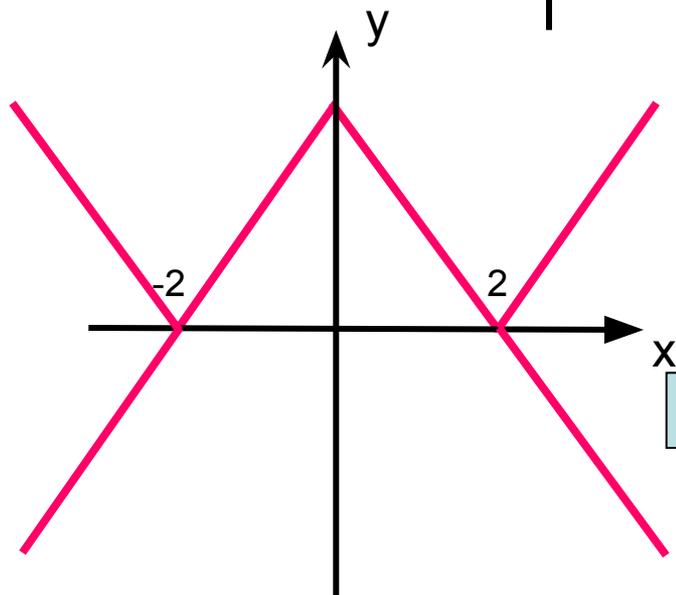
$$y = |x|$$



$$y = -|x|$$



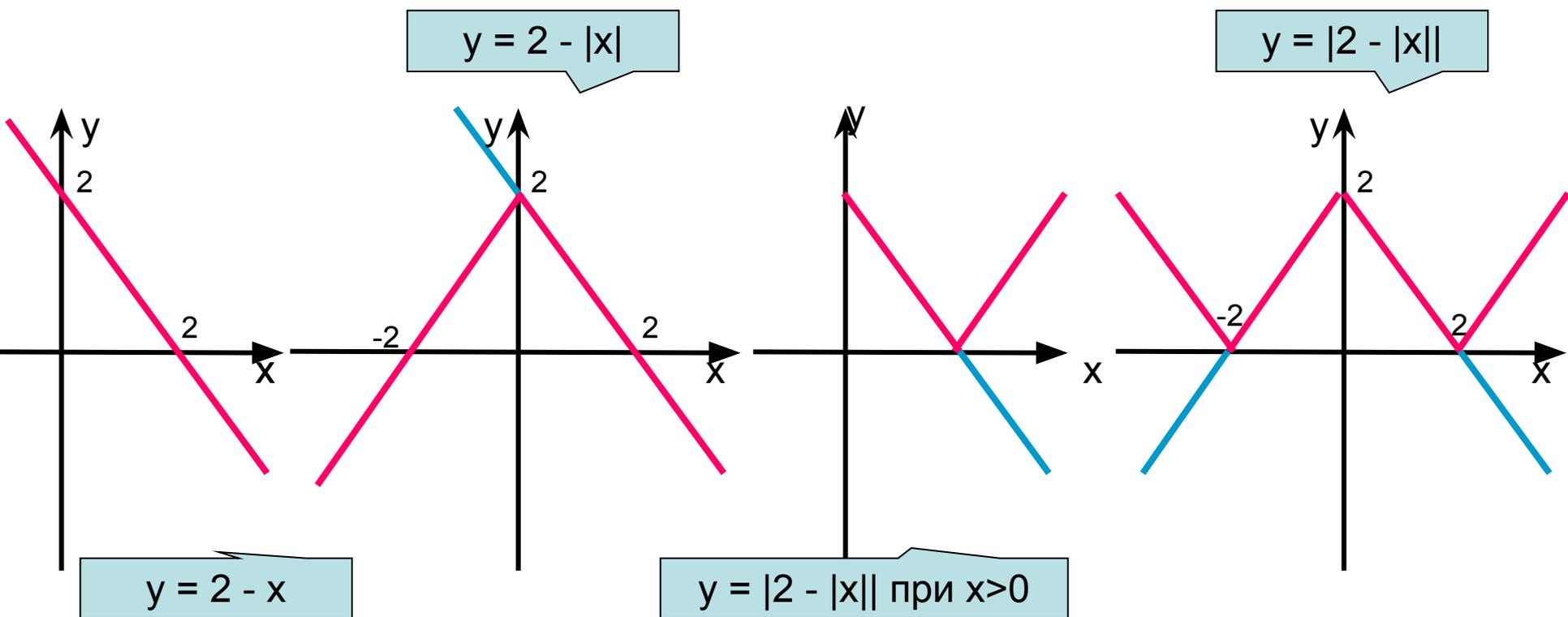
$$y = 2 + |x|$$



$$y = |-|x| + 2|$$

Пример 3. Построение графика функции $y = |2 - |x||$

Основан на свойстве чётности функции, что позволяет построить её график при $x \geq 0$, а затем зеркально отразить его относительно оси Oy .



Построение графика функции

$$|y| = f(x) \text{ при } f(x) \geq 0$$

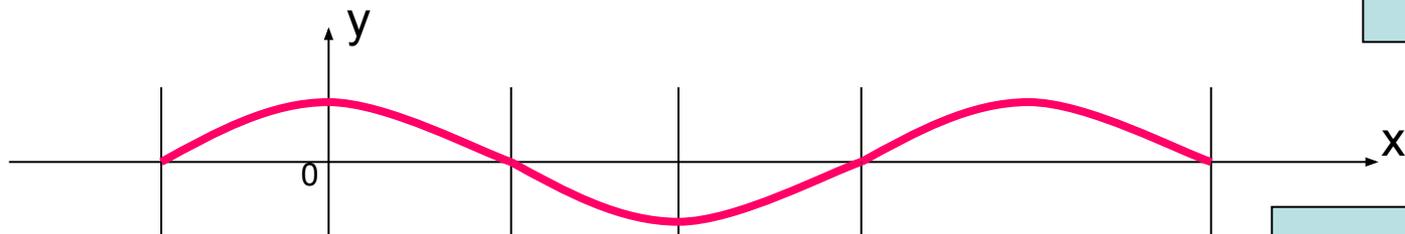
По определению абсолютной величины $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$. Строго говоря, y нельзя назвать функцией x , так как каждому значению аргумента x будут соответствовать два значения функции: $+f(x)$ и $-f(x)$. Рассмотрим теперь последовательность действий:

1. установить, для каких x выполняется условие $f(x) \geq 0$
2. на найденных промежутках значений x построить график функции $y = f(x)$;
3. осуществить зеркальное отражение графика относительно оси Ox

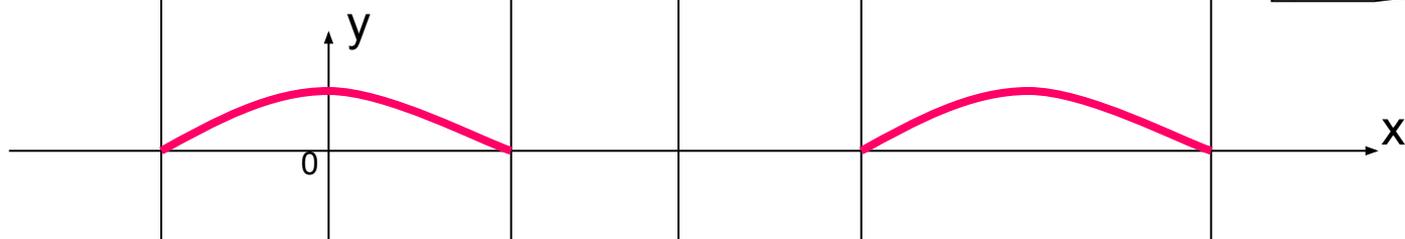
Пример 1.

