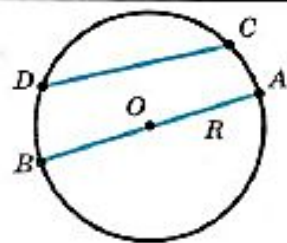


ОКРУЖНОСТЬ, ХОРДЫ И ДУГИ

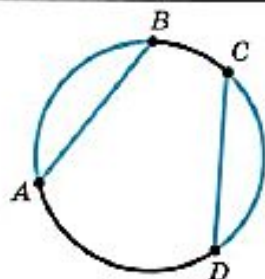


Определение. *Окружность* — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

O — центр окружности; OA — радиус; AB — диаметр.
 CD — хорда (отрезок, соединяющий две точки окружности).

Наибольшая хорда — диаметр

Свойства



Если $\cup AB = \cup CD$,

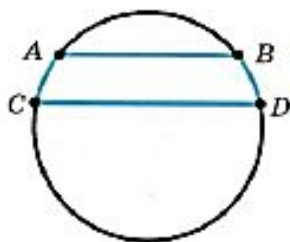
то $AB = CD$

(равные дуги стягивают равные хорды).

Если $AB = CD$,

то $\cup AB = \cup CD$

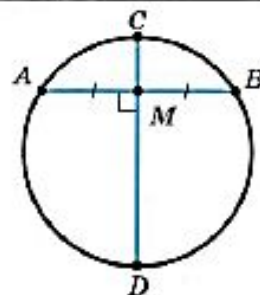
(равные хорды стягивают равные дуги).



Если $AB \parallel CD$,

то $\cup AB = \cup CD$

(параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги).



Если CD — диаметр, AB — хорда,

$CD \perp AB$,

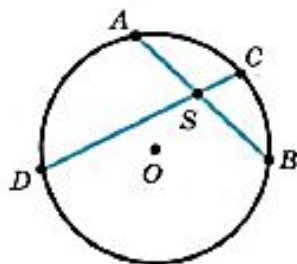
то $AM = MB$

(и $\cup AC = \cup CB$).

$AM = MB$,

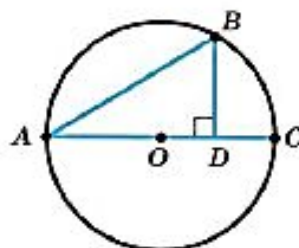
то $CD \perp AB$.

Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду (и дуги, которые она стягивает) пополам, и наоборот.



$$AS \cdot SB = CS \cdot SD$$

где S — точка пересечения хорд AB и CD

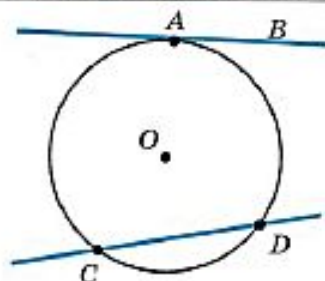


Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$,

то

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD \cdot AC \\ BD^2 &= AD \cdot DC \end{aligned}$$

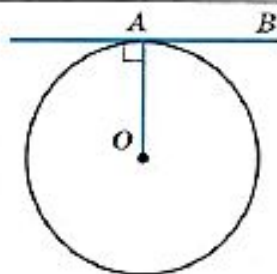
ОКРУЖНОСТЬ. КАСАТЕЛЬНЫЕ И СЕКУЩИЕ



Определение. Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют **касательной к окружности**.

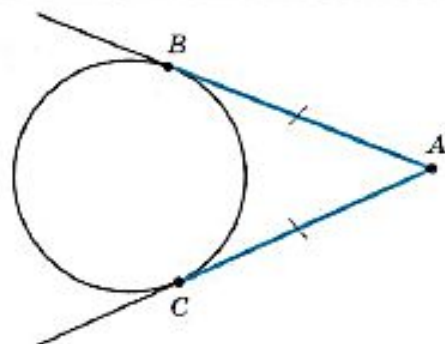
AB — касательная; A — точка касания;
 CD — секущая (прямая, имеющая с окружностью две общие точки).

