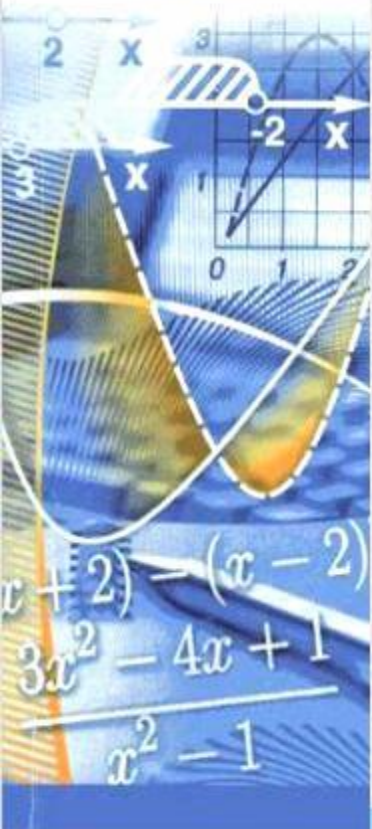




Планиметрические задачи на ЕГЭ



Дополнительный теоретический материал

- В треугольнике со сторонами a, b, c расстояние от вершины A до точек касания вписанной окружности сторон, содержащих эту вершину, равно $\frac{b + c - a}{2}$
- Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).

- Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC , то расстояние от A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC
- Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
- Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

- Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.
- При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.
- При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.
- Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r ($R \geq r$) равно $R+r$ при внешнем касании и $R-r$ при внутреннем.

- Пересекающиеся в точка A и B окружности имеют общую хорду AB .
- Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.
- Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника

- Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника.
- Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).
- Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.

- Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие, отсекает от него треугольник, подобный данному.
- Если p - полупериметр треугольника, r_a - радиус внеписанной окружности, касающейся стороны равной a , то $S = (p-a)r_a$
- Расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей находится по формуле

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Опорные задачи

- Отрезок общей внешней касательной к двум окружностям радиусов R и r равен $2\sqrt{Rr}$
- Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AK , и CM , тогда треугольник BKM подобен данному с коэффициентом подобия, равным $|\cos B|$
- Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , тогда

$$\angle AOC = \frac{\angle B}{2} + 90^\circ$$

$$\angle AOB = \frac{\angle C}{2} + 90^\circ$$

$$\angle COB = \frac{\angle A}{2} + 90^\circ$$

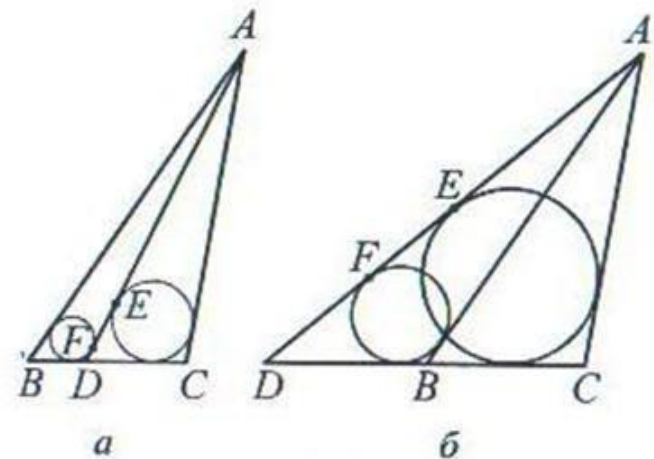
- В треугольнике ABC $AB = 12$, $BC = 5$, $CA = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 4:9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .
- В треугольнике со сторонами a , b , c расстояние от вершины A до точек касания вписанной окружности сторон, содержащих эту вершину, равно

Решение

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$.

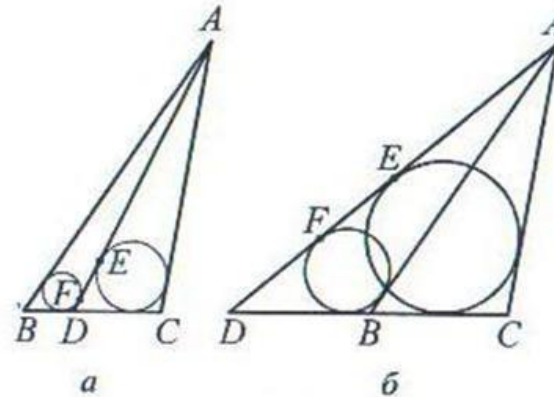
Тогда для окружности вписанной в треугольник

$$DE = \frac{d + x - 10}{2}$$



А для окружности вписанной в треугольник ADB

$$DF = \frac{d + x - 12}{2}$$



Поскольку в условии сказано, что точка D лежит на прямой BC , то существует два ее положения, при которых будет выполняться условие $BD:DC = 4:9$. Соответственно, существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть точка D лежит на отрезке BC (рис.а).

Тогда $x = \frac{20}{13}, y = \frac{45}{13}$

Значит,

$$EF = |DE - DF| = \left| \frac{d + y - 10}{2} - \frac{d + x - 12}{2} \right| = \frac{51}{26}$$

2. Пусть точка D лежит вне отрезка BC (рис. б).

Тогда

$$x = 4, y = x + BC = 9. \text{ Значит, } EF = |DE - DF| = \frac{7}{2}$$

Случай расположения точки D правее точки C невозможен.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек E и F на отрезке AD , то при вычислении длины отрезка EF использован знак модуля.

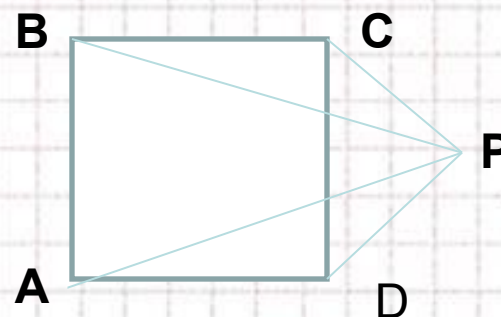
Ответ: $\frac{7}{2}$ и $\frac{51}{26}$

Вариант пробного платного ЕГЭ

На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равнобедренный прямоугольный треугольник CPD с гипотенузой CD . Найдите высоту треугольника ABP , проведенную из A , если сторона квадрата равна 4.

• Дано:
 $AB=4$,
 $CP=PD$,
 AK -
высота.

Найти:
 AK



Решение

- Первый случай, когда точка P лежит вне квадрата **$ABCD$** :

1. $CD = 4$, значит $CP=PD= 2\sqrt{2}$

2. Рассмотрим треугольник BCP , в нем $BC=4$,
 $CP= 2\sqrt{2}$, $\angle BCP = 135^\circ$

По теореме косинусов находим $AP= 2\sqrt{10}$

3. Проведем высоту PH в равнобедренном треугольнике ABP , так как $PH = 6$, то из формулы площади треугольника найдем AK

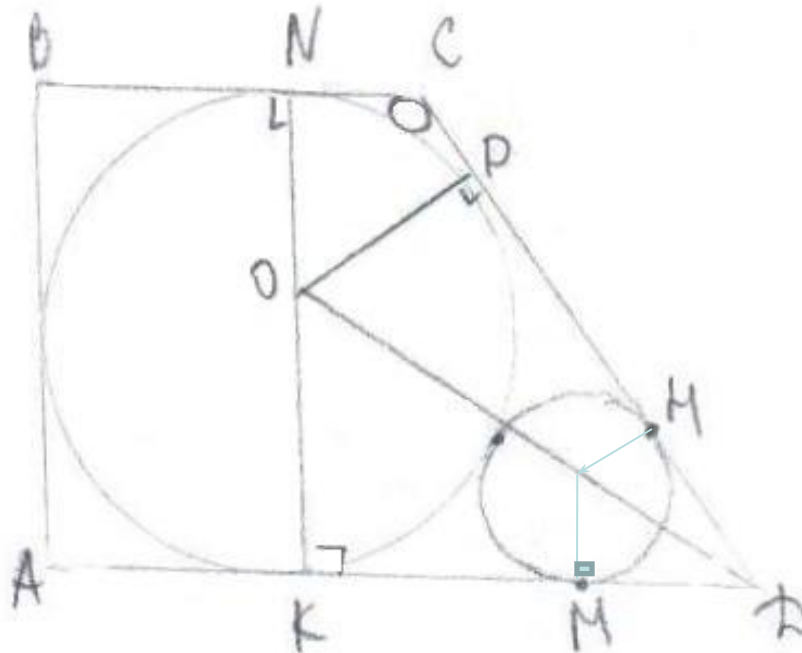
$$S = \frac{1}{2} PH \cdot AB = \frac{1}{2} AK \cdot BP$$
$$AK = \frac{2 \cdot 6\sqrt{10}}{5}$$

Второй случай когда точка P лежит внутри квадрата:

- Точка P совпадет с точкой пересечения диагоналей, поэтому высотой треугольника ABP будет катет $AP = \sqrt{2}$

Ответ : $\frac{6\sqrt{10}}{5}, \sqrt{2}$

Диагностическая работа от 20.10.10
Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S .



