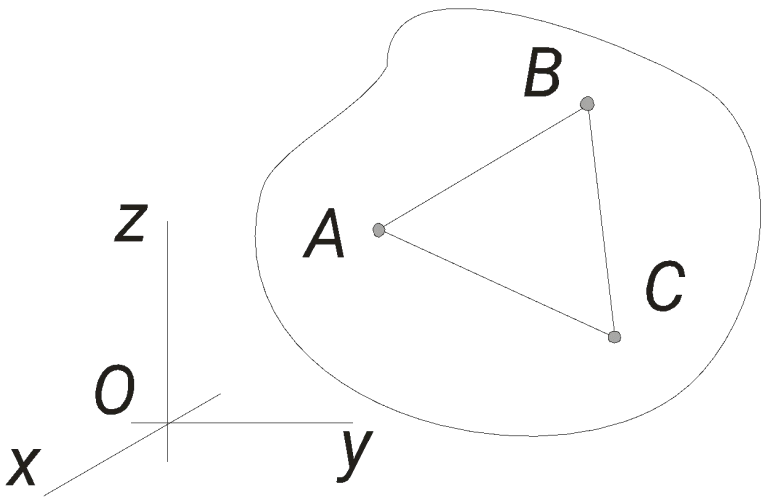
КИНЕМАТИКА ТЕЛА

Лекция 7

Число степеней свободы твердого тела



Числом степеней свободы называется число независимых движений, которые может совершать твердое тело.

Если на тело наложены только геометрические связи (которые накладывают ограничения на координаты точек), то число степеней свободы тела будет равно числу его независимых координат.

$$n = 3 \qquad h = 3$$

$$s = 3n - h = 6$$

$$f_1(\bar{r}) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - AB^2 = 0,$$

$$f_2(\bar{r}) = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 - BC^2 = 0,$$

$$f_1(\bar{r}) = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 - AC^2 = 0.$$

Виды движений твердого тела

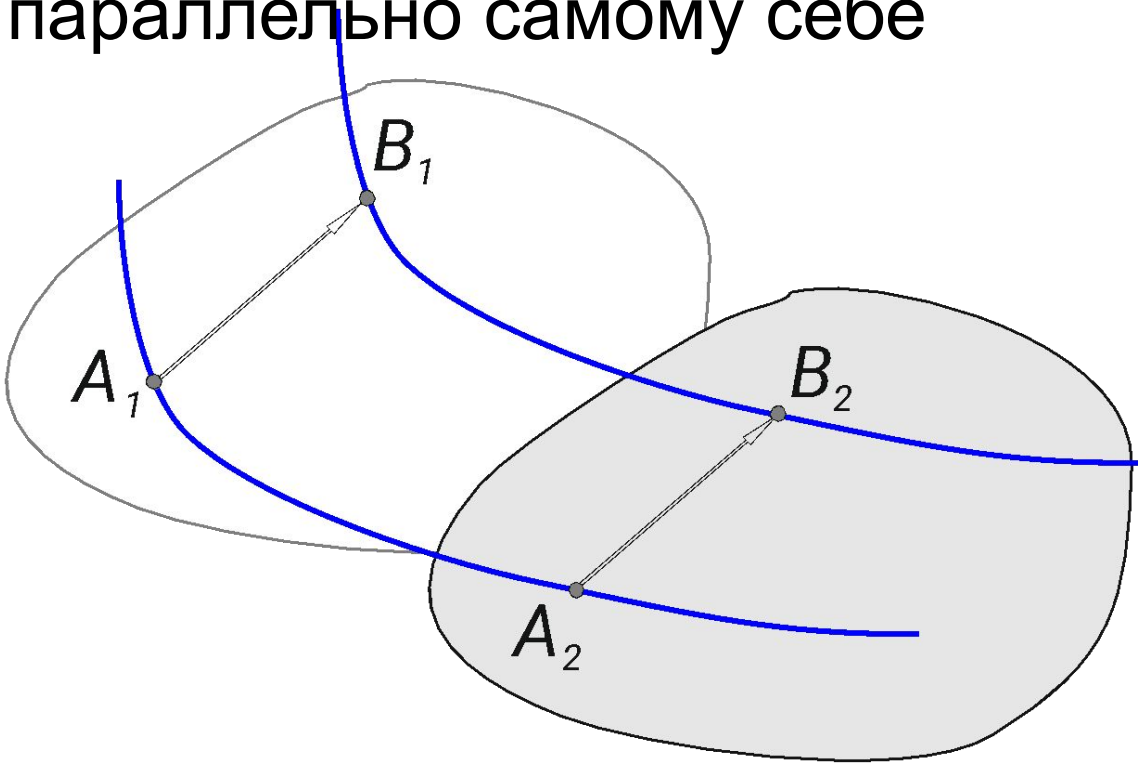
Если на движение твердого тела наложены дополнительные ограничения, число независимых координат уменьшается.

