Обзорные лекции по математике

Володин Юрий Владимирович

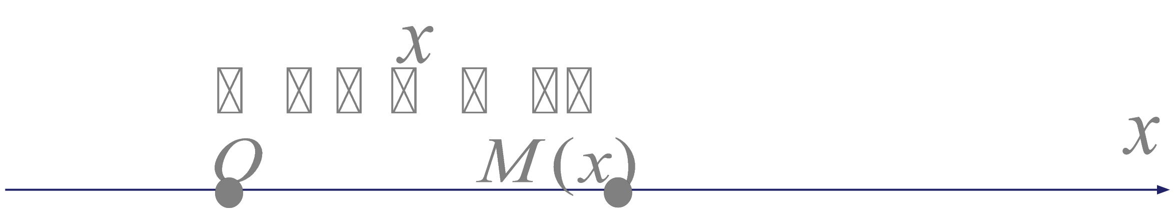
доцент

кафедры прикладной математики

Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве.

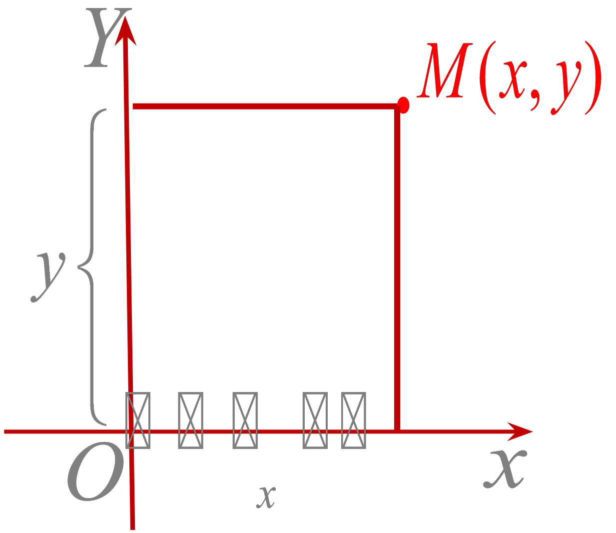
Система координат

- **Определение 1.** Прямая, служащая для изображения действительных чисел, в которой выбрана начальная точка ***O***, единица измерения и положительное направление, называется ***числовой прямой (числовой осью).*** Точка ***M*** этой прямой характеризуется определенным числом – ***координатой*** x, т.е. $M(x)$.



- **Определение 2.** Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба, образуют ***прямоугольную (или декартовую) систему координат на плоскости.***

Каждой точке ***М*** этой плоскости соответствует пара чисел (x, y), называемых ее координатами, т.е. $M(x, y)$. x – называется абсциссой, y - называется ординатой точки ***М.***



- **Определение 3.** Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oz, Oy, имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба, образуют ***прямоугольную (или декартовую) систему координат в пространстве*** $Oxyz$ **.**

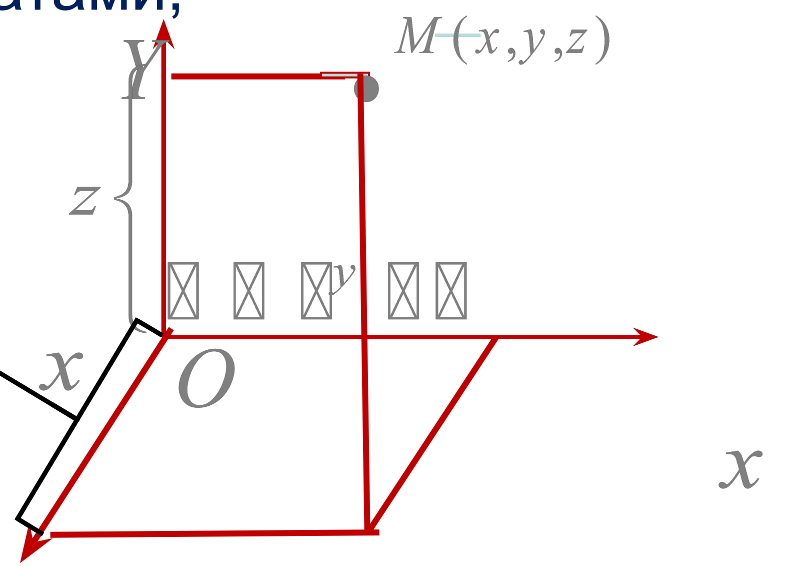
Ось Oz ***называется осью аппликат.***

Любая точка $M(x, y, z)$ характеризуется тройкой чисел, называемых ее координатами,

