ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 5
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (продолжение)
МЕТОД ГАУССА

§ 1. МЕТОД ГАУССА

Решить систему линейных уравнений – значит получить равносильную ей систему, которая уже является разрешенной или несовместной. Это удобно сделать при помощи метода Гаусса, который позволяет привести систему к более простому виду, с помощью элементарных преобразований строк в расширенной матрице системы

Пусть дана система линейных уравнений. Поставим на первое место любое уравнение с ненулевым коэффициентом при $\boldsymbol{x_1}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

- ***Шаг 1***: умножим каждое уравнение, кроме первого, на множитель $\boldsymbol{a_{11}/a_{i1}}$, где $\boldsymbol{i}$ -номер уравнения в системе (номер строки системы).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{21}} & + & a_{22}x_2\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{21}} & + & \dots & + & a_{2m}x_m\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{21}} & = & b_2\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{21}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{n1}} & + & a_{n2}x_2\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{n1}} & + & \dots & + & a_{nm}x_m\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{n1}} & = & b_n\cdot\dfrac{a_{11}}{a_{n1}} \end{cases}$$

- после этого все коэффициенты при переменной $\boldsymbol{x_1}$ во всех уравнениях равны $\boldsymbol{a_{11}}$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{11}x_1 & + & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2m}x_m & = & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}x_1 & + & a'_{n2}x_2 & + & \dots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{cases}$$

- ***Шаг 2:*** Вычтем из каждого уравнения системы, начиная со второго, первое уравнение. Получим систему, в которой все коэффициенты при $\boldsymbol{x_1}$ во всех уравнениях, кроме первого обратились в ноль.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & a''_{22}x_2 & + & \dots & + & a''_{2m}x_m & = & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a''_{n2}x_2 & + & \dots & + & a''_{nm}x_m & = & b''_n \end{cases}$$

- Повторить шаги 1-2 для второго столбца, начиная с третьего уравнения. И т.д.
- Рассмотрим частные случаи приведенных по методу Гаусса систем в случае с тремя неизвестными.

- ***Случай 1.*** Система методом Гаусса приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad\;\; a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right|$$

- В данном случае система имеет единственное решение, которое получается последовательным нахождением переменных, начиная с последнего уравнения:

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} \qquad x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3) = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right) - a_{13}\frac{b_3}{a_{33}}\right)$$

- ***Замечание:*** в данном случае ранг основной матрицы равен 3, ранг расширенной матрицы также равен 3.

- ***Случай 2.*** Система методом Гаусса приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \quad\quad\quad\; a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 0 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right|$$

- В данном случае система из-за последнего уравнения несовместна и, следовательно, не имеет решений.
- Ранг основной матрицы системы очевидно равен 2.
- Рассмотрим расширенную матрицу системы и минор из первого столбца, второго столбца и столбца свободных членов. Порядок полученного минора равен 3.
- Следовательно, ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы.
- В этом случае система решения не имеет.

- ***Случай 3***. Система методом Гаусса приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

- Последнее уравнение системы обратилось в ноль, и система стала недоопределенной – два уравнения на три неизвестных. Запишем решение системы следующим образом:

$$x_3 = k \qquad x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3) = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}k)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}k) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right) - a_{13}k\right)$$

- Задавая различные значения параметра ***k***, мы получим различные решения системы. Следовательно, решений бесконечно много. Так как решение зависит от одного параметра, то размерность решения равна 1.

Рассмотрим ранги основной матрицы системы и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad\;\; a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\; 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Они, очевидно, совпадают (равны 2), но меньше размерности системы (количества неизвестных).

Теорема Кронекера-Капелли: Для того чтобы линейная система являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы.

Следствие: Если ранги основной и расширенной матриц линейной системы совпадают с количеством переменных, то система имеет единственное решение.

При применении метода Гаусса на практике следует производить преобразования над строками расширенной матрицы системы.

Пример. Решить методом Гаусса систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2-4x_3+5x_4&=-13;\\ 4x_1-6x_2+x_3-x_4&=14;\\ 6x_1-9x_2+x_3+2x_4&=13;\\ 2x_1-3x_2-2x_3-4x_4&=9. \end{aligned}\right\}.$$

- Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13\\ 4 & -6 & 1 & -1 & 14\\ 6 & -9 & 1 & 2 & 13\\ 2 & -3 & -2 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

- Прибавив ко второй строке первую, умноженную на (-2), к третьей – первую, умноженную на (-3), к четвертой – первую, умноженную на (-1), получим

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13\\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40\\ 0 & 0 & 13 & -13 & 52\\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

Разделим третью строку на 13 и поменяем местами вторую и третью строки:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 13 & -13 & 52 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-9), к четвертой – вторую, умноженную на (-2):

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

Разделив вторую строку на (-2), а третью на (-7), имеем

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Этой матрице соответствует система

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= -13; \\ x_3 - x_4 &= 4; \\ x_4 &= -2; \\ x_4 &= -2. \end{aligned}\right\}$$

Осуществляя обратный ход, находим: $\boldsymbol{x_4} = -2$, $\boldsymbol{x_3} = 2$,

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= -13; \\ x_3 - x_4 &= 4; \\ x_4 &= -2; \\ x_4 &= -2. \end{aligned}\right\} x_1 = \frac{4x_3 - 5x_4 + 3x_2 - 13}{2} = \frac{3x_2 + 5}{2}.$$

Полагая $\boldsymbol{x_2} = c$, получаем общее решение:

$$\left\{ \left(\frac{3c+5}{2}; c; 2; -2 \right) \middle| \forall c \in R \right\}.$$