Построить график функции $|y| = \cos x$

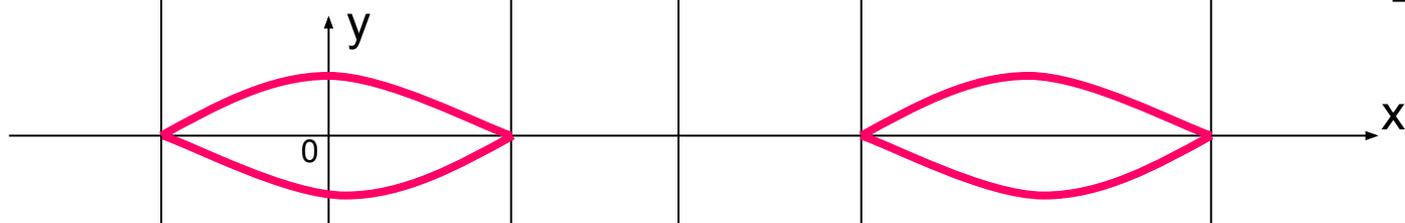
$$y = \cos x$$



$y = \cos x$ (при таких x ,
когда $\cos x$ больше либо
равно 0)

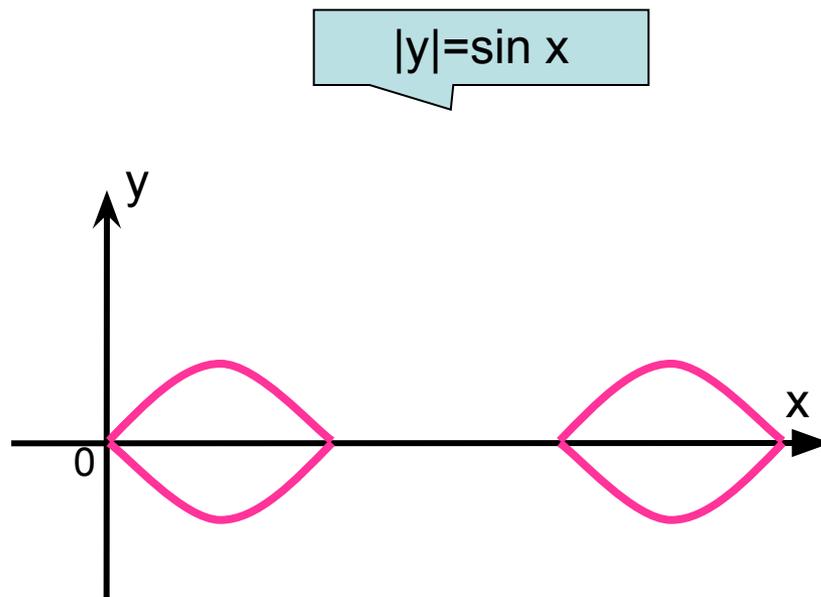
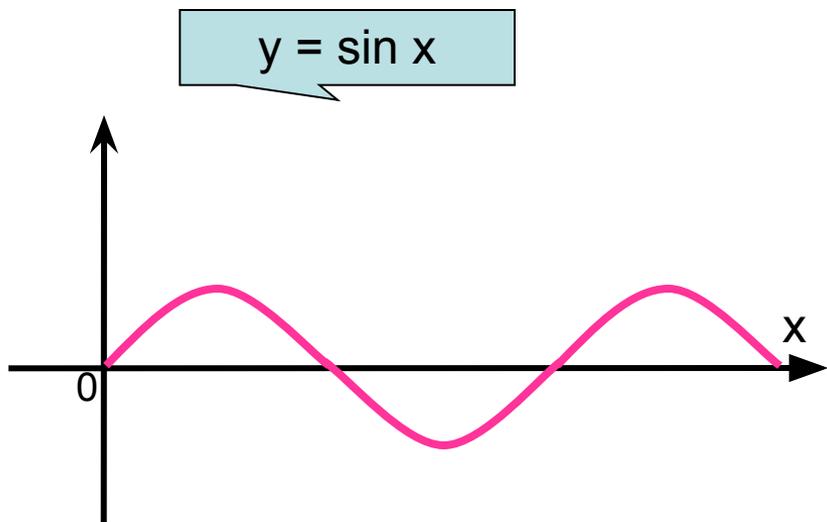


$$|y| = \cos x$$



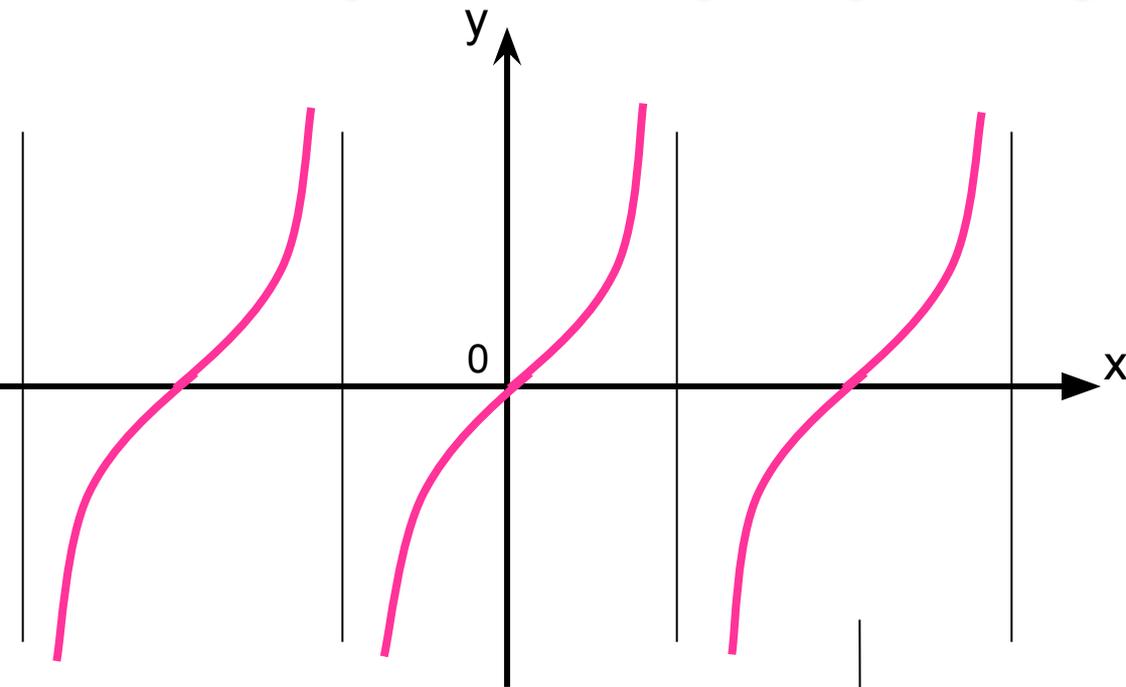
Пример 2.