Основные виды движений твердого тела:

- Поступательное
- Вращение вокруг неподвижной оси (вращательное)
- Плоско-параллельное (плоское)
- Вращение вокруг неподвижного центра (сферическое)
- Свободное движение

Поступательное движение твердого тела

Движение тела называется поступательным, если любой отрезок в этом теле перемещается параллельно самому себе



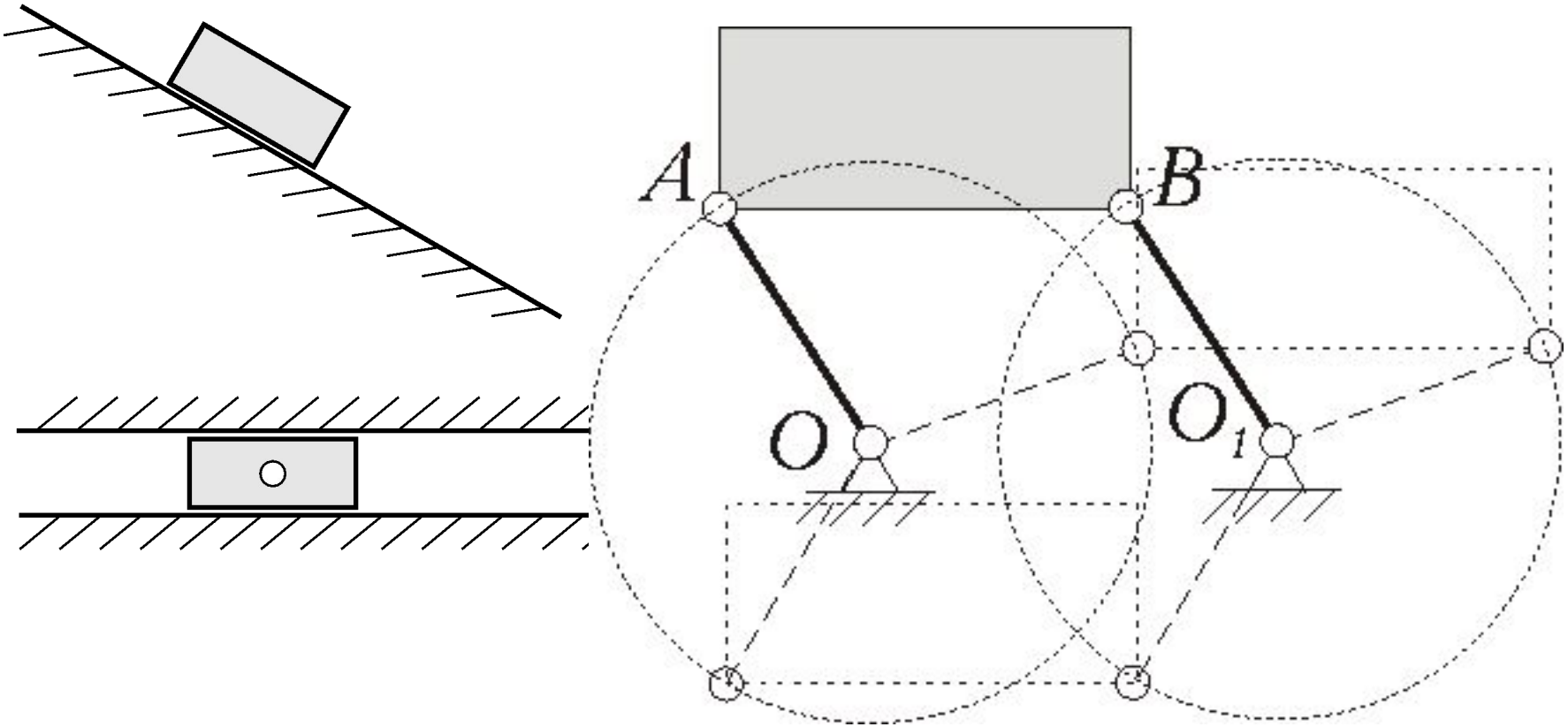
$$\overline{AB} = const$$

$$f_1(\bar{r}) = x_B - x_A = const,$$
$$f_2(\bar{r}) = y_B - y_A = const,$$
$$f_3(\bar{r}) = z_B - z_A = const.$$