Свойства



$$OA \perp AB$$

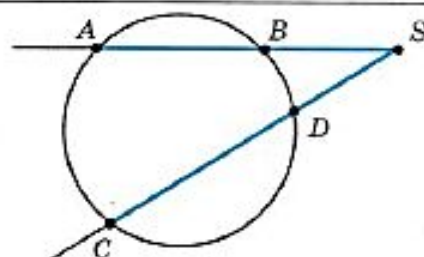
Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



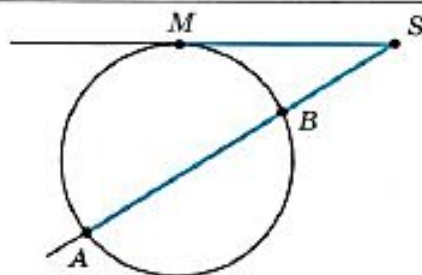
$$AB = AC$$

(B и C — точки касания)

Если из одной точки к одной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны между собой.

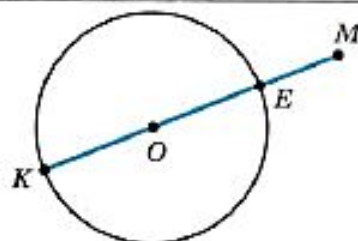
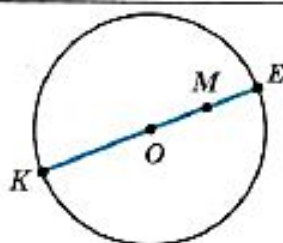


$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$



$$SA \cdot SB = SM^2$$

где SM — касательная, M — точка касания



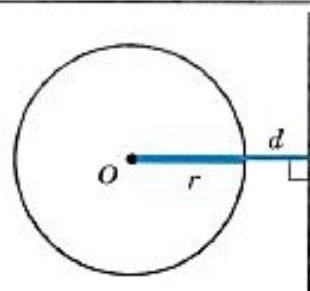
Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки до точек окружности измеряются по прямой, проходящей через данную точку и центр окружности.

ME — наименьшее расстояние от точки M до точек окружности;

MK — наибольшее расстояние от точки M до точек окружности

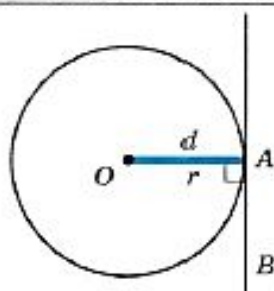
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Пусть d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности.



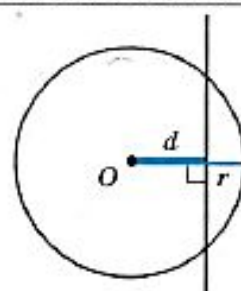
$$d > r$$

Общих точек нет.



$$d = r$$

Одна общая точка
(прямая AB — касательная).



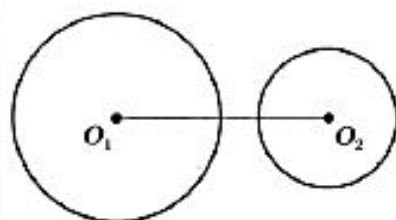
$$d < r$$

Две общие точки.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

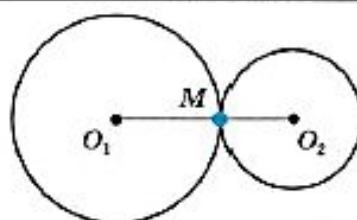
Пусть $O_1O_2 = d$ — расстояние между центрами окружностей,
 r_1 и r_2 — радиусы окружностей ($r_1 > r_2$).

