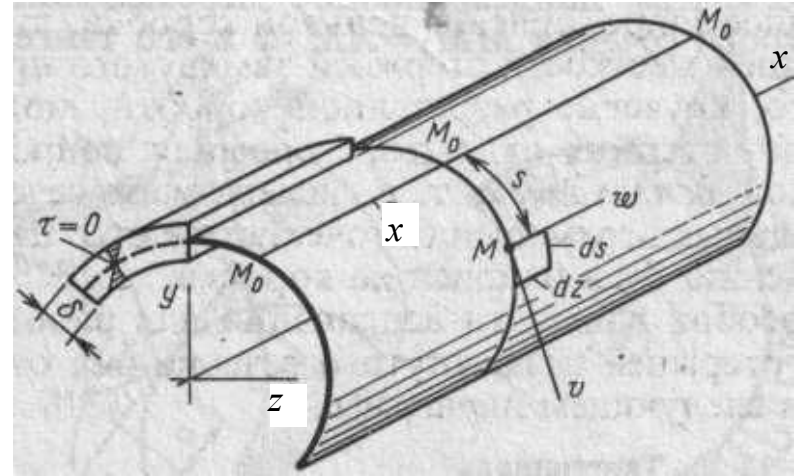


КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

Доцент кафедры
самолетостроения
к.т.н. Мухин Д.В.

1. Деформация незамкнутого тонкостенного сечения

Рассмотрим тонкостенный стержень открытого профиля с произвольной формой сечения. При свободном кручении касательные напряжения изменяются по толщине стенки δ по линейному закону так, что в точках срединной поверхности $\tau=0$. Поэтому деформация средней линии каждого поперечного сечения при свободном кручении возникает *без деформаций в срединной поверхности стержня*.

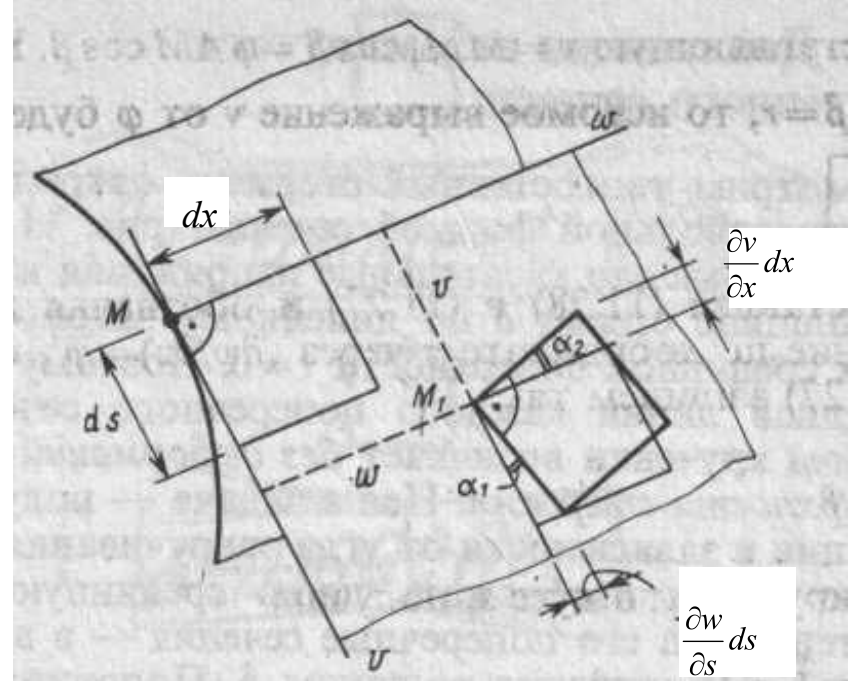


Наша задача — получить эти деформации в зависимости от угла закручивания $\varphi(x)$. Далее будем изображать лишь срединную поверхность стержня, а его поперечные сечения — в виде средних линий, без указания толщины δ . Положение произвольной точки $M(x,s)$ в срединной поверхности зададим двумя координатами x и s , причем дуга s отсчитывается от некоторой начальной точки M_0 , подлежащей далее определению.

В точке M проведем плоскость, касательную к срединной поверхности, и обозначим перемещения точки в этой плоскости w и v , где v — перемещение в тангенциальном к контуру сечения направлении.

На рис. показано, что в результате поворота сечения и его деформации точка M переместилась в положение M_1 вместе с элементом срединной поверхности $dx \times ds$. Получим связь между перемещениями w и v , для чего напомним условие отсутствия угла сдвига элемента срединной поверхности, выделенного в точке M :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 \quad \text{или} \quad \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) ds}{ds} = - \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx}{dx}$$



Знак минус поставлен потому, что приращение перемещения $(dv/dz)dz$ направлено в сторону, противоположную направлению отсчета координаты s .

После сокращения на ds и dx получим искомое соотношение:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{Условие отсутствия сдвигов в срединной поверхности}$$

Примем гипотезу о том, что вдоль всего стержня установлены диафрагмы, которые, не сопротивляясь деформации, обеспечивают при закручивании стержня поворот каждого поперечного сечения как жесткого диска.