т.е. $x -$ называется абсциссой,

y- называется ординатой,

z – аппликатой точки ***M.***



ОПРЕДЕЛЕНИЯ

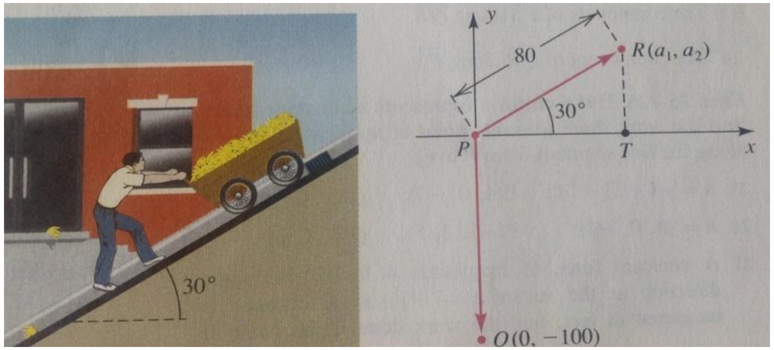
1. ***Вектором*** $\overline{AB}$ называется направленный отрезок с началом в точке *A* и концом в точке *B*.

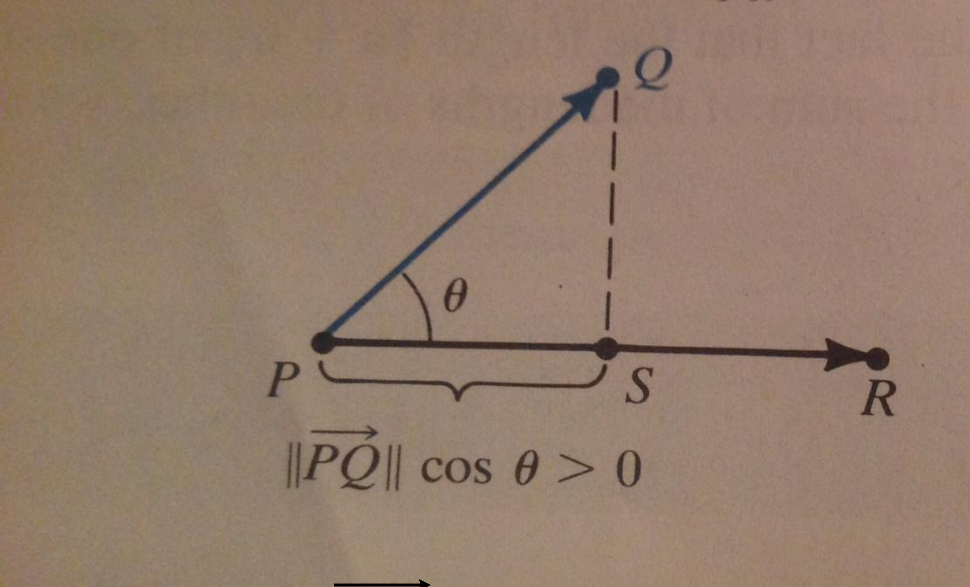
2. ***Длиной*** (или *модулем*) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка *AB*. Используется обозначение: $|\overline{AB}|$.

3. Два вектора и называются ***равными***, если они имеют одинаковые длины, лежат на параллельных прямых (*коллинеарны*) и направлены в одну сторону (*сонаправлены*).