Решение

Первый случай, когда окружность касается нижнего основания:

1. По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки получаем, что $CN=9$, $ND=16$, $KD=16$.
2. Треугольник OKD – прямоугольный, поэтому $OD=20$.
3. Треугольники OKD и HMD подобны по двум углам, поэтому составим отношение

$$\frac{DH}{DO} = \frac{HM}{OK}$$

Пусть $MH = y$, тогда $DH = 8-y$, находим $y=3$

- Второй случай, когда окружность касается верхнего основания.

1. По теореме Пифагора найдем $OC = 15$.
2. Также используя отношение сторон подобных треугольников получаем пропорцию

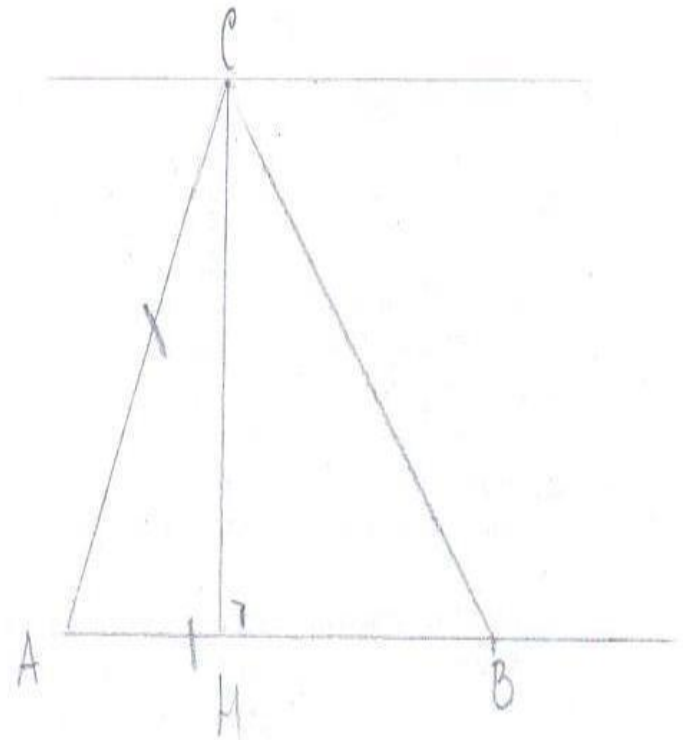
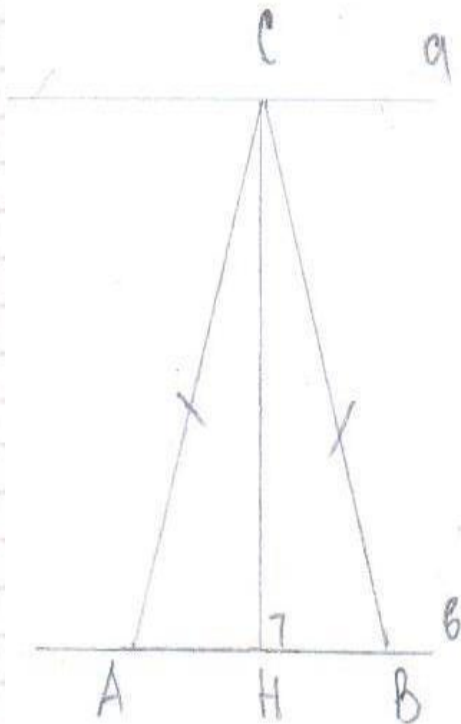
$$\frac{y}{12} = \frac{3-y}{15}$$

$$\text{То есть } y = \frac{4}{3}$$

Ответ: 3 и $\frac{4}{3}$

Диагностическая работа от 9.12.10

Расстояние между параллельными прямыми равно 12.
на одной из них лежит точка C , а на другой – точки A и B ,
причем треугольник ABC – остроугольный
равнобедренный и его боковая сторона равна 13.
Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник
 ABC .



Решение

- Первый случай, когда C – вершина равнобедренного треугольника.
1. По условию $CH = 12$, $AC = 13$, треугольник ABC – равнобедренный, поэтому $AH = 5$, значит, $AB = 10$.
 2. Из формул площади треугольника выразим радиус

$$r = \frac{AB \cdot CH}{AB + 2AC}$$

3. То есть

$$r = \frac{10}{3}$$

- Второй случай, когда $AC = AB = 13$, $CH = 12$

1. По теореме Пифагора $AN = 5$, значит $NB = 8$,

$$CB = 4\sqrt{13}$$

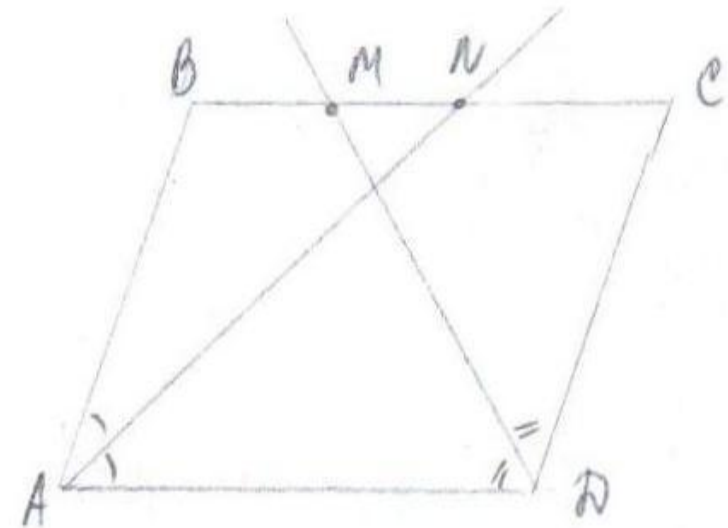
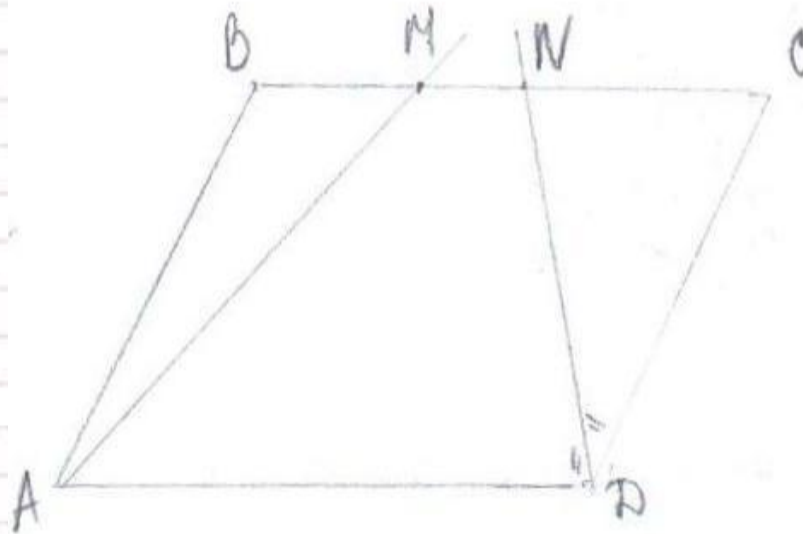
2. Подставив в формулу получаем

$$r = \frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}$$

Ответ: $\frac{10}{3}, \frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}$

Яценко и Со (30 вариантов-2011)

В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN=1:3$. Найти BC , если $AB=6$.