(гипотеза неизгибаемости контура поперечного сечения)

На рисунке изображен поворот сечения на угол φ относительно полюса или центра кручения A (он также подлежит определению). Угол φ будем считать положительным, если он направлен против хода часовой стрелки при взгляде на сечение в положительном направлении оси x .

Из рис. найдем полное перемещение точки M в плоскости сечения $MM_1 = AM \cdot \varphi$ и его тангенциальную составляющую $v = MM_1 \cdot \cos \beta = \varphi \cdot AM \cdot \cos \beta$. Но так как $AM \cdot \cos \beta = r$ (высота, опущенная из центра кручения на касательную к контуру v) то искомое выражение v от φ будет иметь вид:

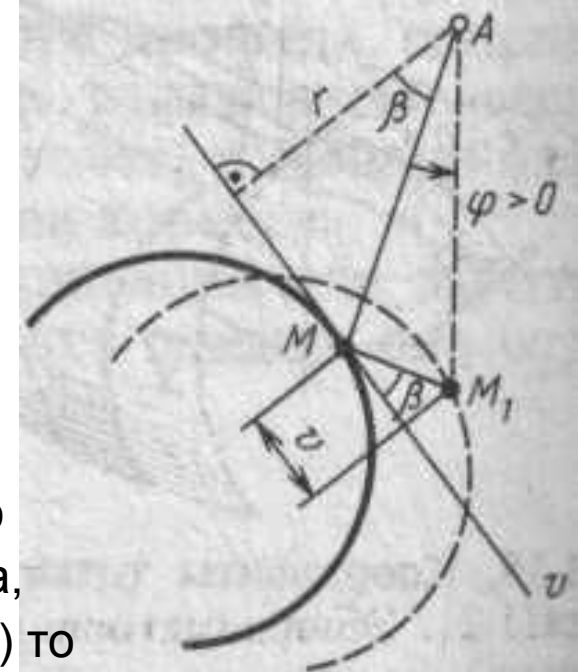
$$v = r\varphi$$

Подставляя в условие отсутствия сдвигов в срединной поверхности и обозначая дифференцирование по координате x через $(d\varphi/dx) = \varphi'$, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -r\varphi'$$

Интегрируя данное выражение по дуге s , получим: $w = -\varphi' \int_{M_0}^M r ds + w_0$

где w_0 — перемещение начальной точки M_0 .



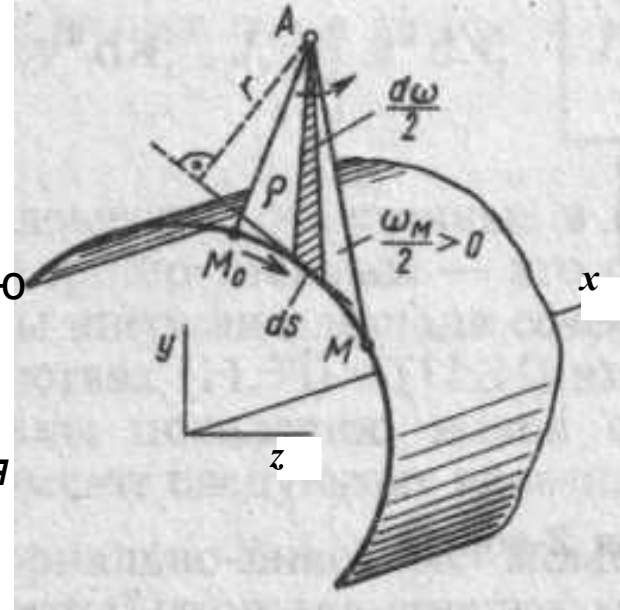
Произведение $r \cdot ds = d\omega$ стоящее под знаком интеграла геометрически представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника с основанием ds , а весь интеграл вдоль дуги s от M_0 до M дает так называемую **секториальную площадь** ω , т. е. площадь, покрываемую радиусом точки при ее движении вдоль контура из начальной точки M_0 в рассматриваемую точку M .

Секториальная площадь $\omega > 0$, если радиус ρ вращается против хода часовой стрелки (при взгляде на сечение в положительном направлении оси x). В дальнейшем примем, что $\omega_0 = 0$, тогда формула окончательно примет вид

$$w = -\varphi' \cdot \omega$$

закон изменения перемещения w вдоль контура сечения вследствие деформации сечения в срединной поверхности.

Так как w пропорционально ω , то говорят, что в тонкостенном стержне открытого профиля *деформация происходит по закону секториальных площадей*. Степень развития деформаций сечения зависит от относительного угла закручивания φ' . С крутящим моментом φ' связан соотношением изученным ранее. Между положением точки на дуге s и площадью ω существует однозначное соответствие. Поэтому секториальную площадь ω называют **секториальной координатой точки**. Если ее линейные координаты x и y имеют размерность $[м]$, то размерность ω будет $[м^2]$.



Пример 1: Построить эпюру ω и найти депланацию для Z-образного сечения, если углы закручивания стержня изменяются по закону $\varphi = -\theta \cdot x$.

Решение. Так как профиль симметричен, то центр кручения будет располагаться по оси симметрии.