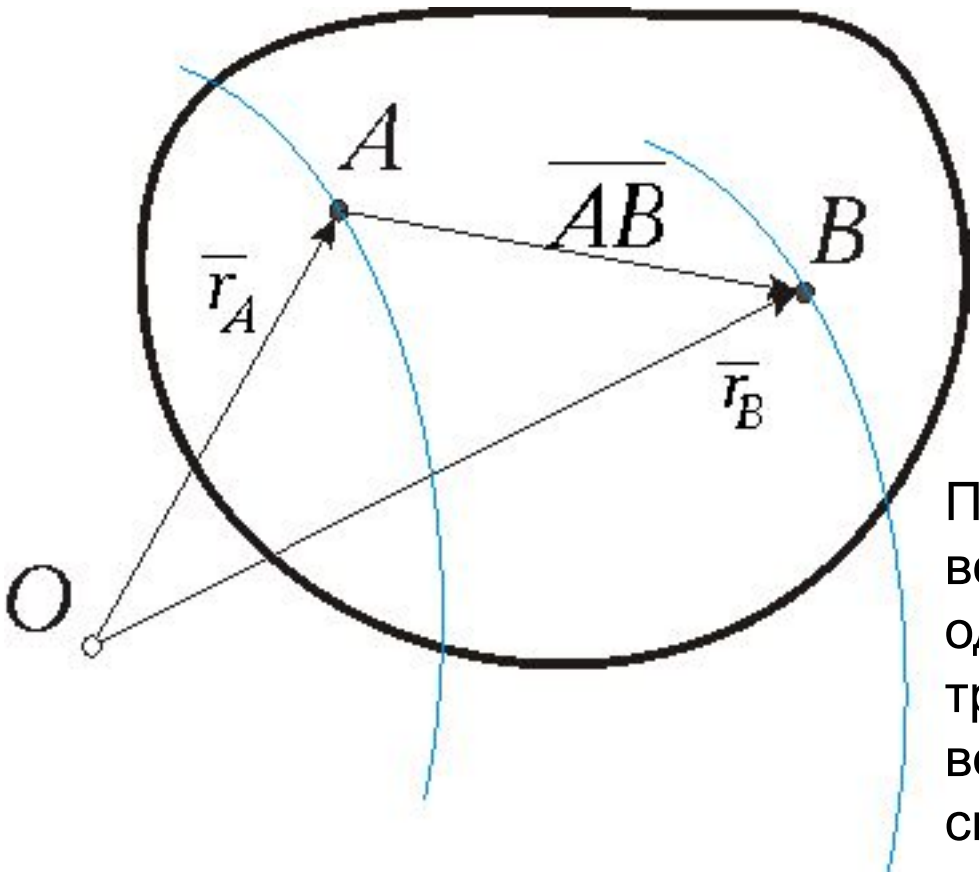
$$h = 3$$

$$s = 6 - h = 3$$

Для того, чтобы тело совершало поступательное движение, на него должны быть наложены дополнительные ограничения



Поступательное движение твердого тела



$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{AB}$$

$$\overline{v}_B = \dot{\overline{r}}_A + \dot{\overline{AB}} = \overline{v}_A$$

$$\overline{w}_B = \dot{\overline{v}}_B = \dot{\overline{v}}_A = \overline{w}_A$$

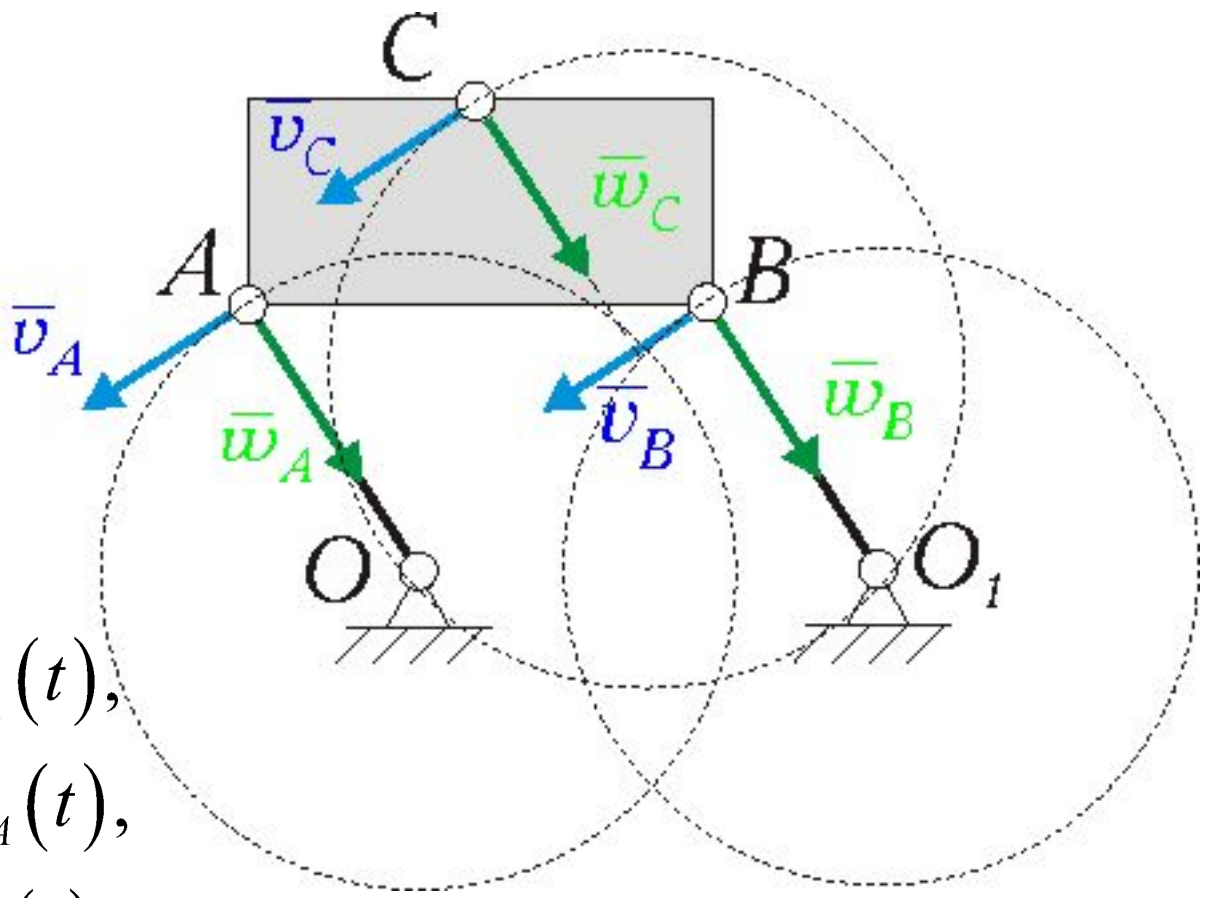
При поступательном движении все точки тела движутся одинаково – имеют одинаковые траектории, равные по величине и направлению скорости и ускорения

Чтобы задать поступательное движение, достаточно задать движение одной точки тела