Построить график функции $|y| = \sin x$

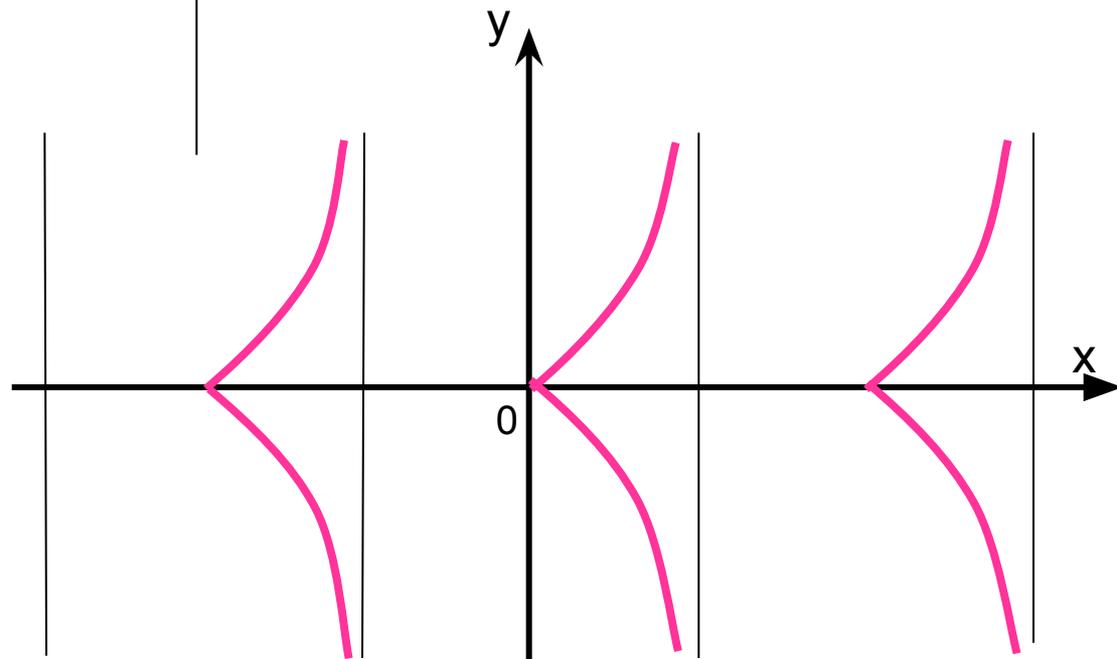


Пример 3.

Построить график функции $|y| = \operatorname{tg} x$

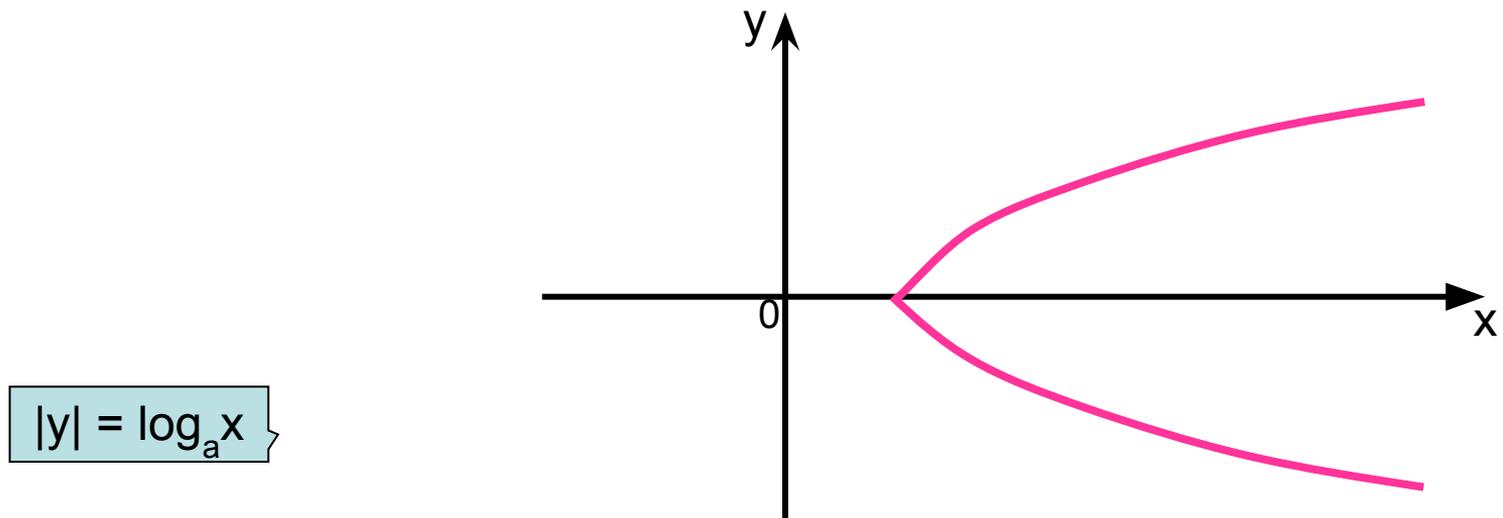
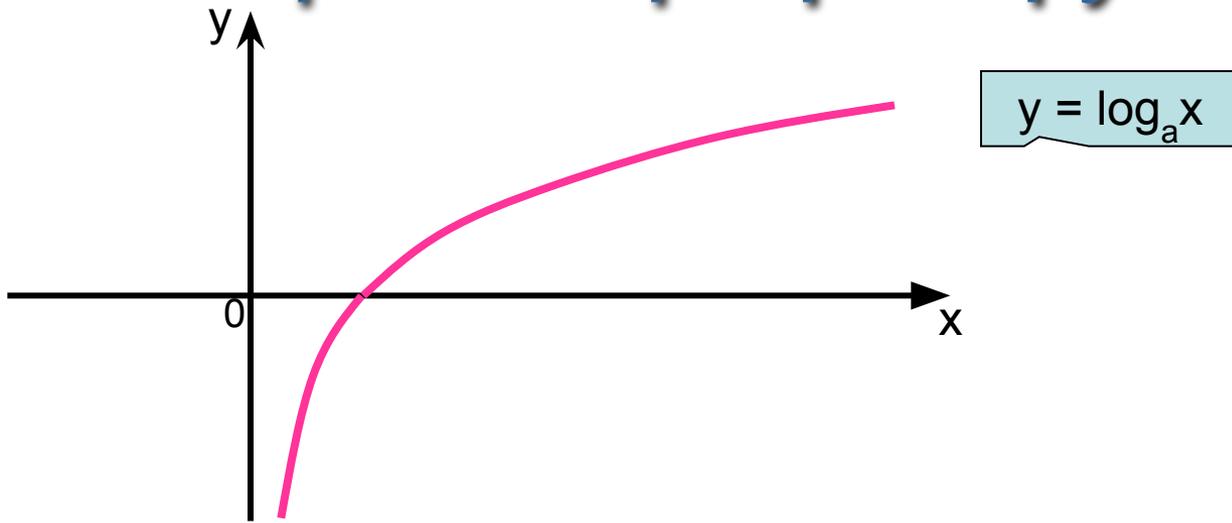


$$|y| = \operatorname{tg} x$$



Пример 4.

Построить график функции $|y| = \log_a x$



Построение графиков функций

$$|y| = |f(x)|$$

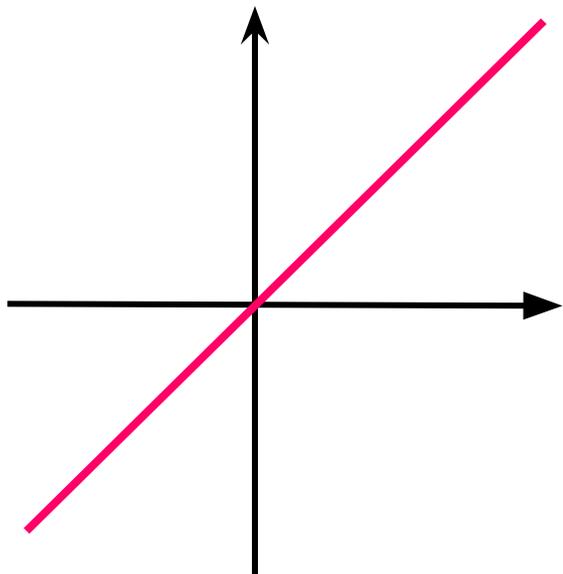
Очевидно, что $y = \pm |f(x)|$, т.е. график функции будет симметричен относительно абсцисс.