Проведем ось кручения x через точку A . Из соображений симметрии так же будем считать, что точки продольного волокна, совпадающего с осью x , закреплены от продольных смещений ($w=0$).

Следовательно, точка M_0 совпадает с точкой A и располагается на оси x (в центре тяжести сечения).

При движении из M_0 в точку 1 радиус AM лишь удлиняется, не покрывая никакой площади.

Поэтому на участке $M_0 - 1$ имеем $\omega = 0$. При движении из точки 1 в точку 2 радиус AM

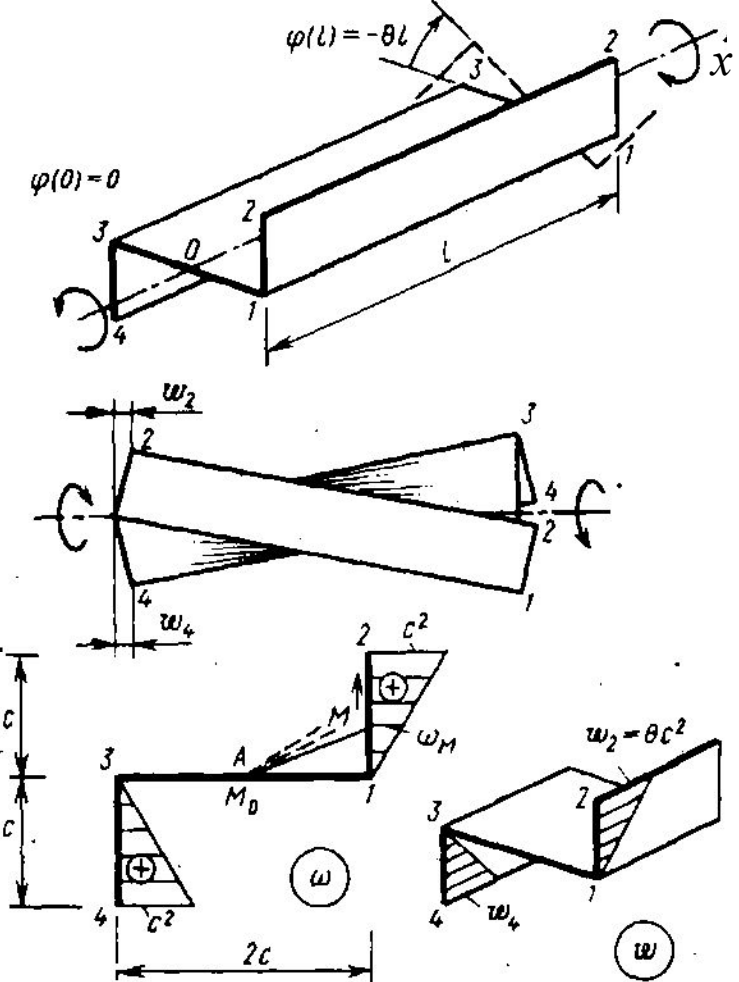
вращается против хода часовой стрелки, поэтому $\omega > 0$. В точке 2 $\omega_2 = c^2$, а в промежуточных точках она изменяется по линейному закону. То же будет для левого участка контура.

Эпюра ω изображена на рисунке.

Углы закручивания по длине стержня изменяются по закону $\varphi = -\theta \cdot x$.

Следовательно, относительный угол закручивания $\varphi' = -\theta$. По формуле $w = -\varphi' \cdot \omega$ найдем $w_2 = w_4 = \theta \cdot c^2$. Эпюра w изображена на рисунке.

Сравнение эпюр ω и w подтверждает вывод о том, что в стержнях открытого профиля депланация совершается по закону секториальных площадей.



2. Главные секториальные координаты

Из теории изгиба стержней известно, что использование в поперечном сечении специально выбранной системы осей координат (y, z) , которую мы назвали главными центральными осями, существенно упрощает расчетные формулы и создает большие удобства в изучении деформаций. Как мы увидим далее, то же самое имеет место для стесненного кручения. Поэтому удобно здесь распространить уже известные для координат x и y понятия и на новую секториальную координату ω .

Составим таблицу, симметричную относительно главной диагонали, которую назовем «матрицей моментов инерции»:

$$J = \begin{bmatrix} J_z & J_{yz} & J_{\omega z} \\ J_{zy} & J_y & J_{\omega y} \\ J_{z\omega} & J_{y\omega} & J_{\omega} \end{bmatrix}$$

Здесь внедиагональные элементы матрицы J представляют интегралы от произведения координат, а элементы на главной диагонали — интегралы от их квадратов:

$$J_{zy} = \int_A zy dA; \quad J_{z\omega} = \int_A z\omega dA; \quad J_{y\omega} = \int_A y\omega dA;$$

$$J_z = \int_A z^2 dA; \quad J_y = \int_A y^2 dA; \quad J_{\omega} = \int_A \omega^2 dA;$$

Новые моменты инерции включающие новую секториальную координату ω и имеют следующие названия и размерность:

$J_{z\omega}$ — секториально-линейные моменты инерции площади сечения, m^5 ;

J_{ω} — секториальный момент инерции сечения, m^6 .