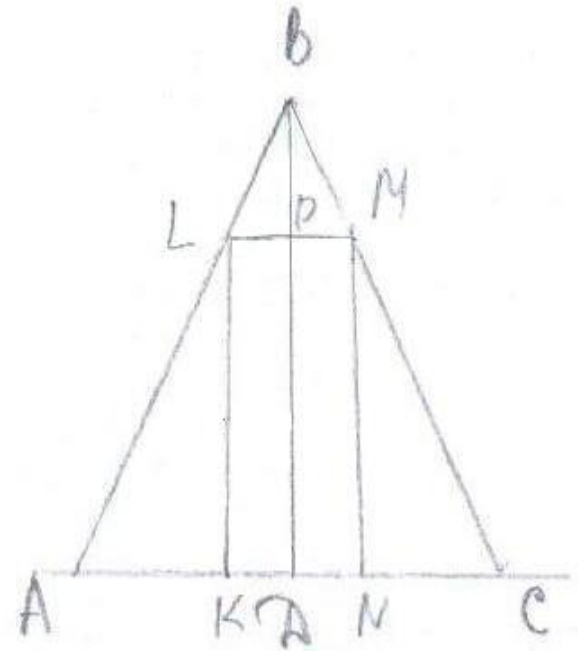
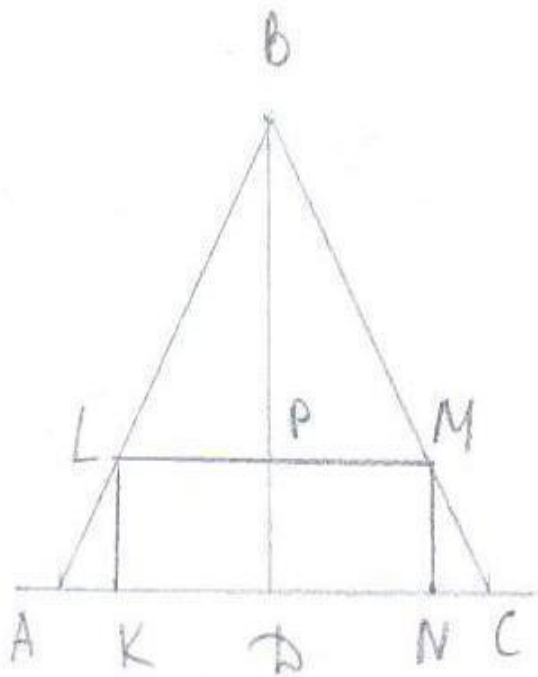


Решение

- Первый случай, когда точки M и N лежат на отрезке BC , считая от вершины B соответственно
 1. По свойству биссектрисы параллелограмма получаем $AB=BM=NC=CD=6$.
 2. Так как $BM:MN=1:3$, то $MN=18$, значит $BC=30$.
 - Второй случай, когда биссектрисы пересекаются в параллелограмме
 1. Тогда $BN=CM=6$, пусть $BM=x$, $MN=3x$
 2. $x+3x=6$, то есть $x=1,5$, значит $BC=7,5$.
- Ответ: 30 и 7,5.

Яценко и Со (30 вариантов - 2011)

Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине $15/17$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон вдвое больше другой.



Решение

- Первый случай, когда большая сторона прямоугольника лежит на основании.
1. По теореме косинусов находим $AB = 20\sqrt{17}$
 2. По теореме Пифагора находим $BD = 80$.
 3. Пусть $KN=2x$, $KD=x$, $LK=x$.
 4. Рассмотрим треугольники ABD и LBP , они подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{AD}{x} = \frac{BD}{BD - x}$$

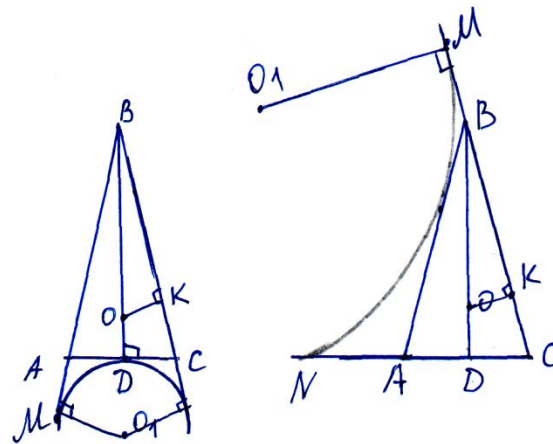
находим $x=16$, значит, $S=512$.

- Во втором случае на основании треугольника лежит меньшая сторона прямоугольника, тогда
1. Пусть $KN=x$, $KD=0,5x$, $LK=2x$.
 2. Подставив в пропорцию получим
$$\frac{AD}{0,5x} = \frac{BD}{BD - 2x}$$
 3. Получаем $x=20$, значит $S=800$.

Ответ: 512 и 800.

Ященко и Со (30 вариантов – 2011)

Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 18, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 5. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжения других его сторон.



Решение

1. Пусть $BC = a$, $AC = b$, r_a - радиус вневписанной окружности, касающейся стороны AC , r_b - радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC .
2. Треугольники $ВOK$ и BCD подобны, значит,
$$\frac{BD}{BK} = \frac{DC}{OK} = \frac{BC}{BO}$$
3. Подставим известные величины и выразим a через b
$$a = \frac{13b}{10}$$
4. Применив теорему Пифагора получаем $AC=15$,
 $AB=19,5$

5. Применив свойство отрезка касательной к вневписанной окружности, получаем

$$BM = 0,5 (19,5 \cdot 2 + 15) = 27$$

6. Из формулы площади треугольника находим радиусы вневписанных окружностей

$$(p - a) \cdot r_a = p \cdot r$$

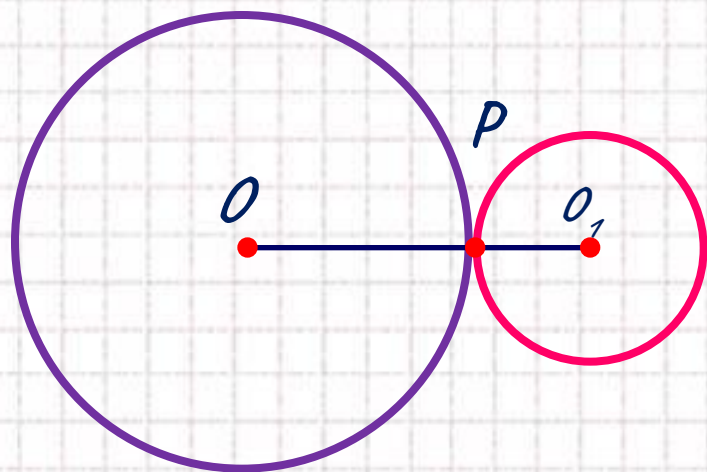
$$r_a = \frac{45}{4}$$

$$r_b = 18$$

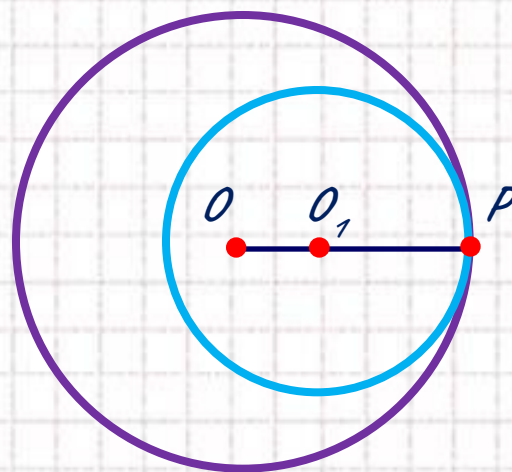
Ответ: 18 и 11,25

Основные свойства и утверждения о
взаимном расположении окружностей, о
взаимном расположении прямой и
окружности.