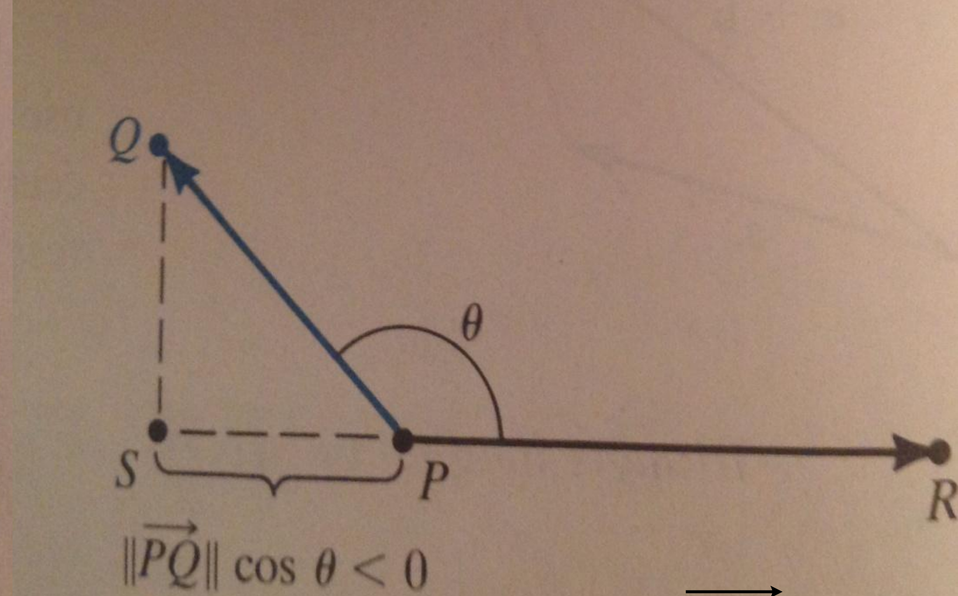
4. ***Проекцией вектора*** $\vec{a}$ ***на ось*** Ou называются число, обозначаемое $\text{Пр}_{Ou}\vec{a}$, вычисляемое по формуле:

$$\text{Пр}_{Ou}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, Ou})$$





$$Пр_{\overrightarrow{PR}}\, \overrightarrow{PQ} = PS$$



$$Пр_{\overrightarrow{PR}}\, \overrightarrow{PQ} = PS$$

- **Определение.** Если начало и конец вектора совпадают, например $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, то такой вектор называется ***нулевым*** и обозначается $\overrightarrow{AA}$.

  Длина нулевого вектора равна нулю.

- **5. *Направляющими углами*** вектора $\vec{a}$ называются углы между ним и координатными осями:

$$\alpha = (\vec{a}, Ox); \quad \beta = (\vec{a}, Oy); \quad \gamma = (\vec{a}, Oz)$$

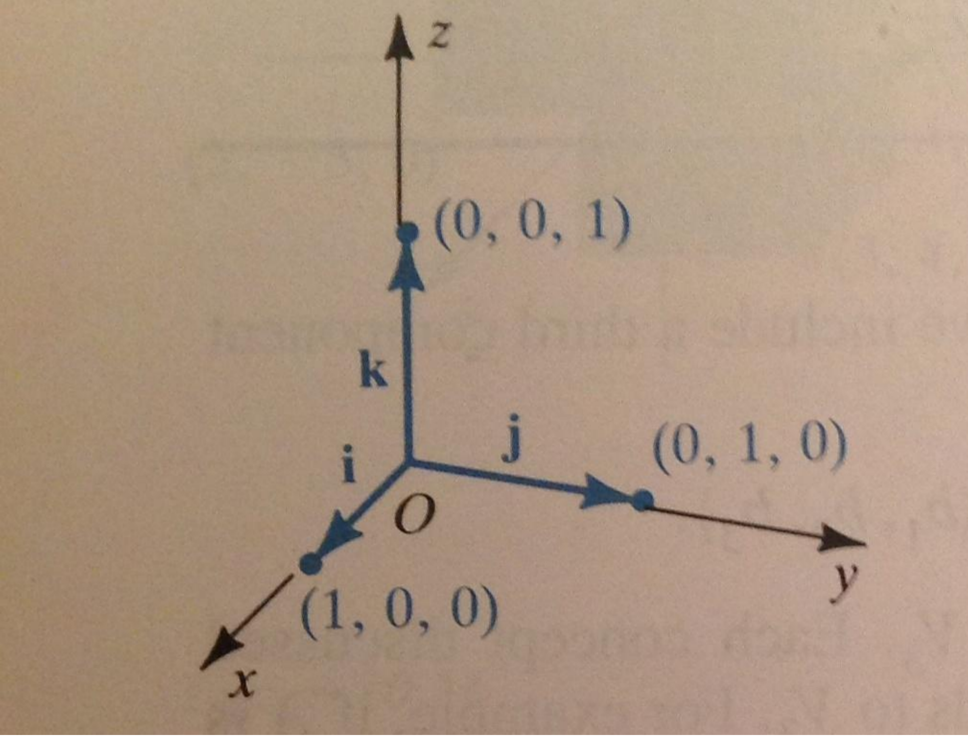
- 6. Косинусы направляющих углов называются **направляющими косинусами вектора**:

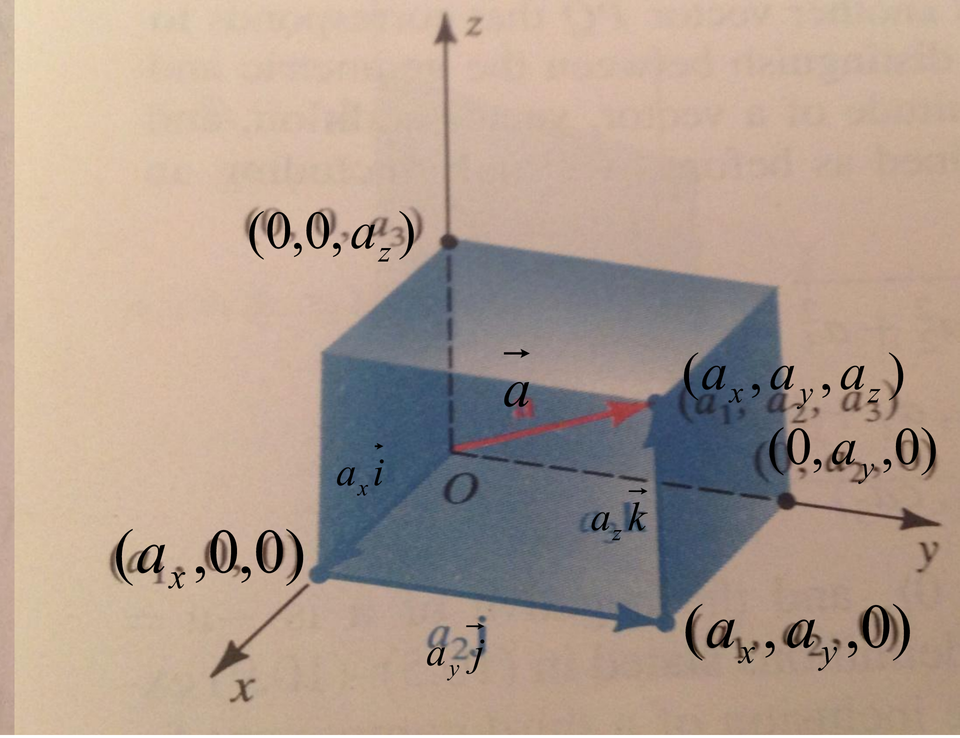
$$\cos\alpha = \cos(\vec{a}, Ox); \quad \cos\beta = \cos(\vec{a}, Oy); \quad \cos\gamma = \cos(\vec{a}, Oz)$$

- 7. Проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz называются **координатами вектора** и обозначаются, соответственно, $a_x; a_y; a_z$.

З а м е ч а н и е 1. Для любого вектора $\vec{a}$ верно равенство: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

$\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ - единичные векторы, сонаправленные с соответствующей осью.