Координаты называются **главными**, если в матрице моментов инерции J все внедиагональные элементы равны нулю.

Следовательно, главные секториальные координаты должны быть подчинены условиям:

$$J_{z\omega} = \int_A z \cdot \omega \cdot dA = 0; \quad J_{y\omega} = \int_A y \cdot \omega \cdot dA = 0;$$

Кроме того, по аналогии с понятием центральных осей, которые проходят через центр масс, в котором, в свою очередь, статические моменты равны нулю, потребуем, чтобы эпюра ω обращала аналогичный интеграл в ноль:

$$S_{\omega} = \int_A \omega \cdot dA = 0$$

Координаты ω , удовлетворяющие данным равенствам, называют *главными секториальными координатами сечения*.

Механический смысл равенств, входящих в определение главных секториальных координат сечения легко понять, если условно принять, что эпюра ω — это эпюра нормальных напряжений ($\sigma_x = c_I \cdot \omega$). Тогда ясно, что два первых равенства выражают условие того, что при кручении в сечении отсутствуют изгибающие моменты $M_y = 0$, $M_z = 0$, а последнее равенство — того, что отсутствует продольная сила $N = 0$. Можно сказать, что эпюра главных секториальных координат в статическом отношении — это *самоуравновешенная* эпюра ω .

3. Техника определения главных секториальных координат

Преобразование секториальной координаты при изменении положения полюса.

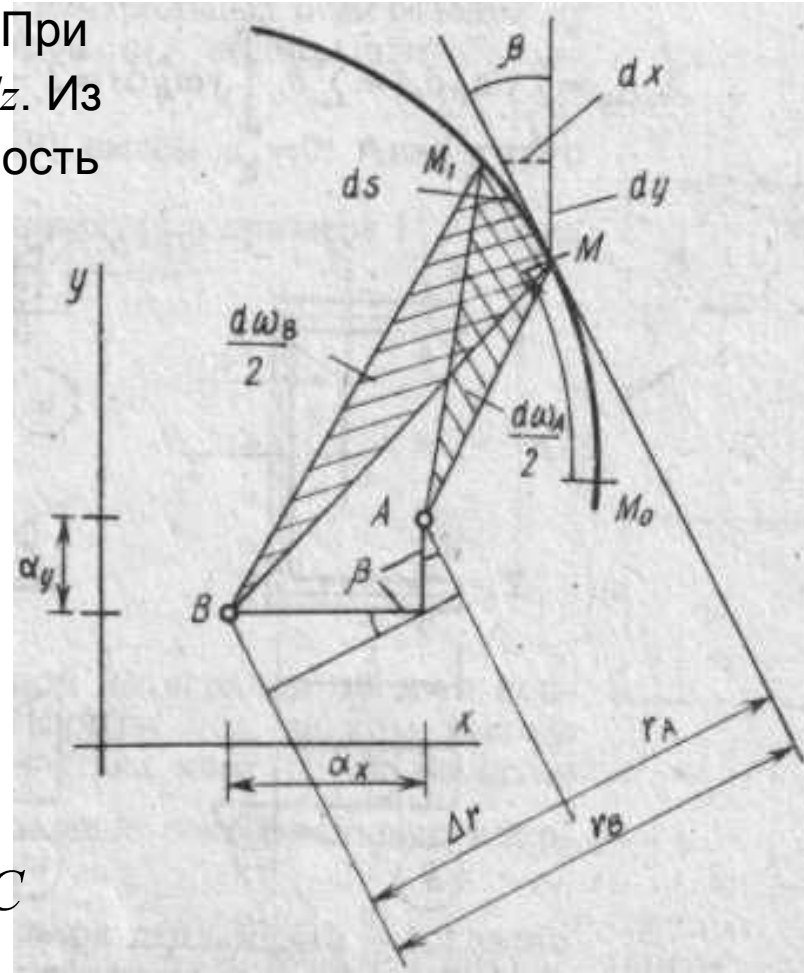
На рисунке изображены приращения секториальной площади $d\omega_B > 0$ и $d\omega_A > 0$ получаемые при переходе из точки M контура в точку M_1 на длину пути ds . При этом координаты точки M изменяются на dy и $-dz$. Из чертежа имеем $d\omega_B = r_B \cdot ds$ и $d\omega_A = r_A \cdot ds$, а их разность $d(\omega_B - \omega_A) = (r_B - r_A)ds = \Delta r ds$

Так как $\Delta r = \alpha_z \cos \beta + \alpha_y \sin \beta$ и $\cos \beta = \frac{dy}{ds}$
 $\sin \beta = -\frac{dz}{ds}$ подставляя эти значения получим

$$d(\omega_B - \omega_A) = \left(\alpha_z \cdot \frac{dy}{ds} - \alpha_y dz \right) \cdot ds$$

$$d(\omega_B - \omega_A) = \alpha_z dy - \alpha_y dz$$

Интегрируя получаем: $\omega_A = \omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z - C$



Техника определения главных секториальных координат.