Если две окружности касаются внешне или внутренне, то точка касания и центры этих окружностей лежат на одной прямой

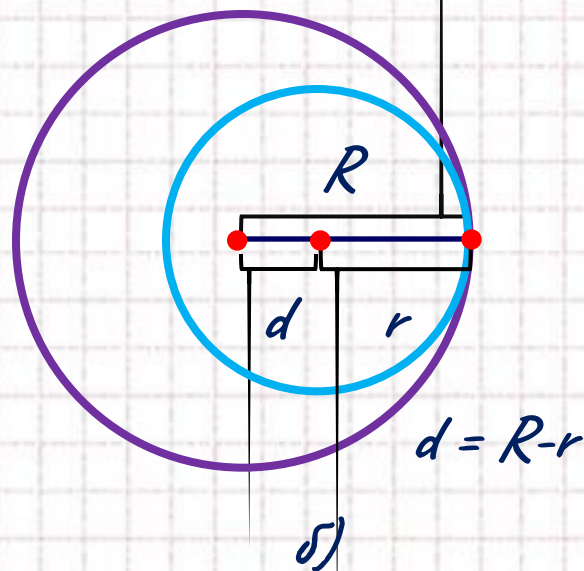
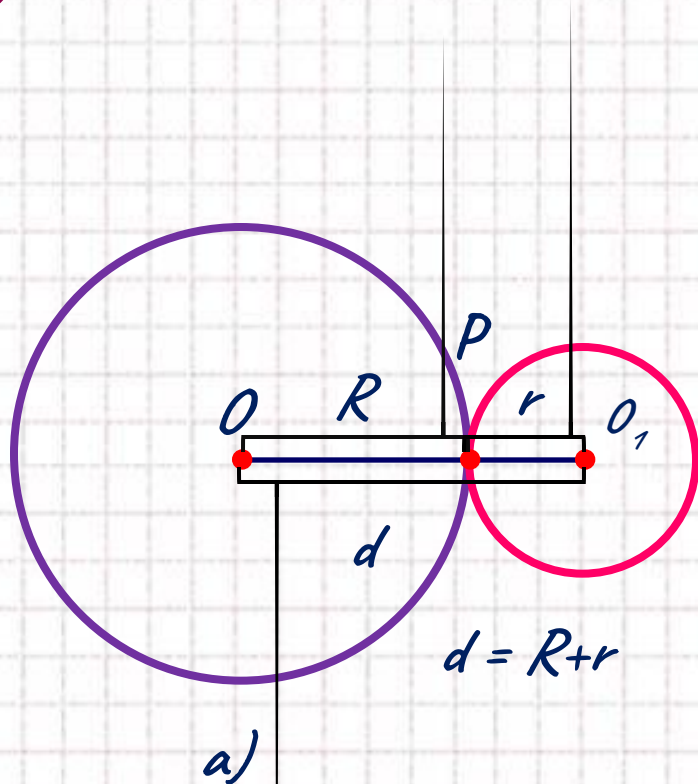


а)

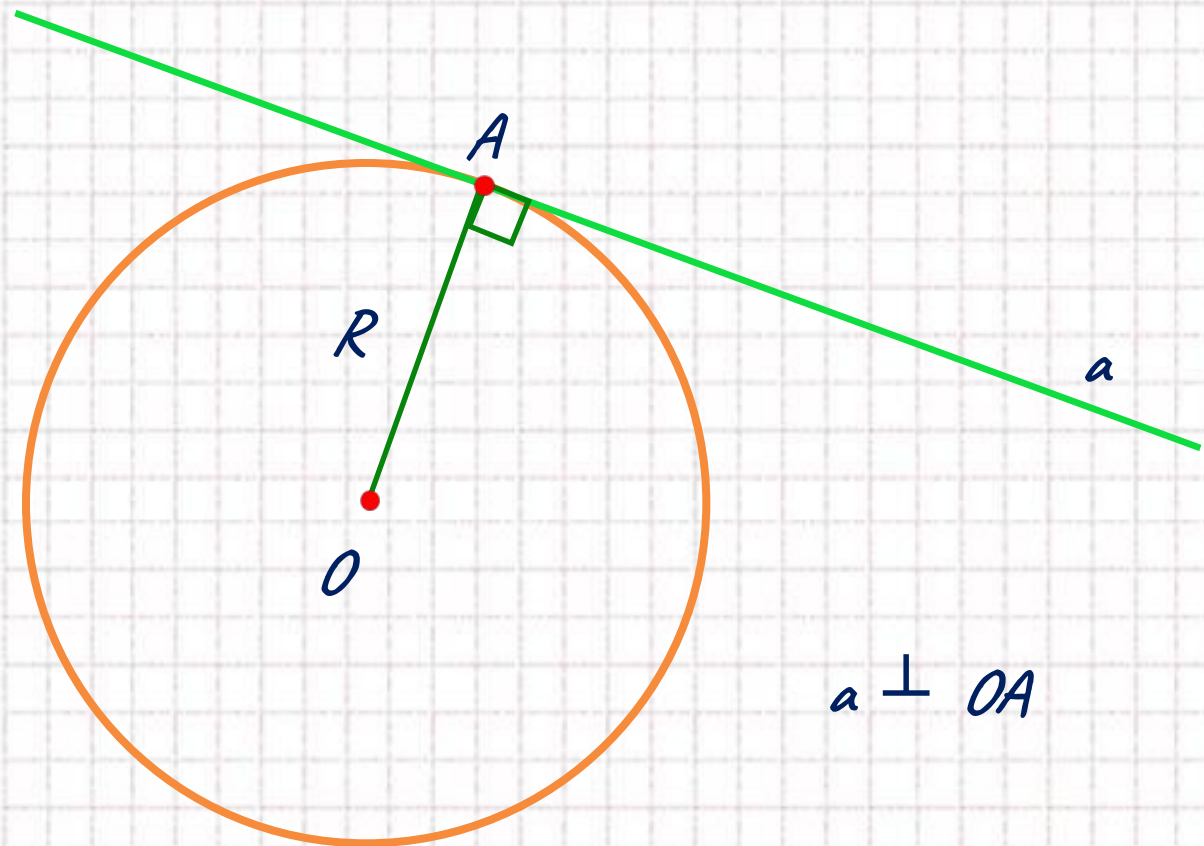


б)

Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно сумме радиусов этих окружностей, а расстояние между центрами двух внутренне касающихся окружностей равно разности радиусов большей и меньшей окружностей



Касательная к окружности или ее дуге перпендикулярна к радиусу окружности или ее дуги, проведенному в точку касания



Задача 1.

В квадрате $ABCD$, сторона которого равна a , из точки A как из центра проведена внутри квадрата дуга через вершины B и D . На стороне DC как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Найти радиус окружности, касающейся проведенной дуги, полуокружности и одной из сторон квадрата.