Соответствующая последовательность действий:

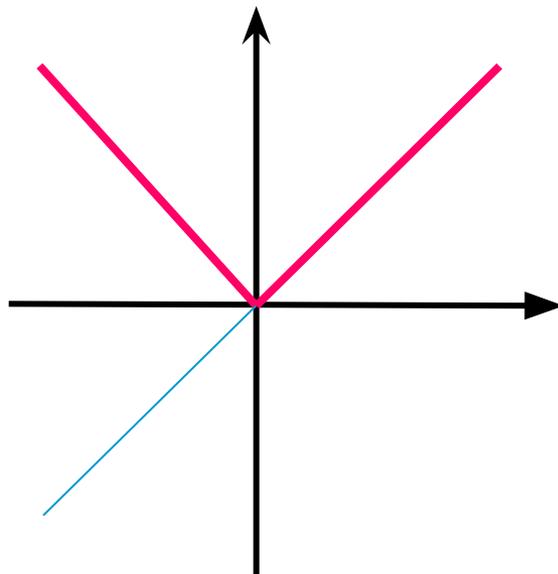
1. построить график функции $y = |f(x)|$;
2. осуществить его зеркальное отражение относительно оси Ox .

Пример. Построить график функции $|y| = |x|$

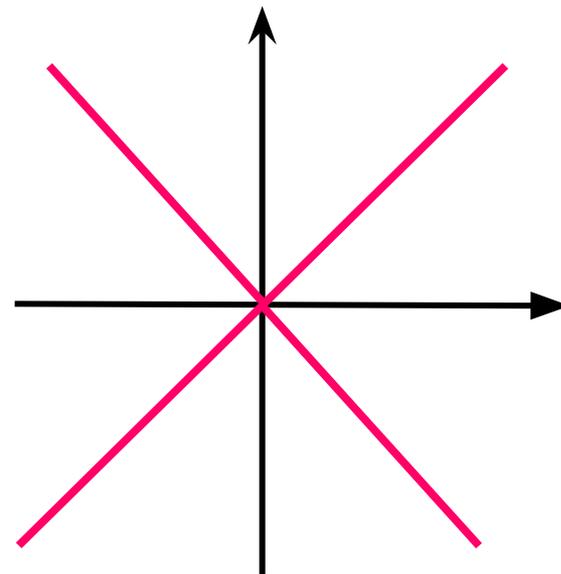
$$y = x$$



$$|y| = |x|$$



$$y = |x|$$



Построение графиков функций вида

$$y = |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n|$$

Укажем последовательность действий:

1. Найдём абсциссы точек перелома графика функции. В данном случае используем для этого условия: $x_n - 1 = 0$; $x_n = 1$; $x_n - 2 = 0$, $x_n = 2$
2. Рассмотрим далее функцию на каждом из полученных промежутков. В рассматриваемом примере

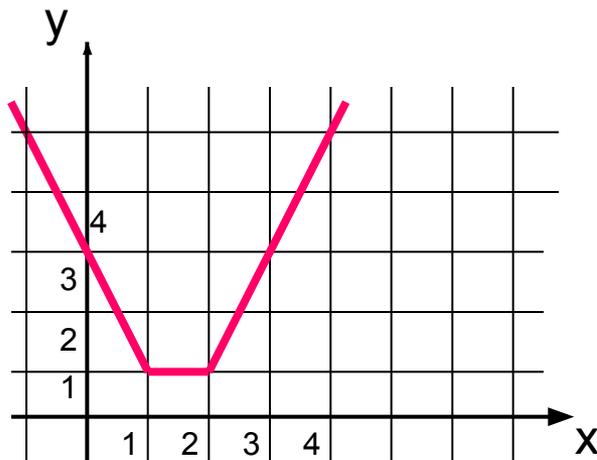
их три $(-\infty; 1]$ $[1; 2]$ $[2; +\infty)$

а) $x \in [2; +\infty)$. Так как оба слагаемых неотрицательны, то на этом промежутке графиком функции будет прямая, выражаемая уравнением $y = 2x - 3$.

б) $x \in [1; 2]$. Первое слагаемое на данном промежутке неотрицательно, второе отрицательно и потому графиком будет прямая $y = 1$.

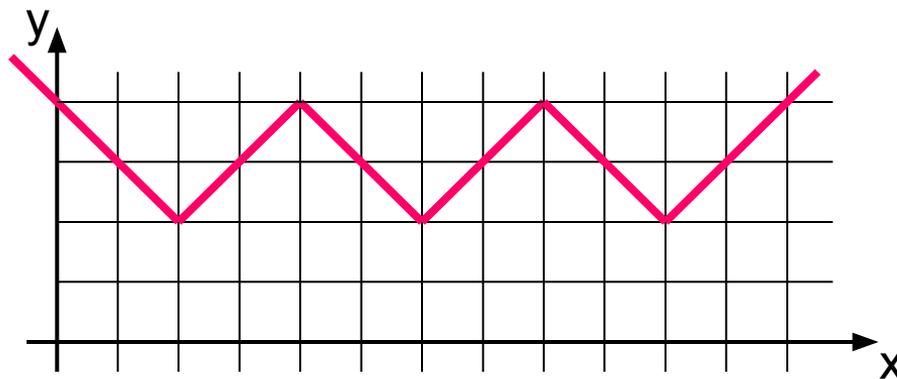
в) $x \in (-\infty; 1]$. Оба слагаемых отрицательны и потому графиком будет прямая $y = 3 - 2x$

Пример 1. Построить график функции $y = |x-1| + |x+2|$



Пример 2. Построить график функции

$$y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|$$



Построение графиков функции вида $y = |||x-a|-b|-c|$

Построить график этой функции можно следующим путём:

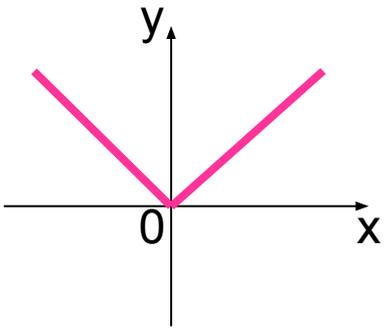
1. Найдём точки перелома функции
2. Проведём ряд тождественных преобразований на каждом из промежутков, ограниченных точками перелома.

Однако целесообразнее в данном случае использовать способ, связанный с геометрическим преобразованием графиков функции.