Для выполнения трех равенств можно распоряжаться тремя параметрами, от которых зависит ω : две координаты центра кручения и одна координата начальной точки M_0 на дуге контура сечения.

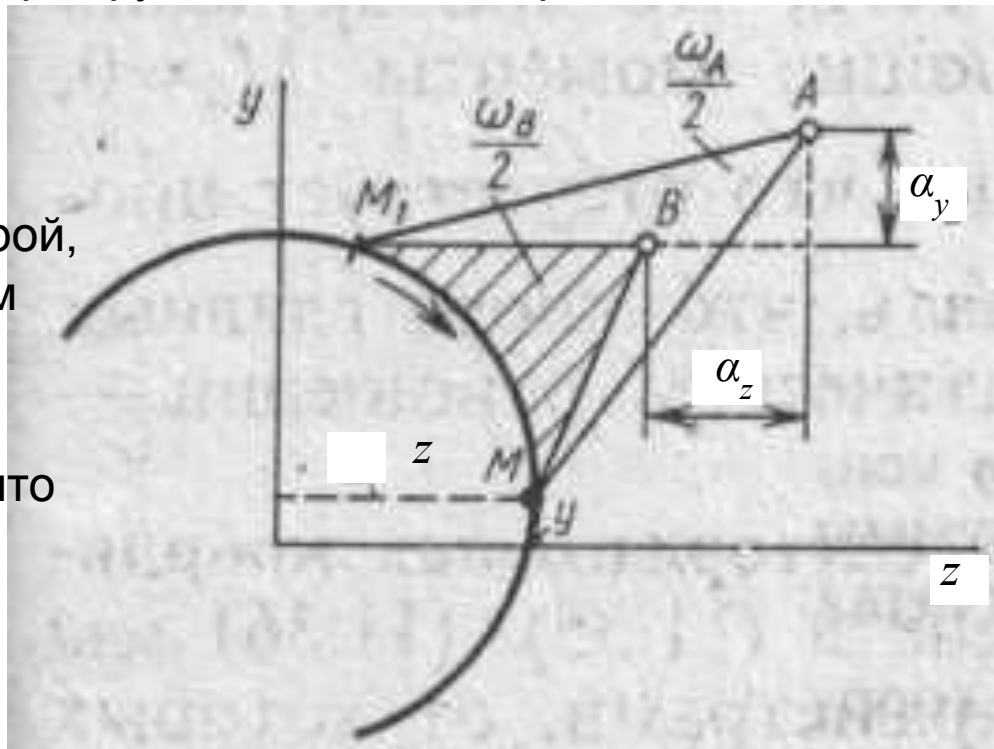
Для определения координат истинного центра кручения A зададимся вначале произвольной точкой B , пользуясь которой, как центром кручения при произвольном начале отсчета M_I построим эпюру ω_B . Пусть α_y и α_z — координаты точки A по отношению к точке B . Ранее показано, что ω_A и ω_B связаны равенством

$$\omega_A = \omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z - C$$

где C — произвольная постоянная.

Подставляя выражения для ω_A в условия равенства линейно-секториальных момента нулю, приходем к системе уравнений относительно α_y и α_z :

$$\begin{cases} J_{y\omega_A} = \int_A z \cdot \omega_A \cdot dA = \int_A z \cdot (\omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z - C) \cdot dA = 0 \\ J_{z\omega_A} = \int_A y \cdot \omega_A \cdot dA = \int_A y \cdot (\omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z - C) \cdot dA = 0 \end{cases}$$



Раскрывая скобки и учитывая, что интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\begin{cases} \int_A z \omega_B dA - \alpha_z \cdot \int_A z \cdot y \cdot dA + \alpha_y \cdot \int_A z^2 \cdot dA + C \cdot \int_A z \cdot dA = 0 \\ \int_A y \omega_B dA - \alpha_z \cdot \int_A y^2 \cdot dA + \alpha_y \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA + C \cdot \int_A y \cdot dA = 0 \end{cases}$$

Интегралы представляют собой рассмотренные ранее моменты

$$\begin{cases} J_{y\omega_B} - \alpha_z J_{zy} + \alpha_y J_y + CS_y = 0 \\ J_{z\omega_B} - \alpha_z J_z + \alpha_y J_{zy} + CS_z = 0 \end{cases}$$

Так как y, z — это *главные центральные оси сечения*, то $J_{yz}=0, S_z=0, S_y=0$.

$$\begin{cases} J_{y\omega_B} + \alpha_y J_y = 0 \\ J_{z\omega_B} - \alpha_z J_z = 0 \end{cases}$$

Решая имеем формулы для координат точки A:

$$\alpha_y = -\frac{J_{y\omega_B}}{J_y} = -\frac{\int_A z \omega_B dA}{\int_A z^2 dA}; \quad \alpha_z = \frac{J_{z\omega_B}}{J_z} = \frac{\int_A y \omega_B dA}{\int_A y^2 dA}$$