Решение

Рассмотрим три случая:

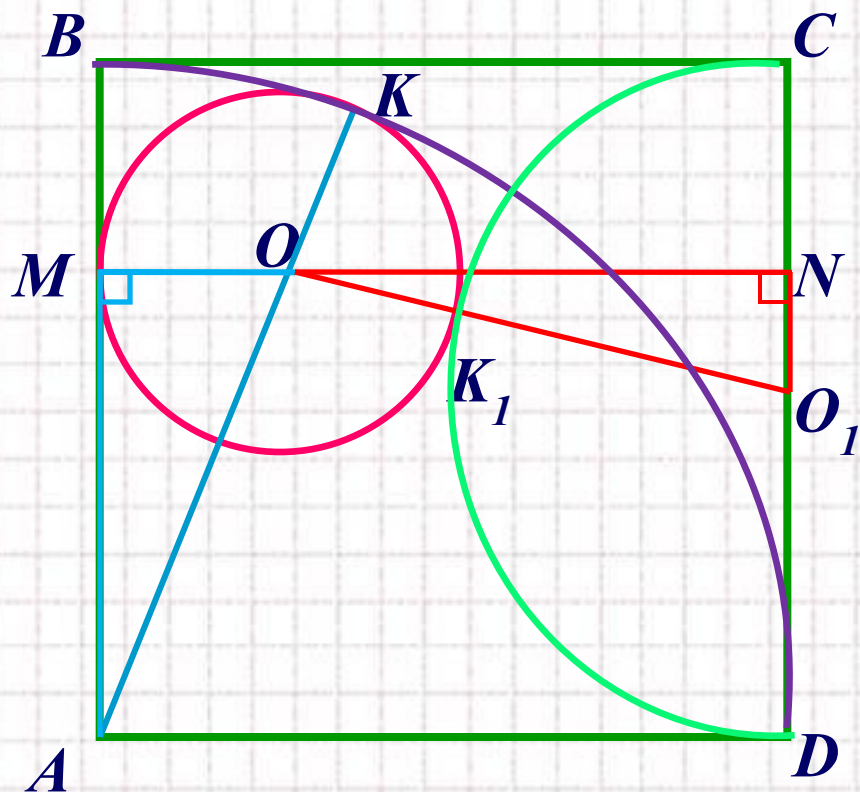


Рис. 1, а.

I. Случай, когда искомая окружность касается стороне AB квадрата $ABCD$ (Рис. 1, а). Обозначим радиус этой окружности через x .

а) Соединим центр окружности O с центром полуокружности O_1 и с центром дуги A .

б) Опустим из центра окружности O перпендикуляры OM и ON на противоположные стороны AB и CD и рассмотрим полученные при этом построении прямоугольные треугольники AMO и OO_1N .

Из прямоугольного треугольника AMO следует, что неизвестный катет AM равен

$$\sqrt{AO^2 - MO^2}, \text{ то есть } AM = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} \text{ или } AM = \sqrt{a(a-2x)}$$

Теперь рассмотрим треугольник OO_1N , в котором гипотенуза

$$OO_1 = OK_1 + K_1O_1 = \frac{a}{2} + x, \text{ катет } ON = MN - OM = a - x \text{ и катет } O_1N = DN - DO_1,$$

$$\text{где } DN = AM = \sqrt{a(a-2x)} \text{ и } DO_1 = \frac{a}{2} \text{ поэтому } O_1N = \sqrt{a(a-2x)} - \frac{a}{2}$$

По теореме Пифагора находим $OO_1^2 = ON^2 + O_1N^2$. Подставляя найденные выражения для OO_1 , ON и O_1N в выше написанное уравнение имеем

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = (a-x)^2 + \left(\sqrt{a(a-2x)} - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{откуда получаем искомый радиус } x = OK = \frac{a}{25} (9 - \sqrt{6})$$

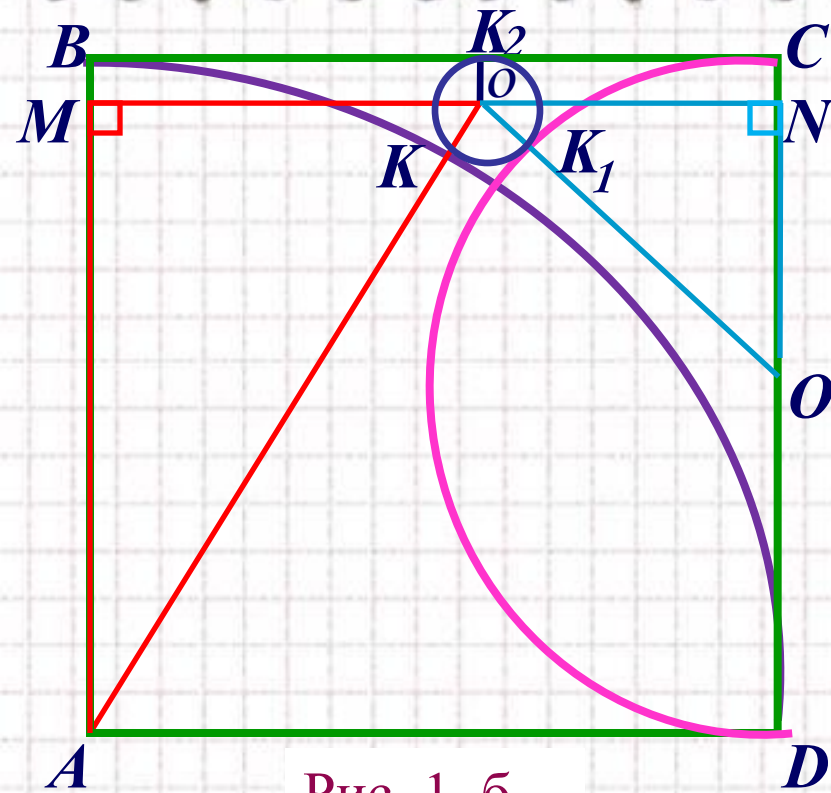


Рис. 1, б.

II. Случай, когда искомая окружность касается стороне BC (Рис. 1, б). Обозначим радиус этой окружности через y . Сделаем необходимые дополнительные построения и получаем прямоугольные треугольники AOM и O_1ON . Из прямоугольного треугольника AOM по теореме Пифагора найдем катет OM . Он равен $OM =$

$$= \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{(a + y)^2 - (a - y)^2} = 2\sqrt{ay}$$

Аналогично найдем из прямоугольного треугольника O_1ON катет $ON =$

$$= \sqrt{O_1O^2 - O_1N^2} = \sqrt{2ay}$$

Решая это уравнение, находим $y = OK = \frac{a}{2}(3 - 2\sqrt{2})$

Подставляя найденные значения величин OM и ON в соотношение $BC = OM + ON$, получаем $a = 2\sqrt{ay} + \sqrt{2ay}$

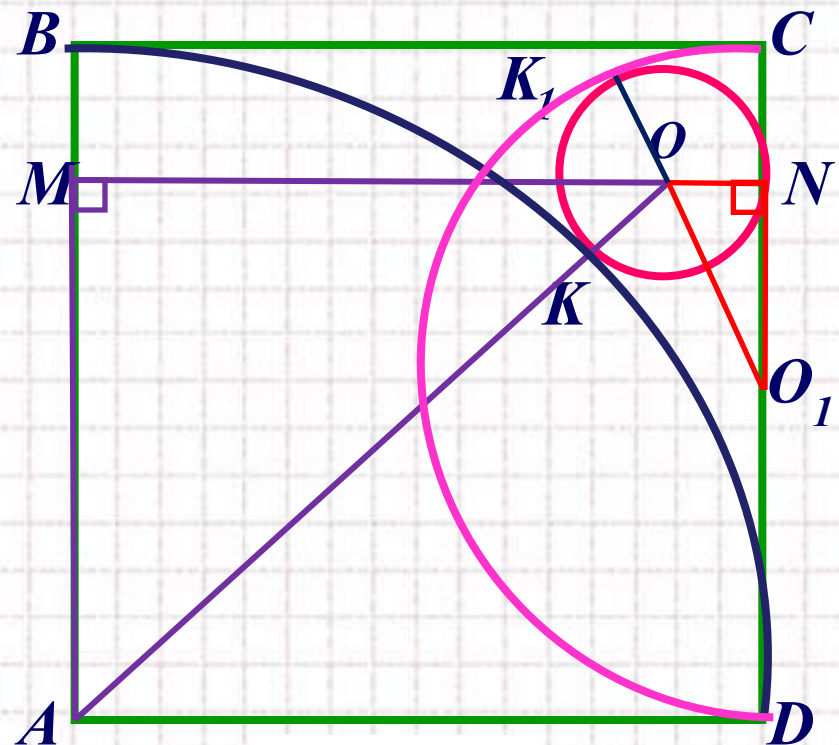


Рис. 1, в.