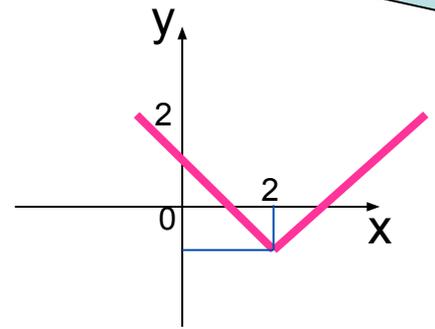
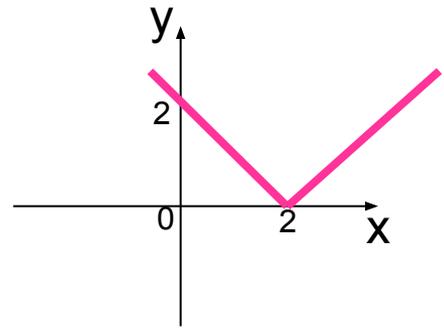
Пример. Построить график функции

$$y = |||x-2|-1|-2|$$

$$y = |x|$$

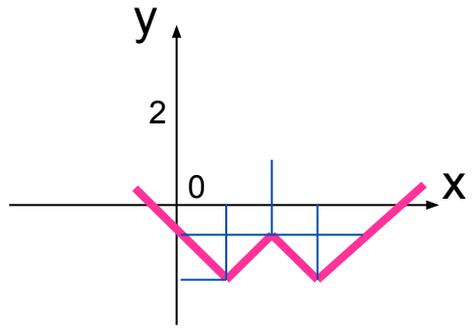
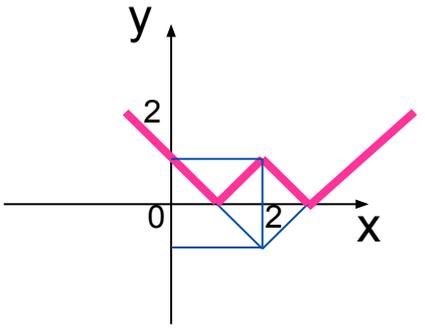


$$y = |x-2|-1$$

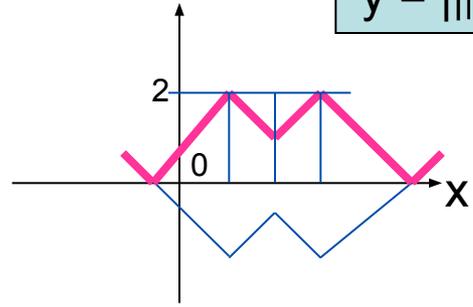


$$y = |x-2|$$

$$y = ||x-2|-1|-2$$



$$y = |||x-2|-1|-2|$$

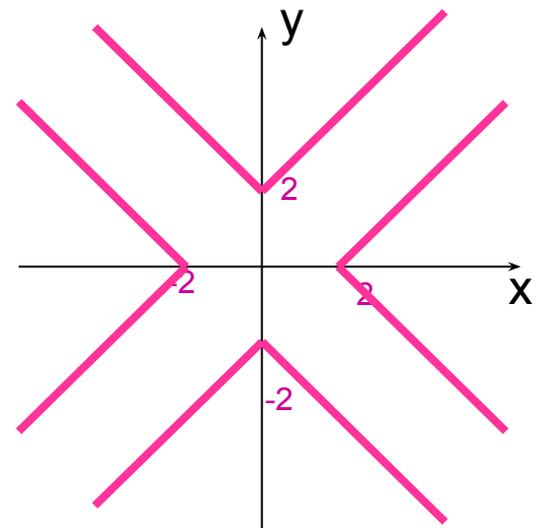
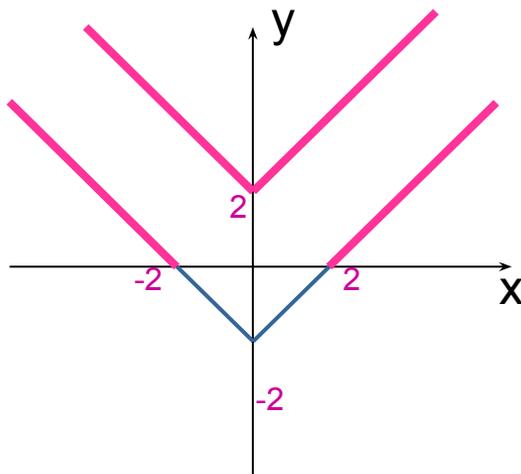
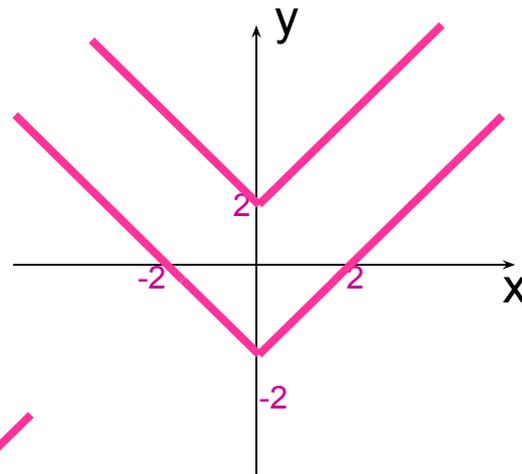
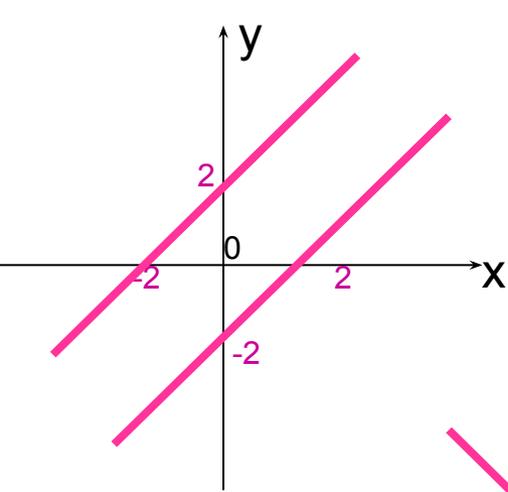


$$y = ||x-2|-1|$$

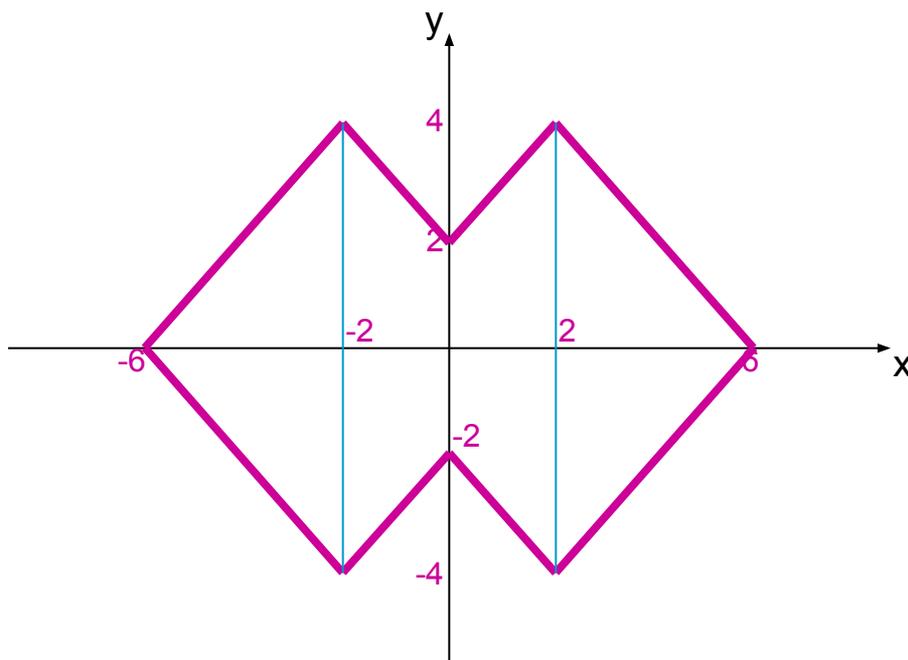
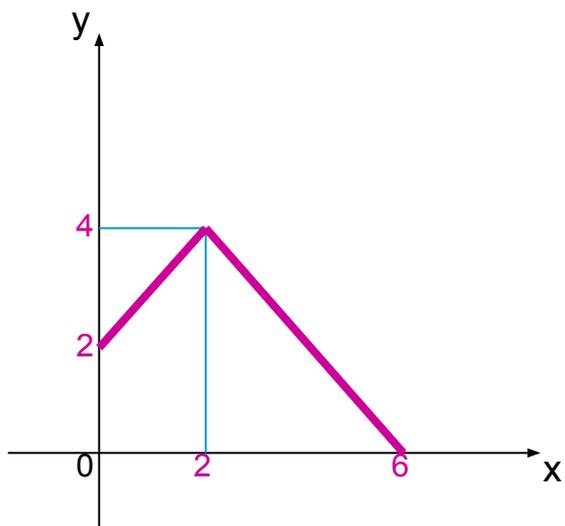
**Построение графиков функций,
аналитические выражения которых
содержат знак модуля, выраженных
НЕЯВНО**