Для нахождения положения точки M_0 построим эпюру ω_A при найденном центре кручения A и произвольном начале отсчета M_I . Из рис. можно видеть, что ω_A и ω , найденные для истинной точки M_0 , отличаются на некоторую постоянную D :

$$\omega = \omega_A - D$$

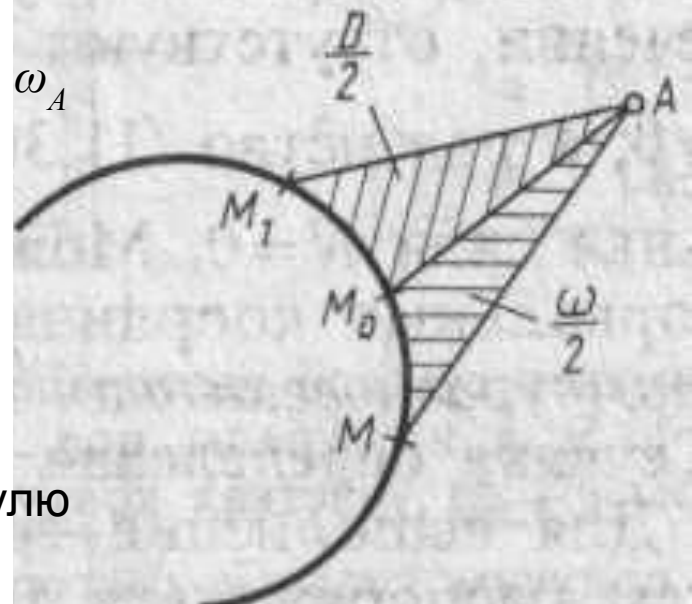
Подставив данное выражение в условие равенство нулю статического момента, получим

$$S_\omega = \int_A \omega \cdot dA = \int_A (\omega_A - D) \cdot dA = S_{\omega_A} - DA = 0$$

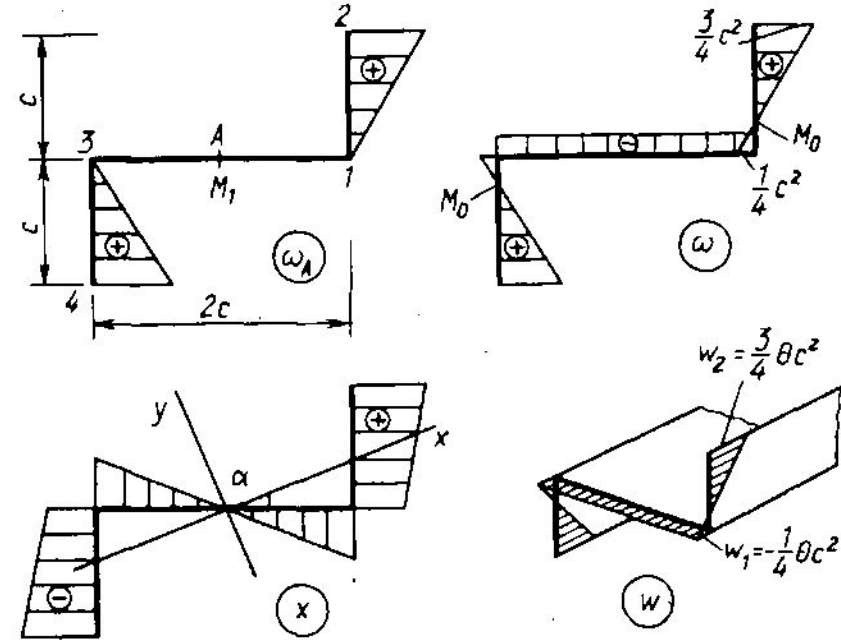
отсюда

$$D = \frac{S_{\omega_A}}{A} = \frac{\int_A \omega_A dA}{\int_A dA}$$

Вычитая D из ординат эпюры ω_A , получаем эпюру главных секториальных координат. При этом может образоваться не одна нулевая точка. Любая из них может быть принята в качестве M_0 .



Пример 2: Построить эпюру главных секториальных координат для Z-образного сечения, рассмотренного в примере 1. Решение: Построенную в этом примере эпюру ω обозначим ω_A и проверим, удовлетворяет ли она условию равенства нулю линейно-секториальных моментов. Для этого на рисунке изображена для главных центральных осей сечения (y, z) эпюра z . Из сопоставления ее с эпюрой ω_A видно, что для каждой точки лежащей на отрезках А-1 и А-3



произведение $z \cdot \omega_A = 0$, а для каждой точки, лежащей на отрезке 3-4, найдется симметричная точка, лежащая на отрезке 1-2 у которых произведения $z \cdot \omega_A$ будут равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно

$$J_{y\omega_A} = \int_A z \cdot \omega_A \cdot dA = 0$$

Отсюда получаем, что

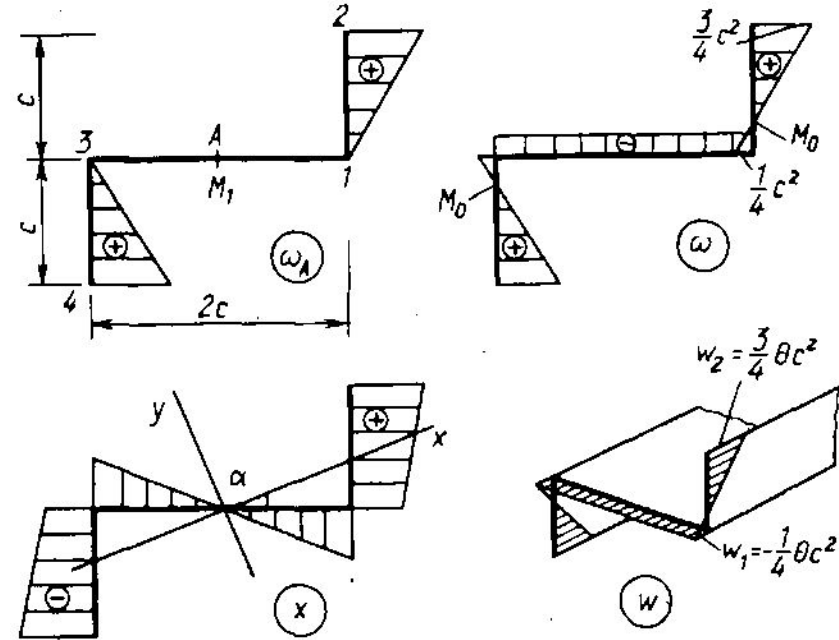
$$\alpha_y = -\frac{J_{y\omega_A}}{J_y} = -\frac{\int_A z \omega_A dA}{\int_A z^2 dA} = 0$$

Аналогично получим $\alpha_z = 0$ и отсюда заключаем, что принятая в примере 1 точка А является истинным центром кручения.

Найдем теперь константу D по формуле

$$D = \frac{S_{\omega_A}}{A} = \frac{\int_A \omega_A dA}{A} = \frac{\sum_i \int_0^{b_i} \omega_A \cdot \delta_i \cdot ds}{\sum_i b_i \cdot \delta_i} =$$

$$= \frac{\sum_i \delta_i \cdot \int_0^{b_i} \omega_A \cdot ds}{\sum_i b_i \cdot \delta_i} = \frac{2 \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot c^2 \right)}{4 \cdot c \cdot \delta} = \frac{c^2}{4}$$

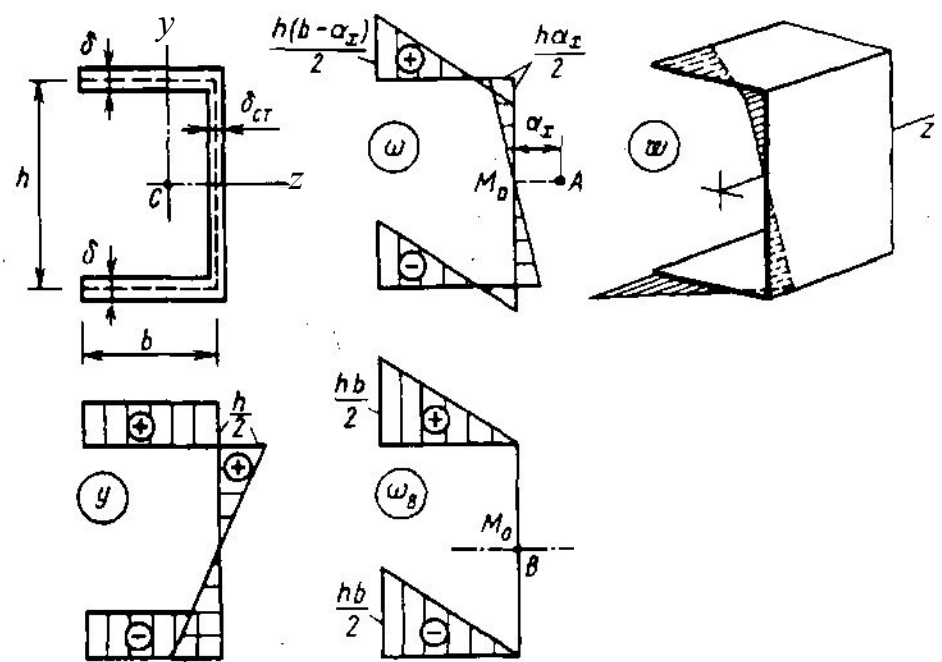


Здесь интеграл по площади заменен суммой интегралов по дуге контура, а интегралы под знаком суммы вычислены как площади эпюры ω_A на участках контура b_i . Вычитая константу D из ординат ω_A получим главные секториальные координаты ω .

На рисунке, кроме того, изображена эпюра депланаций w согласно эпюре ω . Сравнивая их с депланациями, найденными в примере 1, видим, что они отличаются в данном случае лишь на константу. Это говорит о том, что для свободного кручения переход от неглавных к главным секториальным координатам означает лишь изменение положения плоскости, от которой отсчитываются депланации данного сечения.

Пример 3. Построить эпюры ω и деформаций w , определить положение центра кручения для швеллера.