Следовательно, катет AM прямоугольного треугольника AMO равен

$AM = \frac{\sqrt{a^2 - 4az} + a}{2}$. Из соотношения $AO^2 = AM^2 + OM^2$ получаем

$$(a + z)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - 4az} + a}{2} \right)^2 + (a - z)^2$$

откуда и находится искомый радиус $z = OK =$

$$\frac{4a}{25}$$

III. Искомая окружность касается стороне DC (Рис.1, в). Обозначим радиус этой окружности через z . Опустим из центра O искомой окружности перпендикуляры OM и ON соответственно на стороны AB и CD квадрата $ABCD$ и соединим центр O с центром полуокружности O_1 и с вершиной A квадрата $ABCD$. Из полученного при этом построении прямоугольного треугольника OO_1N

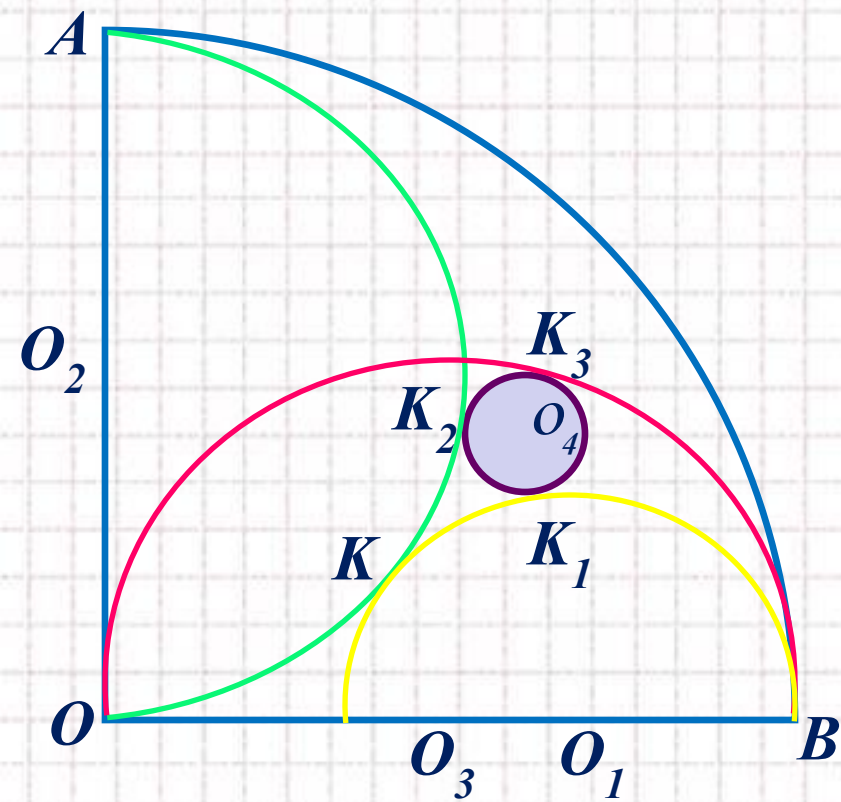
по теореме Пифагора имеем $ON =$

$$= \sqrt{OO_1^2 - O_1N^2} = \frac{\sqrt{a^2 - 4az}}{2}$$

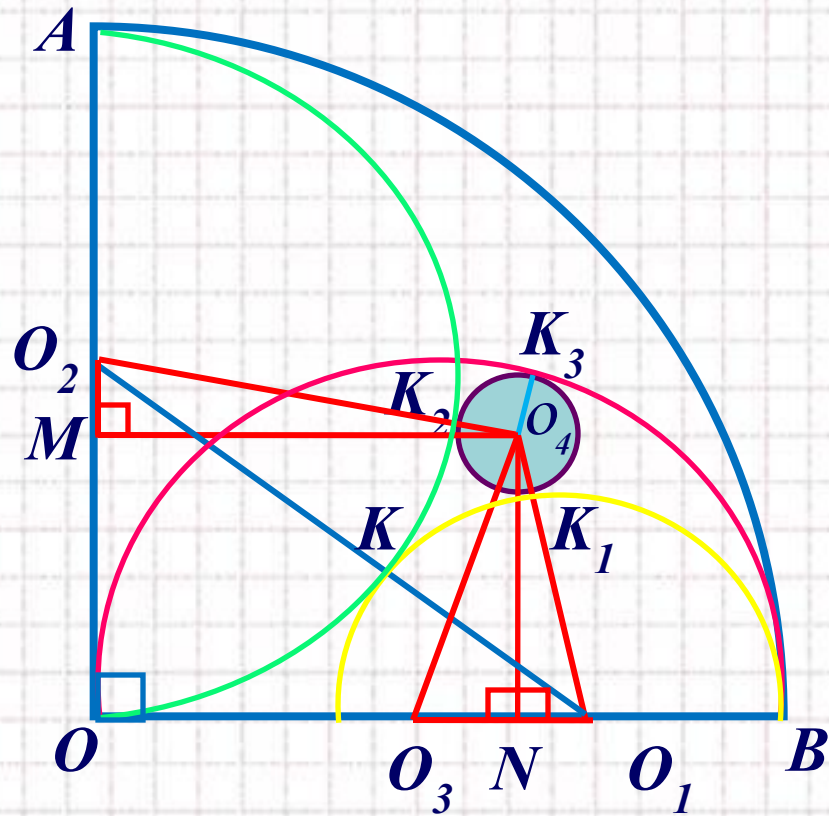
Задача 2

Дан круговой сектор AOB радиуса R с центральным углом в 90° . На радиусах AO и OB этого сектора как на диаметрах построены полуокружности, расположенные внутри данного сектора. Полуокружность с центром O_1 на радиусе OB сектора AOB , радиуса O_1B касается полуокружности, построенной на радиусе AO , и дуги AB в точке B . Определить радиус окружности, касающейся этих трех полуокружностей.

Решение.



a)



6)

Рис.2

Для решения этой задачи проведем из центров полуокружностей O_1 и O_2 радиусы в точки касания (Рис.2,б). Радиусы O_1K и O_2K оба перпендикулярны касательной в одной и той же точке K и поэтому они лежат на одной прямой O_1O_2 . Получим прямоугольный треугольник OO_1O_2 , из которого найдем $O_1O_2^2 = O_1O^2 + O_2O^2$ или,

так как $O_1O_2 = O_2K + O_1K = \frac{R}{2} + O_1B$,

$$O_1O = OB - O_1B = R - O_1B \text{ и } O_2O = \frac{R}{2}$$

отсюда получаем $\left(\frac{R}{2} + O_1B\right)^2 = \frac{R^2}{4} + (R - O_1B)^2$ или $O_1B = \frac{R}{3}$.