Пример 1. Построить график функции $||y|-|x||=2$

По определению абсолютной величины $|y|=|x|\pm 2$.



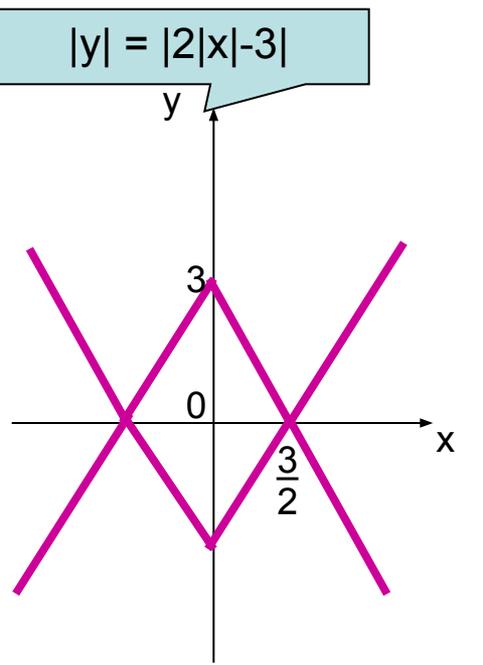
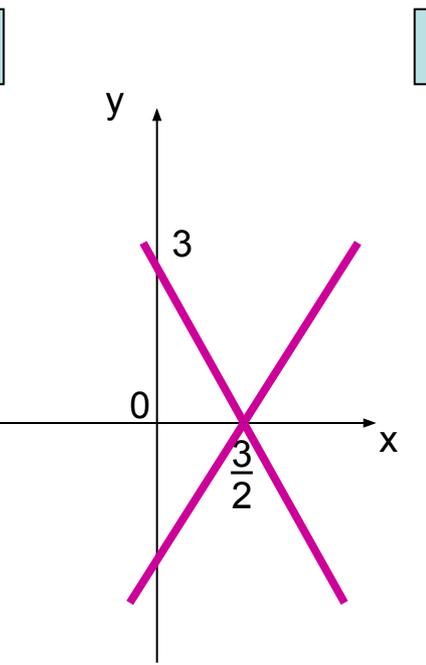
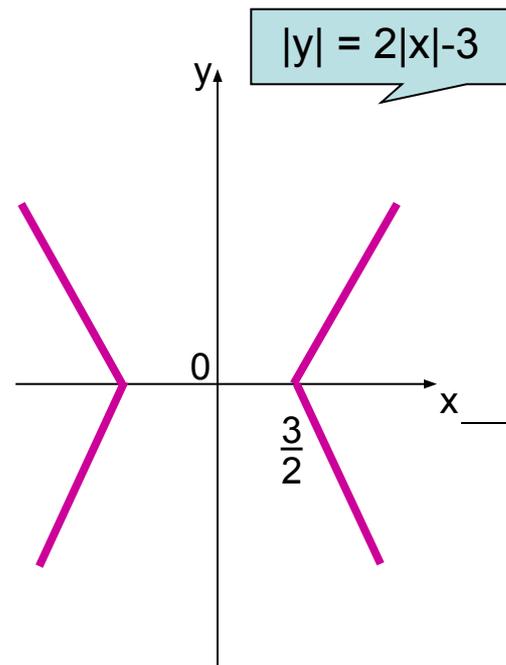
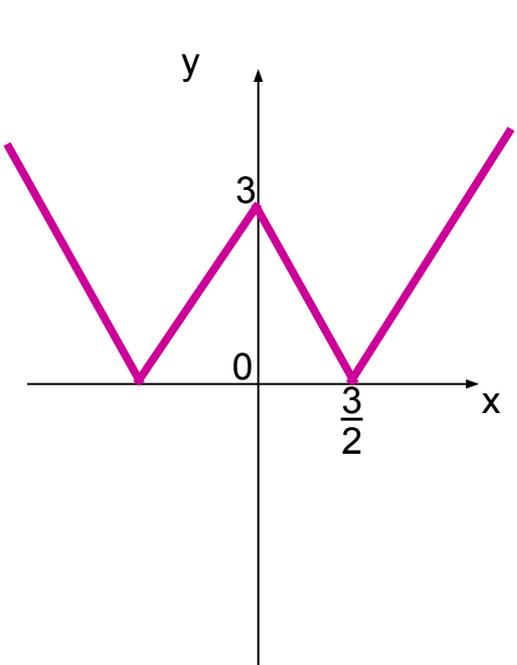
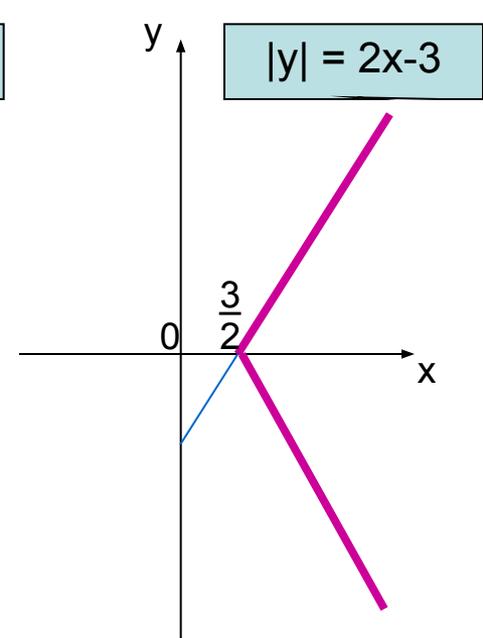
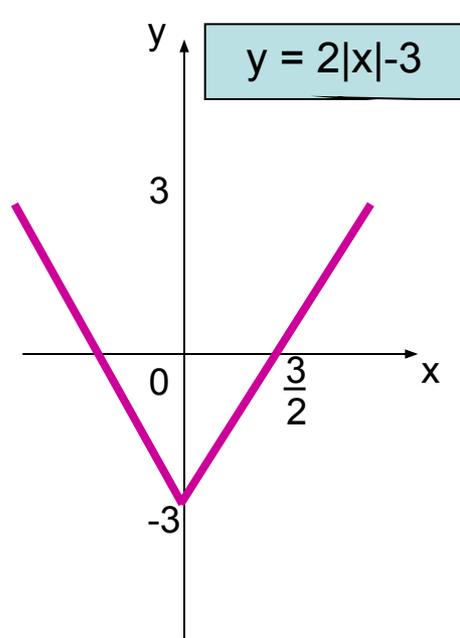
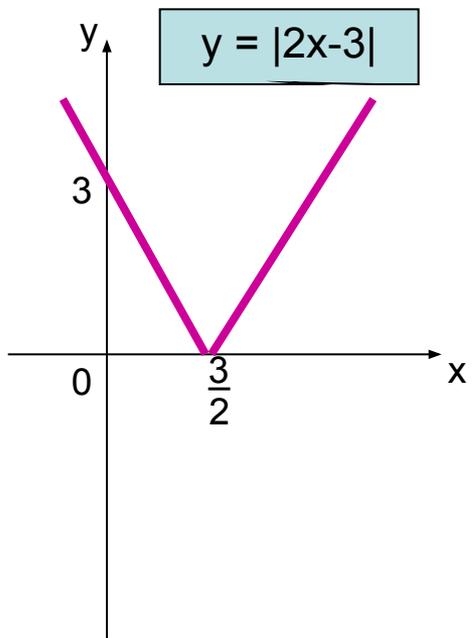
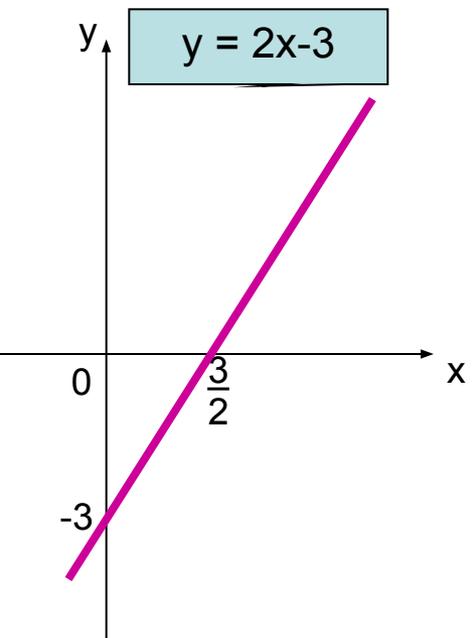
Пример 2. Построить график функции
 $||x|-2|+|y|-2|=2$