Поступательное движение твердого тела

$$\overline{v}_A = \overline{v}_B = \overline{v}_C$$

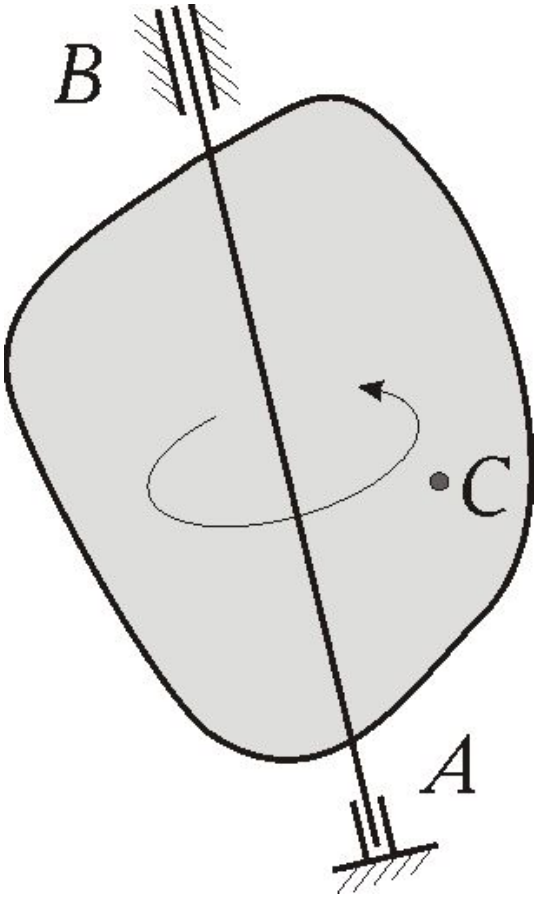
$$\overline{w}_A = \overline{w}_B = \overline{w}_C$$



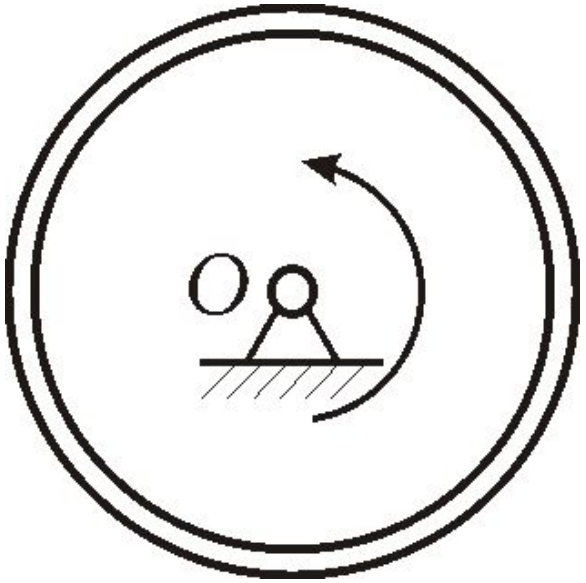
Закон поступательного движения

$$\overline{r}_A = \overline{r}_A(t) \qquad \begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ z_A = z_A(t). \end{cases}$$

Вращение вокруг неподвижной оси



Если при движении тела остаются неподвижными две его точки, то его движение называется вращательным, а прямая, проходящая через неподвижные точки – осью вращения.



Вращение вокруг неподвижной оси

Число степеней свободы

Точки A, B и C

$$n = 3$$

$$x_A = const,\ \ x_B = const,\ \ \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = AC = const,$$

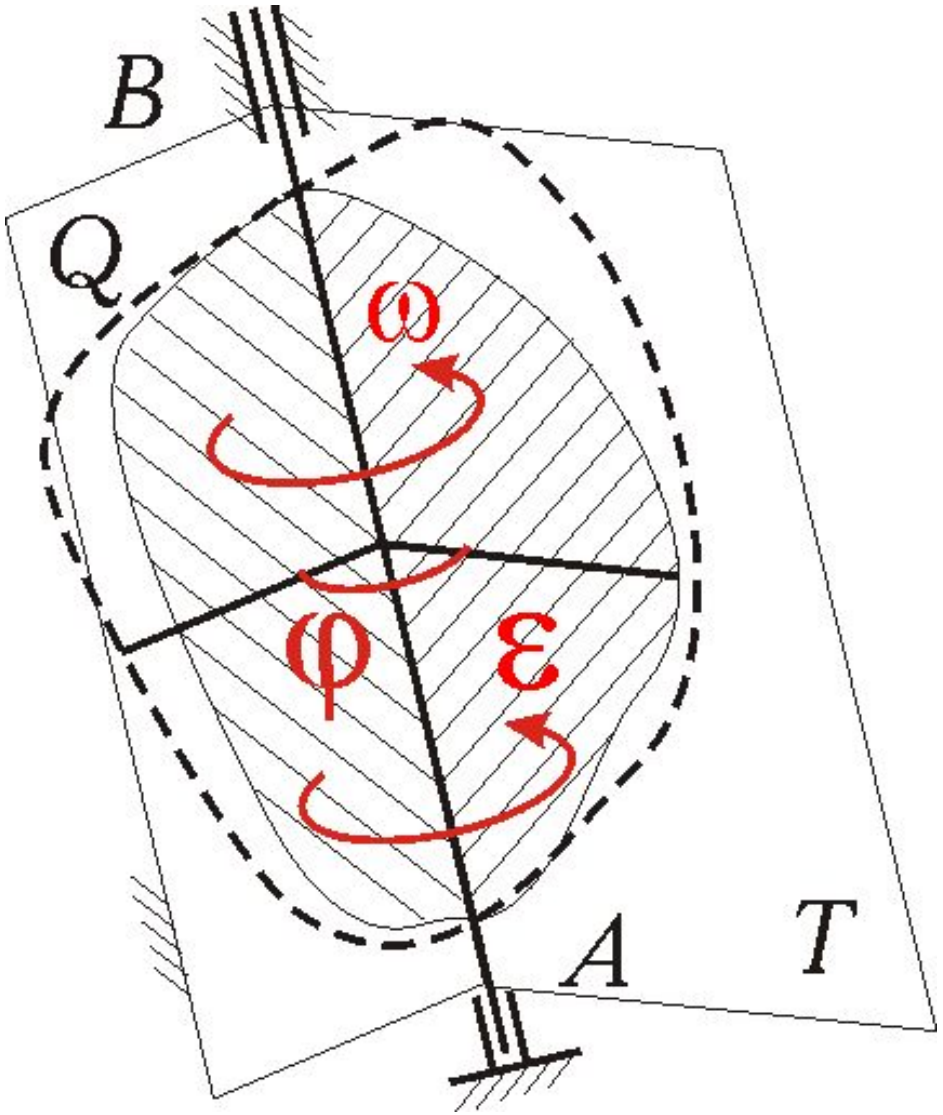
$$y_A = const,\ \ y_B = const,\ \ \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = BC = const,$$