Общих точек нет



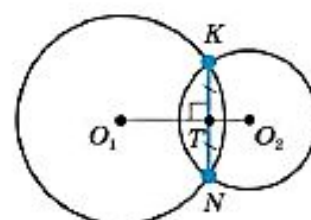
$$d > r_1 + r_2$$

Одна общая точка
(окружности касаются
в этой точке)



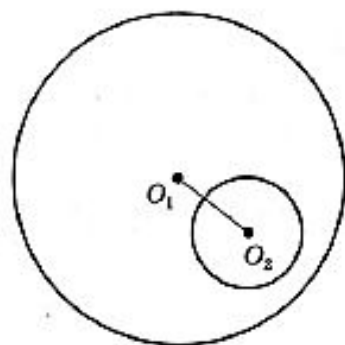
$$d = r_1 + r_2 \quad \text{— внешнее касание}$$

Две общие точки
(окружности пересекаются)

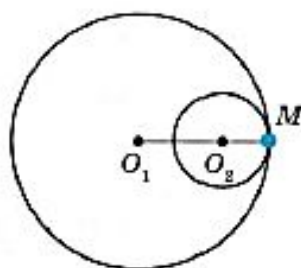


$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$$

$$\begin{aligned} KN &\perp O_1O_2 \\ KT &= TN \end{aligned}$$



$$0 < d < r_1 - r_2$$

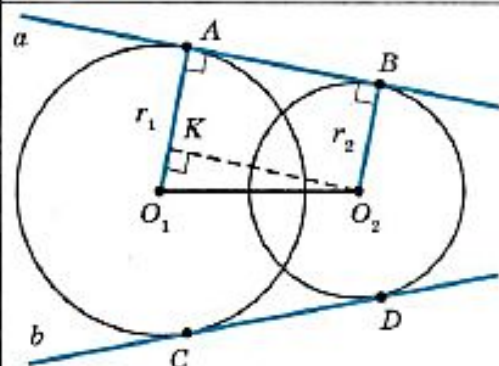


$$d = r_1 - r_2 \quad \text{— внутреннее касание}$$

$M \in O_1O_2$ — точка касания лежит на прямой, проходящей через центры окружностей.

ОБЩИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

1. Окружности пересекаются ($|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$)



Две общие касательные a и b

$$AB = CD$$

Если $r_1 = r_2$,
то $a \parallel b$

Если $r_1 \neq r_2$,
то a и b пересекаются
на прямой O_1O_2

Типичное дополнительное построение: $O_2K \perp O_1A$

2. Окружности касаются (M — точка касания)

Внешнее касание
($O_1O_2 = r_1 + r_2$)

Три общие касательные:
 MN ; a ; b

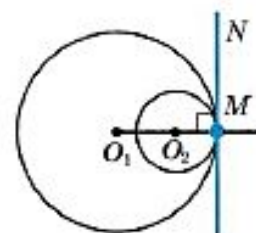
$$MN \perp O_1O_2$$

Если $r_1 = r_2$,
то $a \parallel b$

Если $r_1 \neq r_2$,
то a и b пересекаются
на прямой O_1O_2

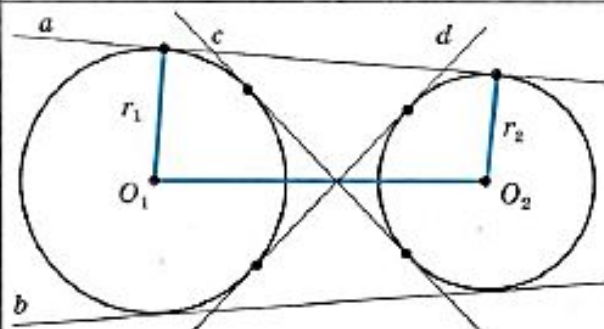
Внутреннее касание
($O_1O_2 = |r_1 - r_2|$)

Одна общая касательная — MN



$$MN \perp O_1O_2$$

3. Одна окружность лежит вне другой ($O_1O_2 > r_1 + r_2$)



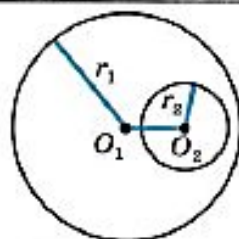
Четыре общие касательные: a ; b ; c ; d

c и d пересекаются на отрезке O_1O_2

Если $r_1 = r_2$,
то $a \parallel b$

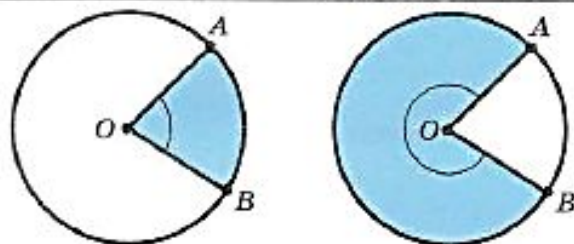
Если $r_1 \neq r_2$,
то a и b пересекаются
на прямой O_1O_2