Изменение графика функции в зависимости от места установки знака модуля

Пример 1.

График функции $y = 2x - 3$



$y = |2|x| - 3|$

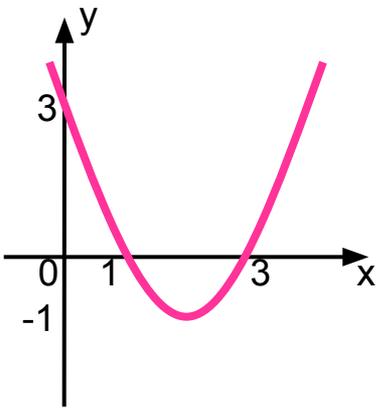
$|y| = |2x - 3|$

Пример 2.

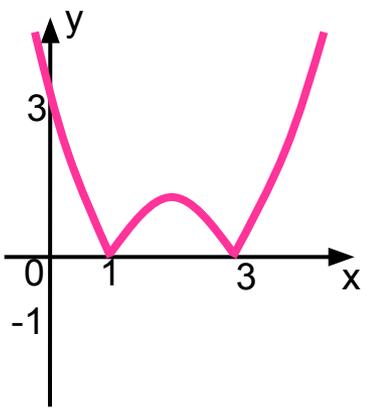
График функции

$$y = x^2 - 4x + 3$$

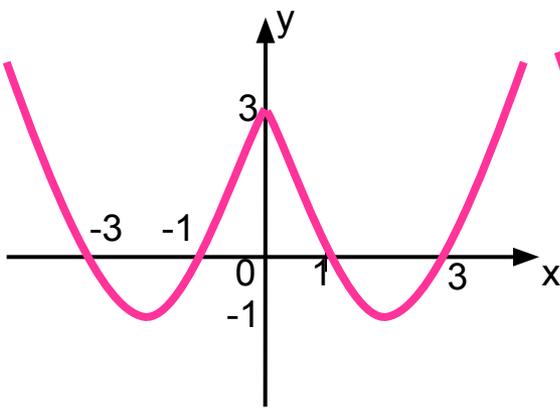
$$y = x^2 - 4x + 3$$



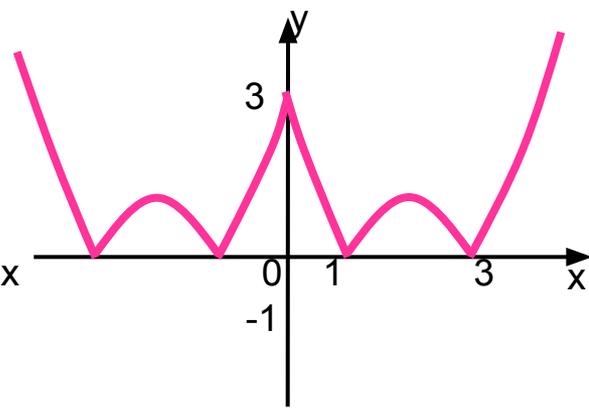
$$y = |x^2 - 4x + 3|$$



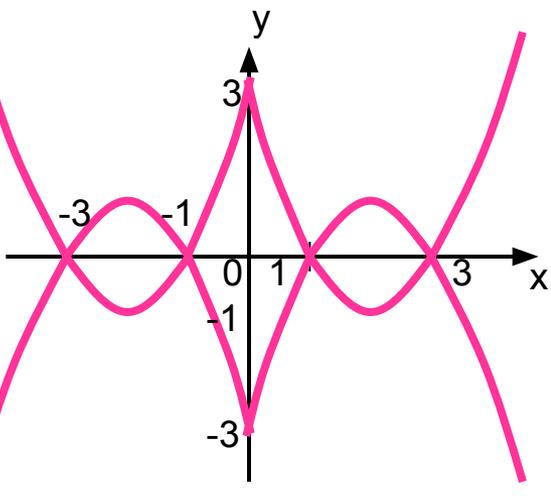
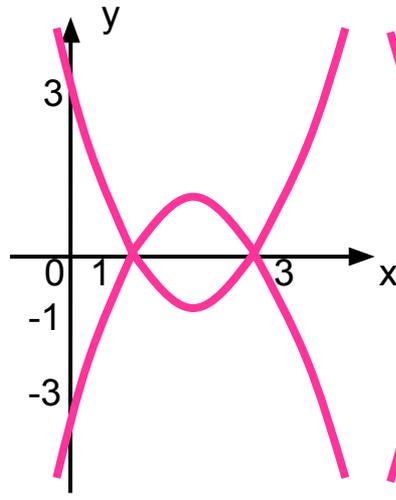
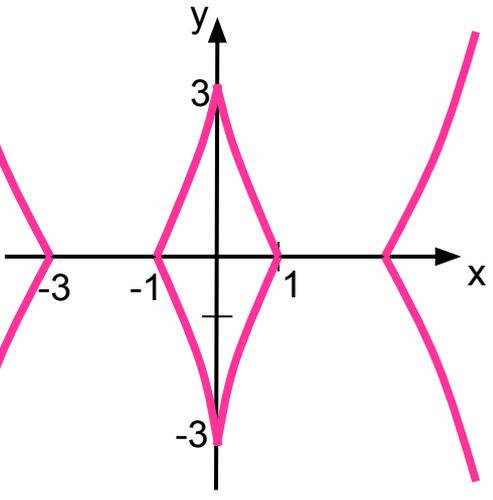
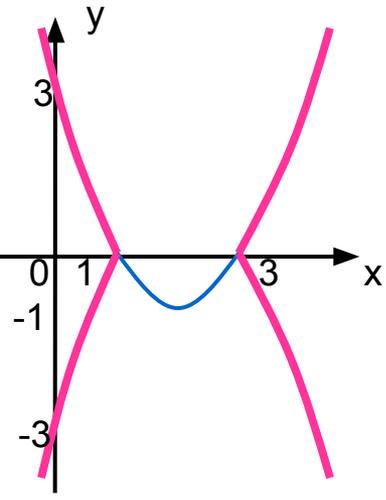
$$y = x^2 - 4|x| + 3$$