$$z_A = const,\ \ z_B = const.$$

$$s = 3n - 8 = 1$$

При вращении вокруг неподвижной оси тело имеет одну степень свободы, его положение может быть определено одной координатой

Закон вращательного движения



$$\varphi = \varphi(t) \text{ рад}$$

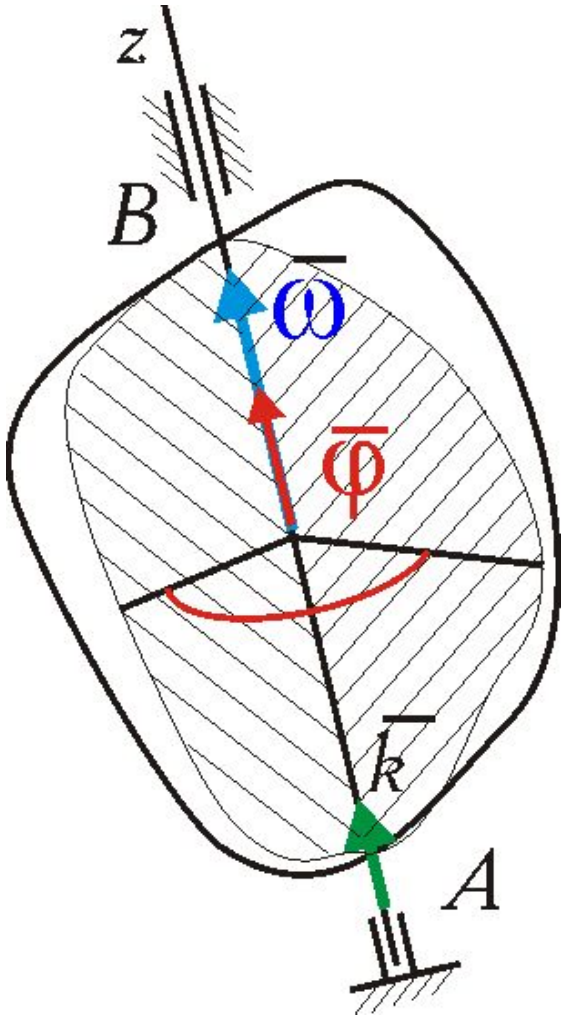
$$\omega = \dot{\varphi} \text{ рад/с} \quad \text{с}^{-1}$$

$$n \text{ об/мин}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

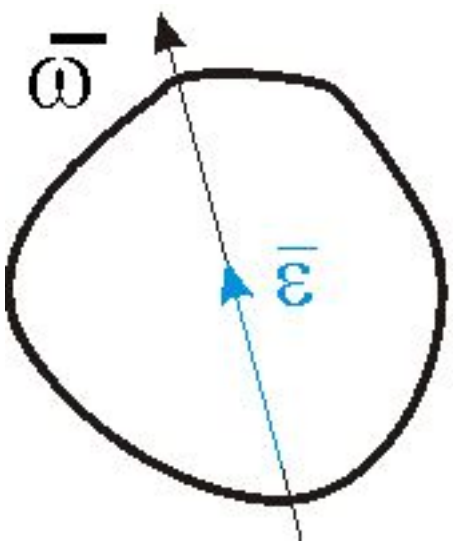
$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \text{ рад/с}^2 \quad c^{-2}$$