Решение: Ввиду наличия у сечения оси симметрии точки M_0 и A находятся на этой оси. Определению подлежит координата α_z центра кручения A , отсчитываемая от точки B , которую мы совместим с точкой M_0 . Построим эпюры величин y и ω_B , входящих в интегралы в формуле для расчета α_z



и выведем аналитические зависимости для этих величин:

На верхней полке:

$$y = \frac{h}{2}, \quad \omega_B = -\frac{h}{2} \cdot s + \frac{h \cdot b}{2}$$

На нижней полке:

$$y = -\frac{h}{2}, \quad \omega_B = \frac{h}{2} \cdot s - \frac{h \cdot b}{2}$$

На вертикальной стенке:

$$y = s, \quad \omega_B = 0$$

s – продольная координата по которой будет проводиться интегрирование

Входящие в формулу для α_z интегралы по площади заменяем интегралами по дуге.

$$J_{z\omega_B} = \int_A y \cdot \omega_B \cdot dA = \sum_{i=1}^3 \delta_i \cdot \int_0^{b_i} y \cdot \omega_B \cdot ds =$$

$$= \delta \cdot \int_0^b \frac{h}{2} \cdot \left(-\frac{h}{2} \cdot s + \frac{h \cdot b}{2} \right) ds + \delta \cdot \int_0^b -\frac{h}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot s - \frac{h \cdot b}{2} \right) ds + \delta_{cm} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} 0 \cdot ds = \frac{h^2 \cdot b^2 \cdot \delta}{4}$$

Аналогично получим

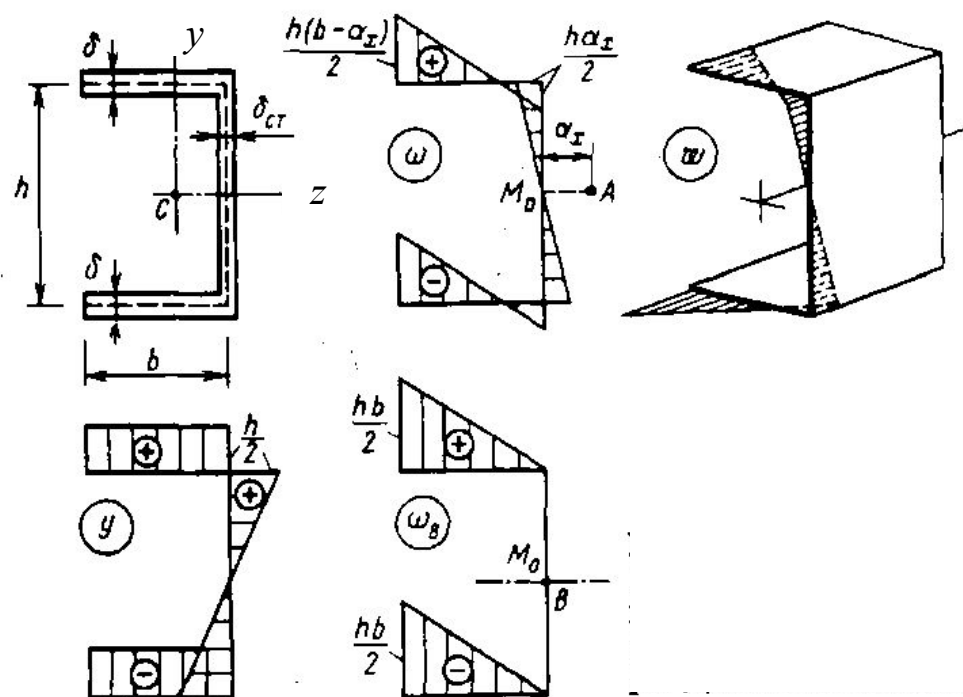
$$\begin{aligned}
 J_z &= \int_A y^2 \cdot dA = \sum_{i=1}^3 \delta_i \cdot \int_0^{b_i} y^2 \cdot ds = \\
 &= \delta \cdot \int_0^b \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot ds + \delta \cdot \int_0^b \left(-\frac{h}{2}\right)^2 \cdot ds + \\
 &+ \delta_{cm} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} s^2 \cdot ds = \frac{\delta \cdot h^2 \cdot b}{2} + \frac{\delta_{cm} \cdot h^3}{12}
 \end{aligned}$$

после чего найдем

$$\alpha_z = \frac{J_{z\omega_B}}{J_z} = \frac{\frac{h^2 \cdot b^2 \cdot \delta}{4}}{\frac{\delta \cdot h^2 \cdot b}{2} + \frac{\delta_{cm} \cdot h^3}{12}} = \frac{3 \cdot b}{6 + \frac{h \cdot \delta_{cm}}{b \cdot \delta}}$$

Введем обозначения $A_{cm} = h \cdot \delta_{cm}$, $A_{пол} = b \cdot \delta$

$$\alpha_z = \frac{J_{z\omega_B}}{J_z} = \frac{\frac{h^2 \cdot b^2 \cdot \delta}{4}}{\frac{\delta \cdot h^2 \cdot b}{2} + \frac{\delta_{cm} \cdot h^3}{12}} = \frac{3 \cdot b}{6 + \frac{A_{cm}}{A_{пол}}}$$



Эпюра ω и подобная ей эпюра депланаций $w = -\varphi' \omega$ показаны на рисунке.