4. Одна окружность лежит внутри другой ($O_1O_2 < |r_1 - r_2|$)



Общих касательных нет

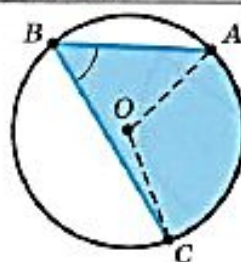
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ



$\angle AOB$ — центральный угол

$$\angle AOB = \cup AB$$

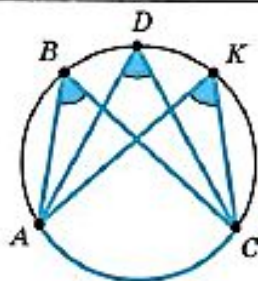
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.



$\angle ABC$ — вписанный угол

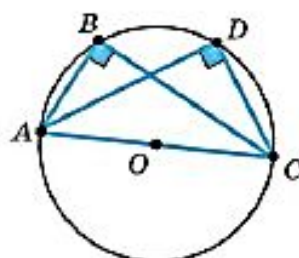
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.



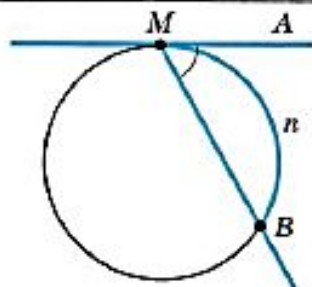
$$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.



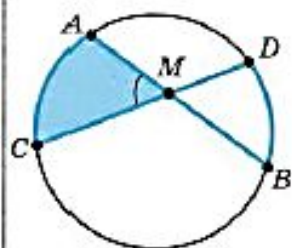
$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90° .



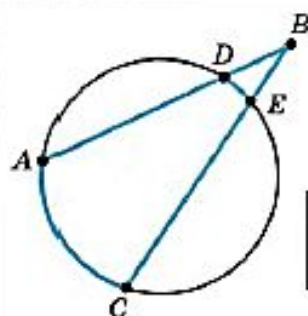
MA — касательная, MB — секущая.

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$



AB и CD — хорды

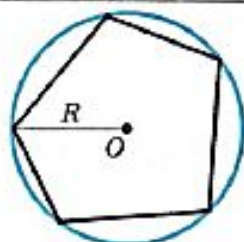
$$\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup DB)$$



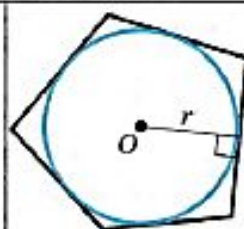
BA и BC — секущие

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup DE)$$

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИКИ (описанная и вписанная окружности)



Вписанный многоугольник — все вершины лежат на окружности.

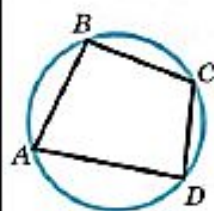


Описанный многоугольник — все стороны являются касательными к окружности.

$$S_{\text{опис}} = \frac{P \cdot r}{2},$$

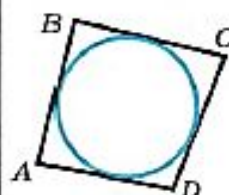
где P — периметр,
 r — радиус вписанной окружности.
 O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= 180^\circ, \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ \end{aligned}$$

И наоборот: если у четырехугольника сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность.

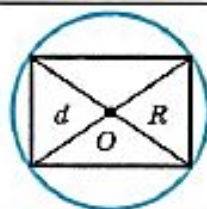


$$AB + CD = BC + AD$$

(суммы длин противоположных сторон равны)

И наоборот: если у выпуклого четырехугольника суммы длин противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

ПРЯМОУГОЛЬНИК

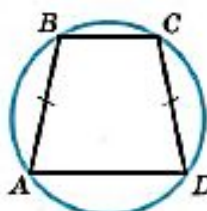


$$R = \frac{1}{2}d$$

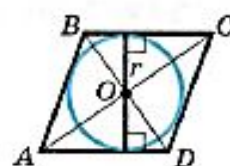
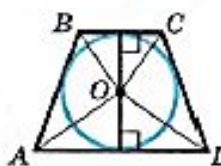
1. Если параллелограмм вписан в окружность, то он — прямоугольник.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольника, — точка пересечения его диагоналей.