$$y = |x^2 - 4|x| + 3|$$



$$|y| = |x^2 - 4x + 3|$$



$$|y| = x^2 - 4x + 3$$

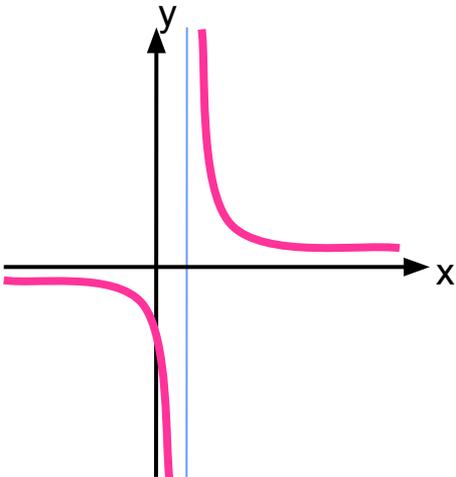
$$|y| = x^2 - 4|x| + 3$$

$$|y| = |x^2 - 4|x| + 3|$$

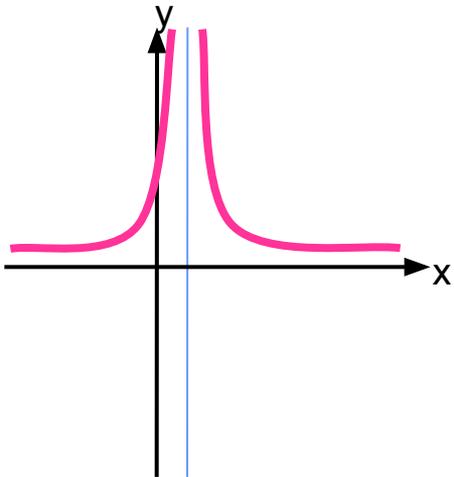
Пример 3.

График функции $y = \frac{1}{x-1}$

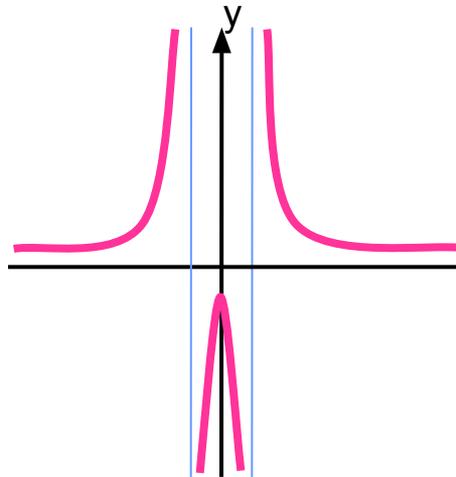
$$y = \frac{1}{x-1}$$



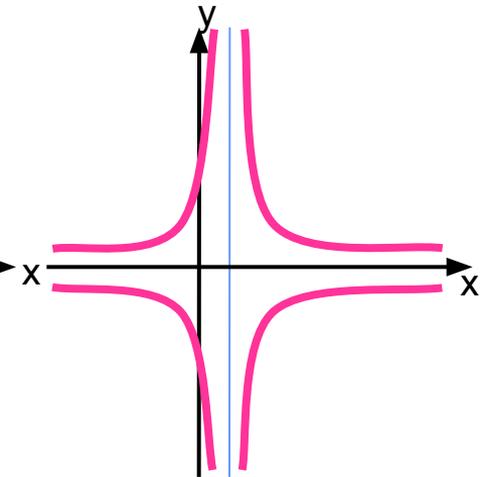
$$y = \frac{1}{|x-1|}$$



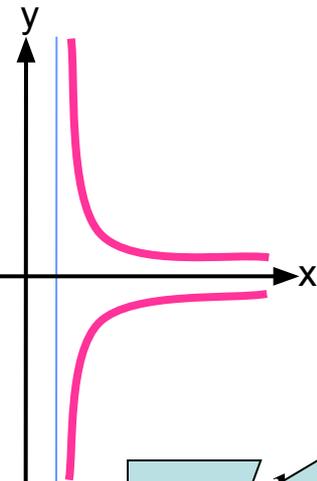
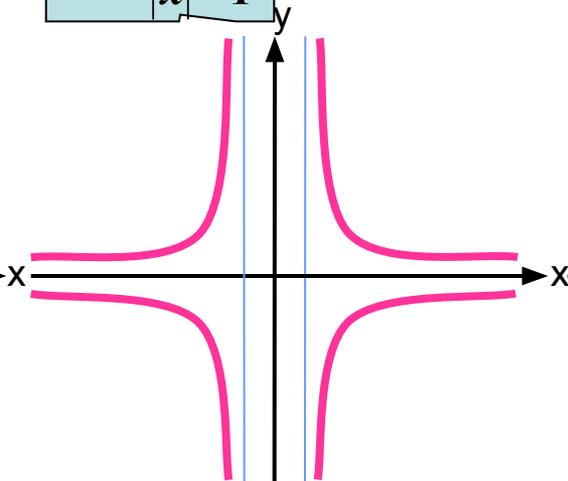
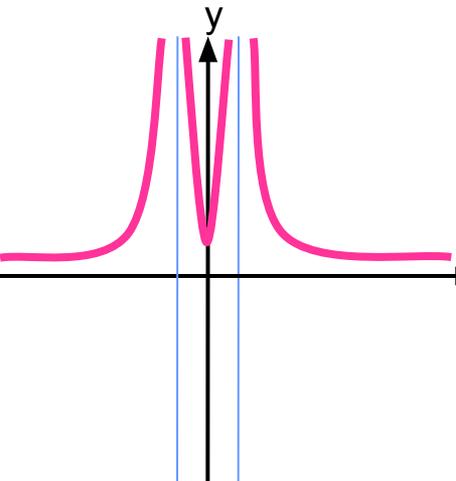
$$y = \frac{1}{|x|-1}$$



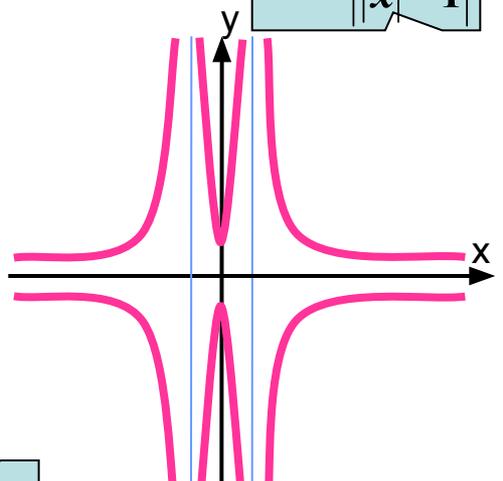
$$|y| = \frac{1}{x-1}$$



$$|y| = \frac{1}{|x|-1}$$



$$|y| = \frac{1}{|x|-1}$$



$$y = \frac{1}{|x|-1}$$

$$|y| = \frac{1}{x-1}$$