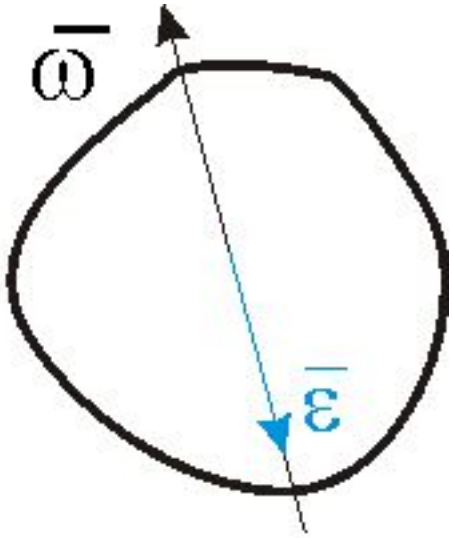
Закон вращательного движения



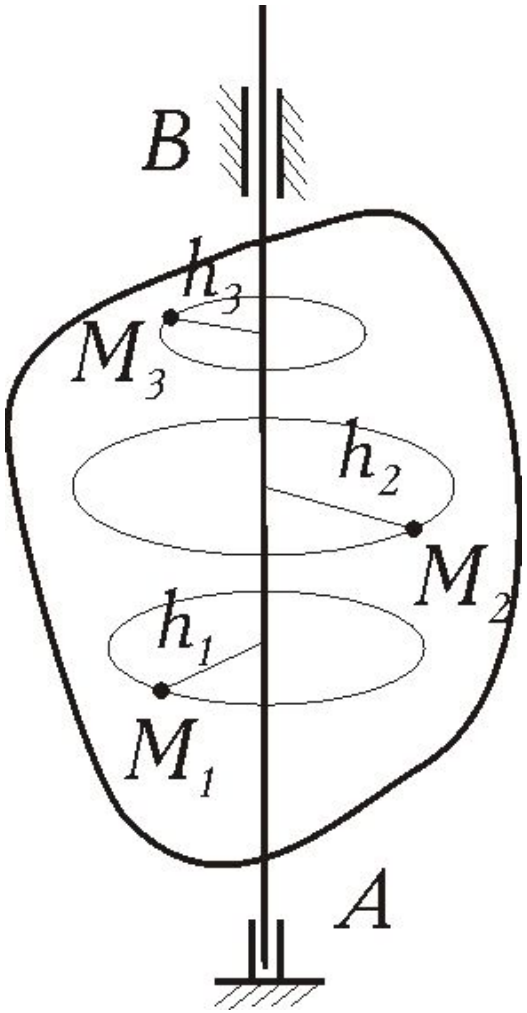
$$\bar{\varphi} = \varphi \bar{k}$$

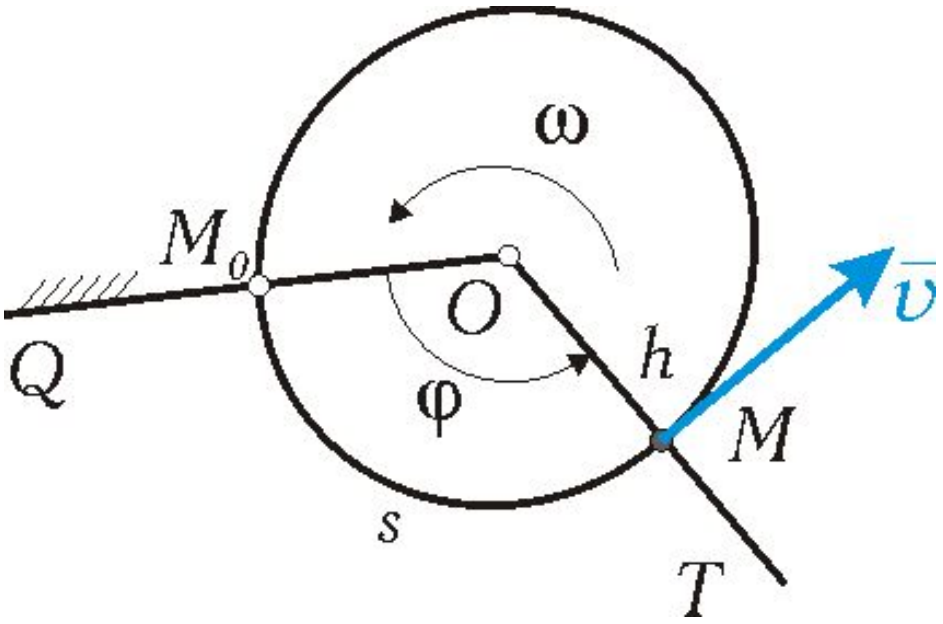
$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}$$