ТРАПЕЦИЯ И РОМБ



Если $ABCD$ — вписанная трапеция, то $AB = CD$

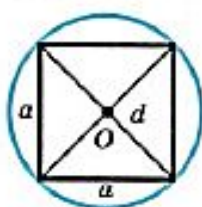


$$d_{\text{впис. окр}} = h$$

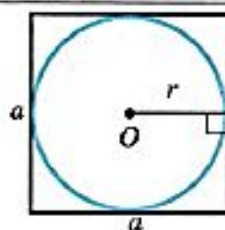
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

$$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$$

КВАДРАТ



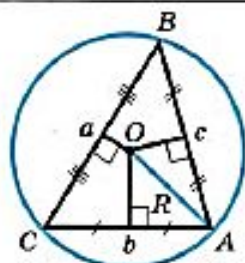
$$R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$r_{\text{впис}} = \frac{1}{2}a$$

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Описанная окружность



O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

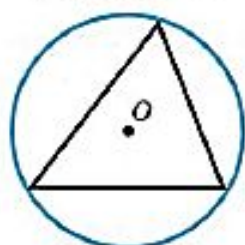
$$OA = OB = OC = R$$

$$R = \frac{a}{2\sin A}$$

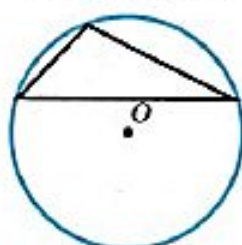
$$R = \frac{abc}{4S}$$

Положение центра описанной окружности

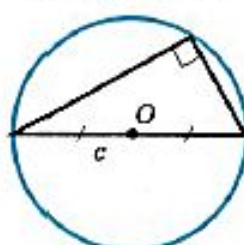
остроугольный
треугольник



тупоугольный
треугольник



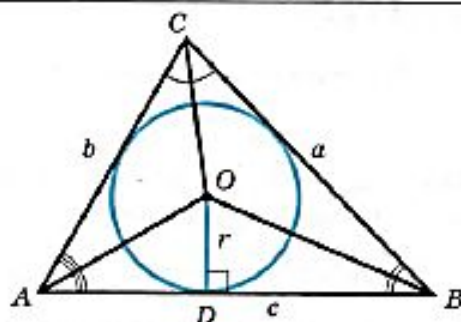
прямоугольный
треугольник



O — середина
гипотенузы

$$R = \frac{c}{2}$$

Вписанная окружность

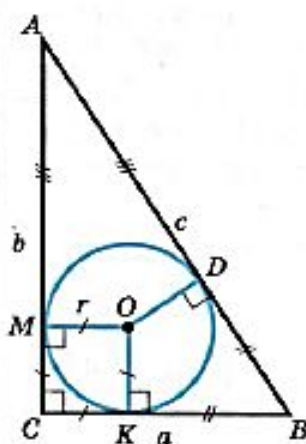


O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника;

$$OD = r; OD \perp AB$$

$$r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$$

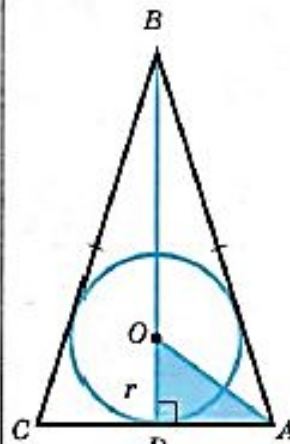
В прямоугольном треугольнике



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$OK = OM = OD = r$
(OKCM — квадрат)

В равнобедренном треугольнике



$AB = DC$;
 BD — высота, медиана и биссектриса;
 AO — биссектриса угла A

$$OD = r$$