Далее центры полуокружностей O_1, O_2 и O_3 соединим с центром окружности O_4 и из центра O_4 этой же окружности опустим перпендикуляры O_4M и O_4N на радиусы OA и OB сектора AOB . Теперь рассмотрим прямоугольные треугольники O_1O_4N и O_3O_4N . Высота O_4N — общая для обоих этих треугольников и поэтому, применяя теорему Пифагора к этим прямоугольным треугольникам, получим следующее равенство

$$O_1 O_4^2 - O_3 O_4^2 = NO_1^2 - NO_3^2, \text{ или } (O_1 O_4 - O_3 O_4)(O_1 O_4 + O_3 O_4) = (NO_1 - NO_3)$$

$$(NO_1 + NO_3). \text{ Подставив сюда значения: } O_1 O_4 = \frac{R}{3} + K_1 O_4; \quad O_3 O_4 = \frac{R}{2} - K_1 O_4;$$

$$NO_1 + NO_3 = \frac{R}{6} \text{ и } NO_1 - NO_3 = \frac{R}{6} - 2NO_3, \text{ получаем уравнение}$$

$$\frac{5R}{6} \left(2K_1 O_4 - \frac{R}{6} \right) = \frac{R}{6} \left(\frac{R}{6} - 2NO_3 \right), \text{ откуда } NO_3 = \frac{R - 10K_1 O_4}{2}$$

Следовательно, высота

$$O_4 N = \sqrt{O_3 O_4^2 - NO_3^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2} - K_1 O_4 \right)^2 - \left(\frac{R - 10K_1 O_4}{2} \right)^2} = 2\sqrt{K_1 O_4 (R - 6K_1 O_4)}.$$

Теперь мы должны определить стороны прямоугольного треугольника

$$O_2 O_4 M. \text{ Гипотенуза } O_2 O_4 = O_2 K_2 + K_2 O_4 = \frac{R}{2} + K_1 O_4$$

$$\text{Катет } O_2M = OO_2 - OM = \frac{R}{2} - 2\sqrt{K_1 O_4 (R - 6K_1 O_4)}$$

$$\text{и катет } O_4M = R - 5K_1 O_4$$

По теореме Пифагора имеем $O_2O_4^2 = O_2M^2 + MO_4^2$, или

$$\left(\frac{R}{2} + K_1 O_4\right)^2 = \left(\frac{R}{2} - 2\sqrt{K_1 O_4 (R - 6K_1 O_4)}\right)^2 + (R - 5K_1 O_4)^2,$$

$$\text{откуда } K_1 O_4 = \frac{R}{73}(9 - 2\sqrt{2})$$

Задача 3.

На отрезке AB , равном R , точка Q – середина; на AQ и на BQ как на диаметрах по одну сторону от AB построены полуокружности. С центрами в точках A и B радиусами, равными AB , проведены дуги до их взаимного пересечения в точке F , находящиеся по ту же сторону от AB , что и полуокружности. Проведена окружность, которая касается проведенных дуг и полуокружностей. Найти радиус окружности, касающейся окружности, полуокружности, построенной на отрезке BQ , и дуги BF .

Решение.

Записывая теорему Пифагора для прямоугольных треугольников O_1O_2Q и BO_2Q (Рис.3), получаем $(BO_2 + O_1O_2)(BO_2 - O_1O_2) = (BQ + O_1Q)(BQ - O_1Q)$. Имея в виду, что $BO_2 = BK_2 - O_2K_2 = R - O_2K_2$,

$$\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_1 K_4 + K_4 \mathbf{O}_2 = \frac{R}{4} + \mathbf{O}_2 K_2,$$

$$BQ = \frac{R}{2} \quad \text{и} \quad O_1Q = \frac{R}{4} \quad \text{находим}$$

$$\frac{5R}{4} \left(\frac{3R}{4} - 2O_2K_2 \right) = \frac{3R^2}{16}, \text{ откуда } O_2K_2 = \frac{3R}{10}.$$

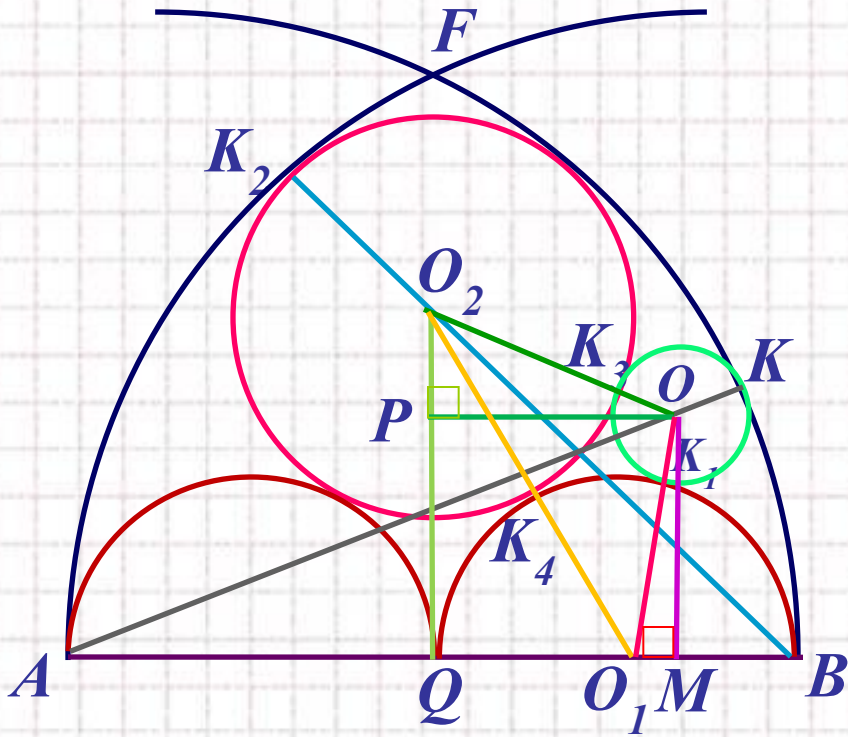


Рис. 3.

Далее, рассматривая прямоугольные треугольники O_1OM и AOM ,
имеем $(AO + O_1O)(AO - O_1O) = (AM + O_1M)(AM - O_1M)$, где

$$AO = AK - OK = R - OK, \quad O_1O = O_1K_1 + K_1O = \frac{R}{4} + OK,$$

$$AM + O_1M = 2AM - \frac{3R}{4} \text{ и } AM - O_1M = \frac{3R}{4}.$$

Поэтому $\frac{5R}{4} \left(\frac{3R}{4} - 2OK \right) = \frac{3R}{4} \left(2AM - \frac{3R}{4} \right)$, откуда $AM = R - \frac{5}{3}OK$

и высота $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \frac{2\sqrt{OK(3R-4OK)}}{3}$

Для окончательного решения задачи осталось определить стороны
прямоугольного треугольника OPO_2 и подставить в уравнение
 $OO_2^2 = O_2P^2 + PO^2$. Меньший катет $O_2P = O_2Q - PQ$, где

$$O_2Q = \sqrt{BO_2^2 - BQ^2} = \frac{R\sqrt{6}}{5}, \quad \text{тогда } O_2P = \frac{R\sqrt{6}}{5} - \frac{2\sqrt{OK(3R-4OK)}}{3}$$

катет $PO = QM = AM - AO = \frac{3R-10OK}{6}$ и гипотенуза

$$OO_2 = O_2K_3 + K_3O = \frac{3R+10OK}{10}. \quad \text{Отсюда получаем}$$

$$\left(\frac{3R+10OK}{10}\right)^2 = \left(\frac{R\sqrt{6}}{5} - \frac{2\sqrt{OK(3R-4OK)}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3R-10OK}{6}\right)^2$$

После необходимых преобразований находим искомый радиус

$$OK = \frac{3(19-6\sqrt{6})R}{145}.$$

*Задачи для самостоятельного
решения*

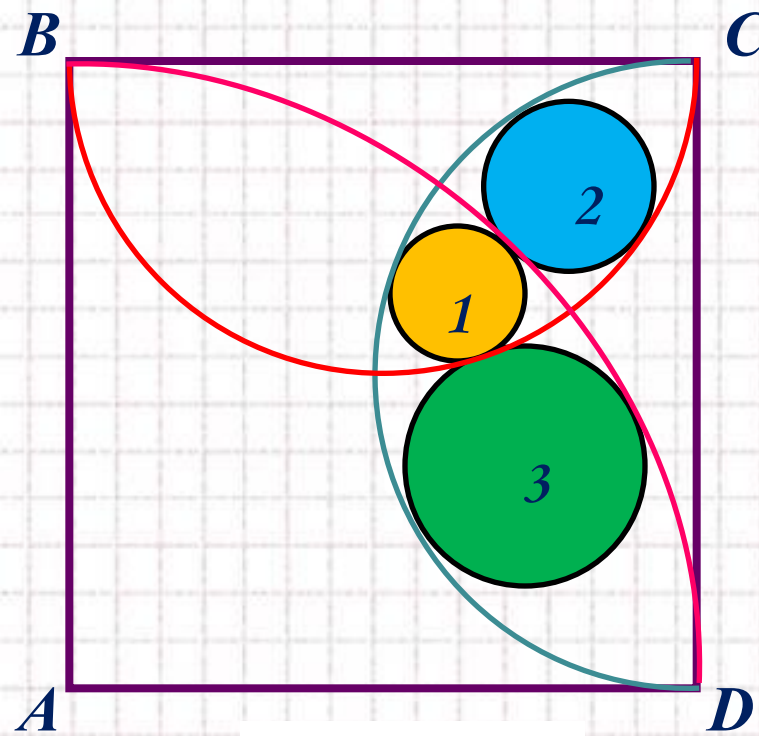


Рис. 4.