Скорости и ускорения точек вращающегося тела



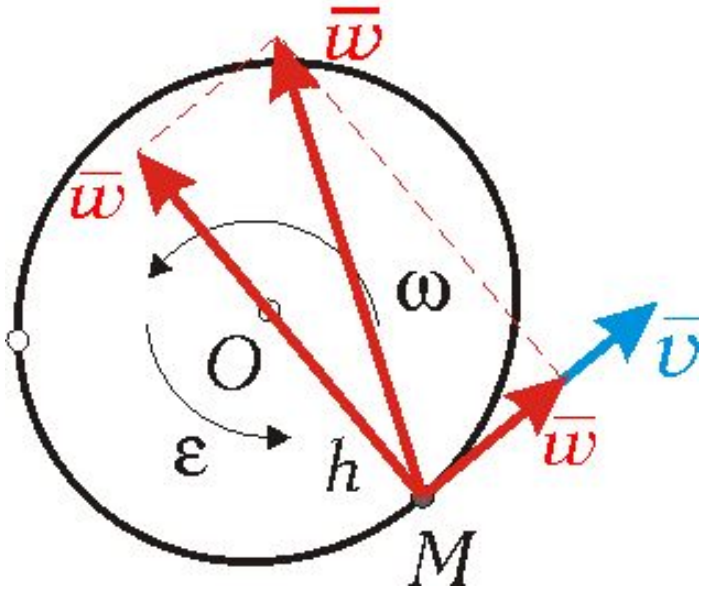


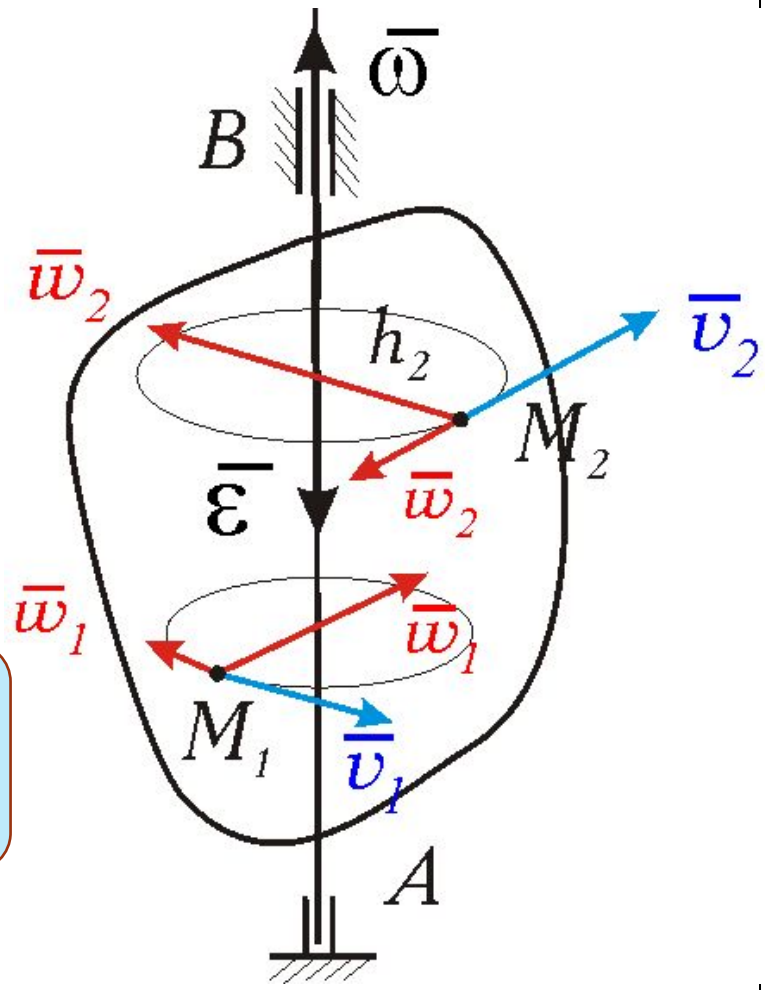
$$s = h\varphi$$

$$v = \dot{s} = \dot{\varphi} h$$

$$\bar{v} \perp OM$$

Скорости и ускорения точек вращающегося тела





$$\bar{w} = \bar{w}_\tau + \bar{w}_n$$

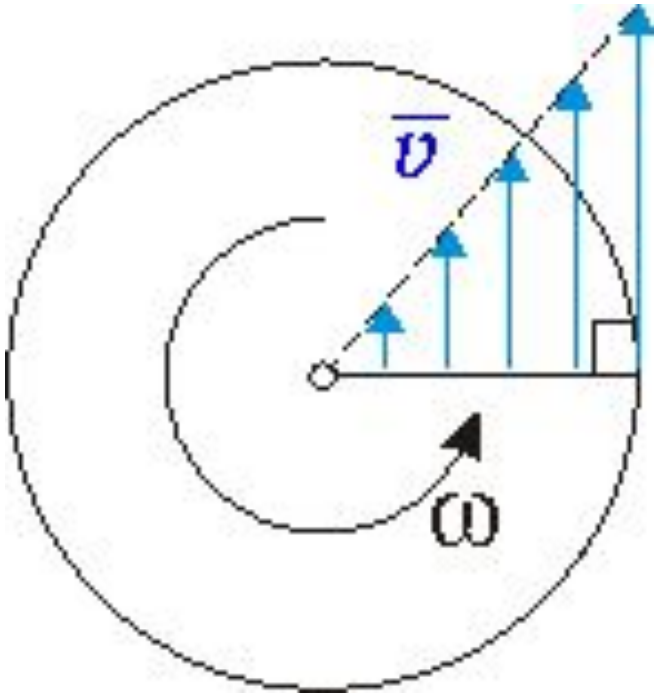
$$w_\tau = \dot{v} = \varepsilon h = w_{вр}$$

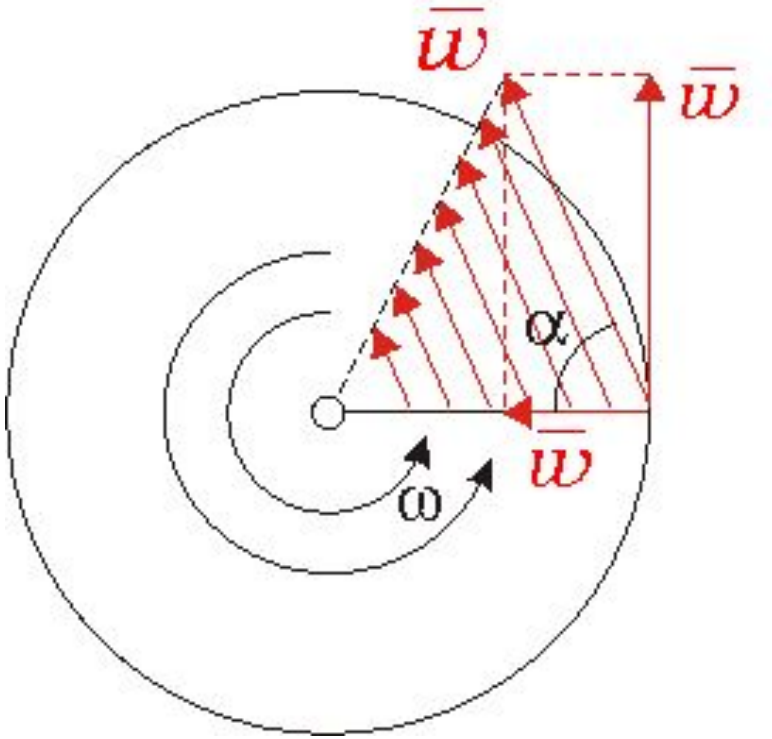
$$w_n = \frac{v^2}{h} = \omega^2 h = w_ц$$

$$\bar{W} = \bar{W}_ц + \bar{W}_{вр}$$

$$w = \sqrt{w_ц^2 + w_{вр}^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Распределение скоростей и ускорений точек вращающегося тела