$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z).$$

Вектор $\vec{a}$ также обозначается $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

З а м е ч а н и е 2. Для любого вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ верны равенства:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

З а м е ч а н и е 3. У равных векторов равны соответствующие координаты:

$$\vec{a} = \vec{b}, a_x = b_x; a_y = b_y; a_z = b_z.$$

З а м е ч а н и е 4. У коллинеарных векторов координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \ \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k.$$

З а м е ч а н и е 5. Длина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ через координаты определяется по формуле:

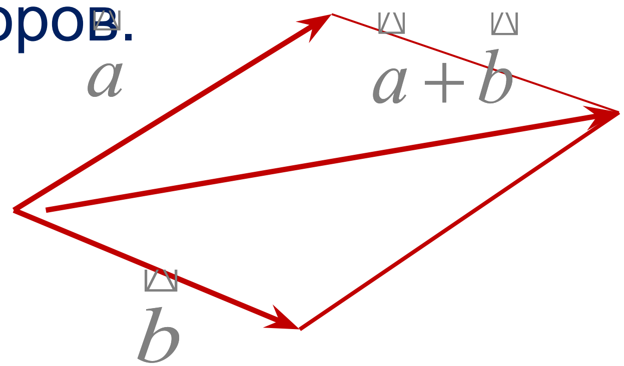
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Если известны координаты точек $A = (x_a; y_a; z_a)$ и $B = (x_b; y_b; z_b)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = (x_a - x_b)\vec{i} + (y_a - y_b)\vec{j} + (z_a - z_b)\vec{k}.$$

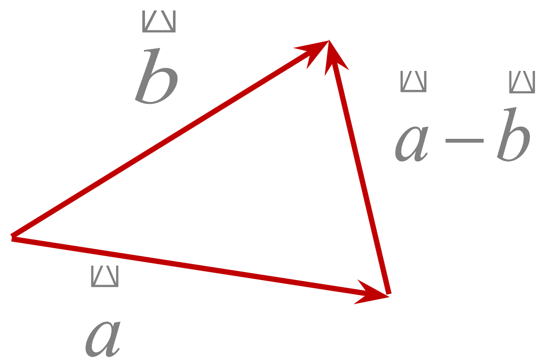
ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1) Сложение: Координаты суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов.



$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z).$$

2) Вычитание:



$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z).$$

3) Умножение вектора на скаляр λ

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z)$$

4) Скалярное произведение двух векторов.

О п р е д е л е н и е. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ $\vec{b}$ называется *число*, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b})$, вычисляемое по формуле $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$,

где $\varphi-$ угол между векторами $\vec{a}$ $\vec{b}$.

Если известны координаты векторов

$\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то

$$(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Свойства скалярного произведения

- 1. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$
- 2. $\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)\left(\beta\cdot\vec{b}\right)=\alpha\cdot\beta\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$
- 3. $\vec{c}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)$
- 4. $\cos\varphi=\dfrac{\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$ $\varphi -$ угол между двумя векторами
- 5. $Пр_{\vec{b}}^{\vec{a}}=\dfrac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}$

Пример

Даны векторы : $\vec{a} = (2;-1;-2); \quad \vec{b} = (8;-4;0).$

Найти:

1. $\vec{c} = 2\vec{a}; \ \vec{d} = \vec{b} - \vec{a};$

2. *длины векторов* $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$;

3. *скалярный квадрат вектора* $\vec{d}$;

4. *скалярное произведение векторов* $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$;

5. *угол между векторами* $\vec{c}$ *и* $\vec{d}$

Решение.

1. По определению

$$\vec{c} = 2\vec{a} = (4;-2;-4),\ \vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6;-3;2).$$

2. Найдем длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$. По формуле найдем

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6,\ \left|\vec{d}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

3. Скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е.

$$(\vec{d}, \vec{d}) = d^2 = 49.$$

4. Скалярное произведение

$$(\vec{c}\,\vec{d}) = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z.$$

$$(\vec{c}\,\vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

5. Угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ определяется равенством:

$$cos\varphi = \frac{\left(\vec{c}, \vec{d}\right)}{\left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0{,}52$$

Откуда

$$\varphi = \arccos 0{,}52 \approx 58^0.$$