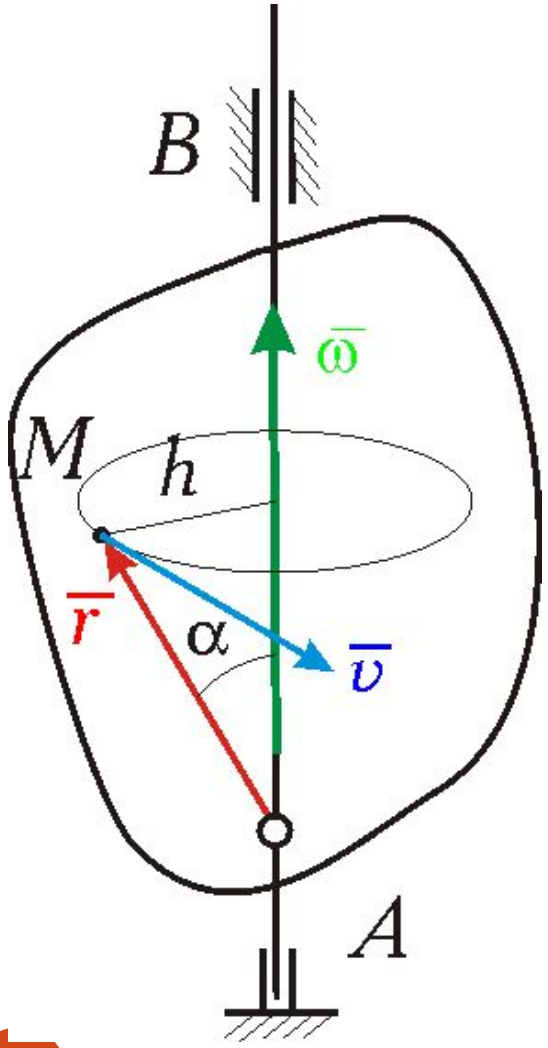


$$v = \omega h$$

$$w = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

$$tg\alpha = \frac{w_{вр}}{w_ц} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad \varepsilon = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

Векторные формулы для скоростей и ускорений точек вращающегося тела



$$v = \omega h = \omega r \sin\alpha$$

$$\bar{v} \perp \bar{\omega},\ \bar{v} \perp \bar{r}$$

$$\boldsymbol{V} = \bar{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

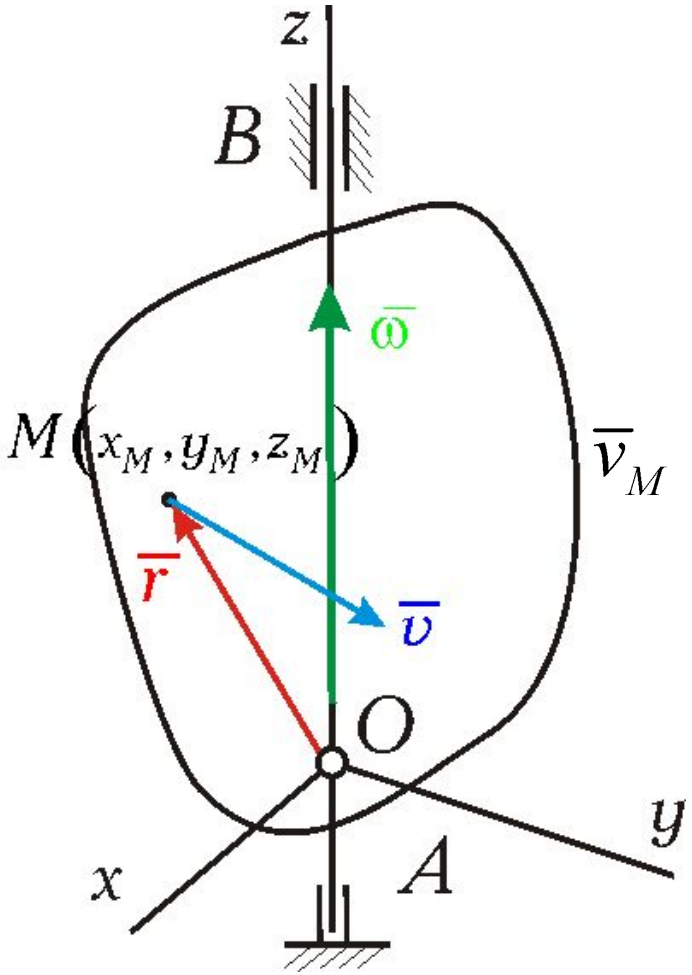
$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} =$$

$$= \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right)$$

$$\boldsymbol{W} = \bar{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \boldsymbol{r}\right)$$

$$\bar{w}_{\text{вр}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad \bar{w}_{\text{ц}} = \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right)$$

Проекции скоростей и ускорений на оси связанной системы координат



$$\bar{\omega}(0,0,\omega)$$

$$\bar{r}_M(x_M, y_M, z_M)$$

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}_M = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_M & y_M & z_M \end{vmatrix} \begin{cases} v_{Mx} = -\omega y_M, \\ v_{My} = \omega x_M, \\ v_{Mz} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{Mx} = -\omega^2 x_M - \varepsilon y_M, \\ w_{My} = -\omega^2 y_M + \varepsilon x_M, \\ w_{Mz} = 0. \end{cases}$$