Задача 1. В квадрате $ABCD$ из точки A как из центра проведена внутри квадрата дуга, проходящая через вершины B и D . На сторонах BC и CD как на диаметрах построены внутри квадрата полуокружности. Найти радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей и дуги BD , если стороны квадрата равны a .

Ответ: Надо рассмотреть отдельно три случая:

$$1) \frac{a(5 - 3\sqrt{2})}{7};$$

$$2) \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{3};$$

$$3) \frac{a(3\sqrt{2} - 1)}{17}.$$

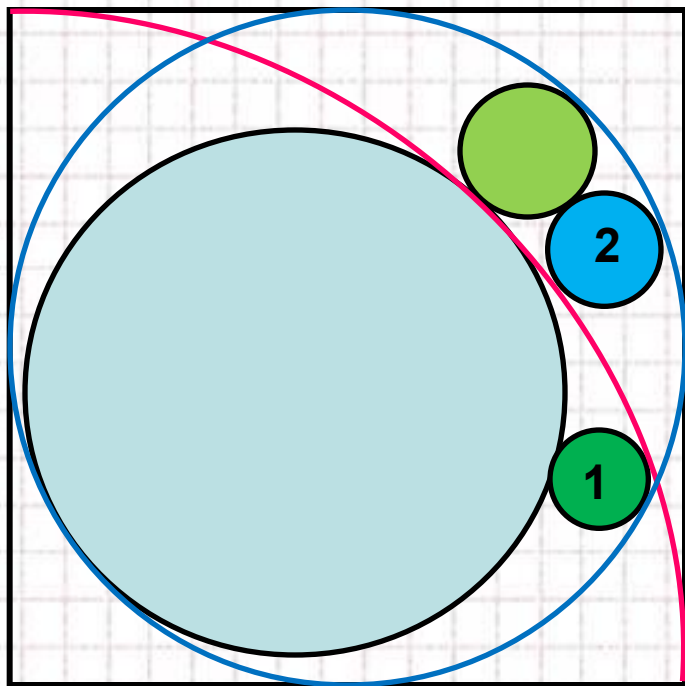


Рис. 5.

Задача 2. Окружность вписана в квадрат со стороной 1. Из одной его вершины проведена дуга окружности радиуса 1 до пересечения с другими двумя противоположными вершинами. Проведена окружность, которая касается вписанной окружности и проведенной дуги. Найти радиус окружности, касающейся этой окружности, вписанной окружности и дуги.

Ответ: Два случая:

$$1) \frac{5\sqrt{2} - 1}{84};$$

$$2) \frac{7(4\sqrt{2} - 5)}{4(37 - 17\sqrt{2})}.$$

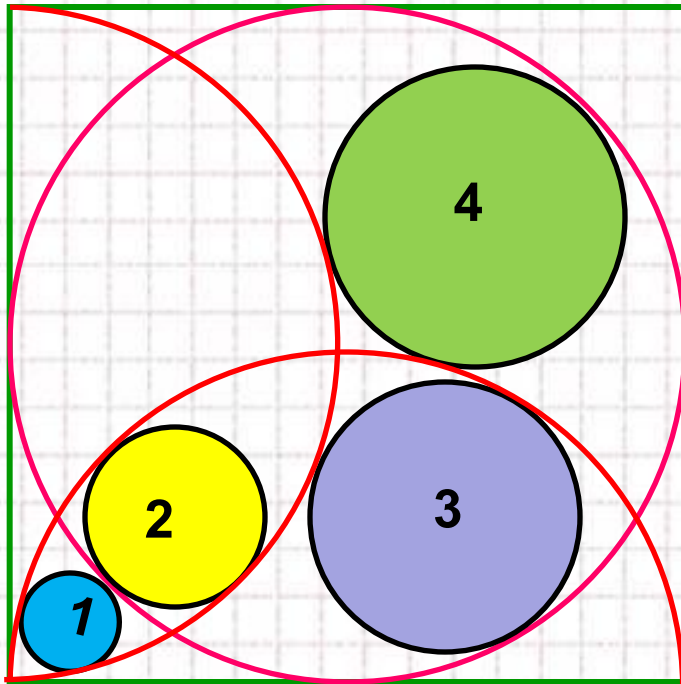


Рис. 6.

Задача 3. Около окружности описан квадрат со стороной a . На двух смежных сторонах этого квадрата построены полуокружности, расположенные внутри квадрата. Найти радиус окружности, касающейся этих двух полуокружностей и окружности.

Ответ: Четыре случая:

$$1) \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(4-\sqrt{2})}; \quad 2) \frac{a(2-\sqrt{2})}{4}; \quad 3) \frac{a}{2\sqrt{6}}; \quad 4) \frac{a(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+4)}.$$

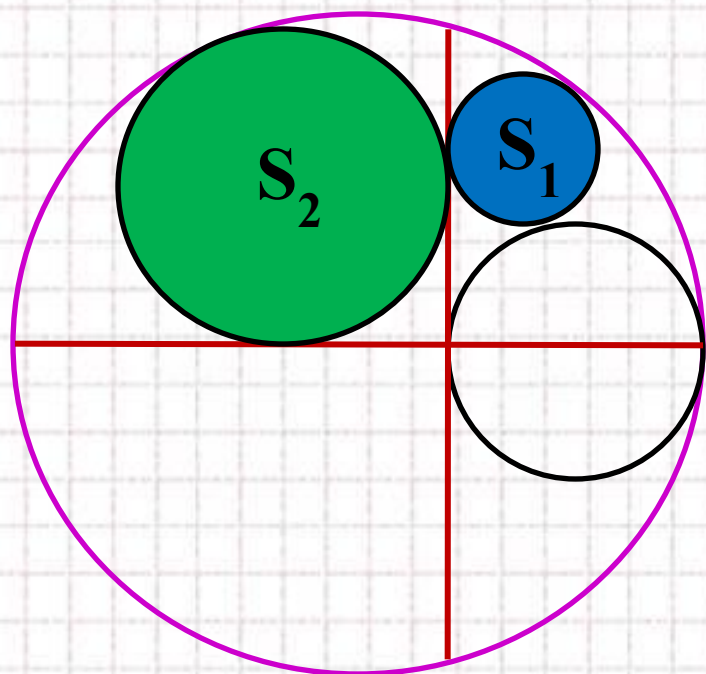


Рис. 7.

Задача 4. Две окружности радиусов a и b ($a < b$) имеют внутреннее касание. Внутри большей окружности проведена касательная к меньшей окружности, перпендикулярная к общему диаметру этих окружностей. Доказать, что отношение радиуса окружности S_1 , касающейся двух данных окружностей и проведенной касательной, к радиусу окружности S_2 , касающейся большей окружности, проведенной касательной и общего диаметра двух данных окружностей,

равно
$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{a}{b} \right).$$

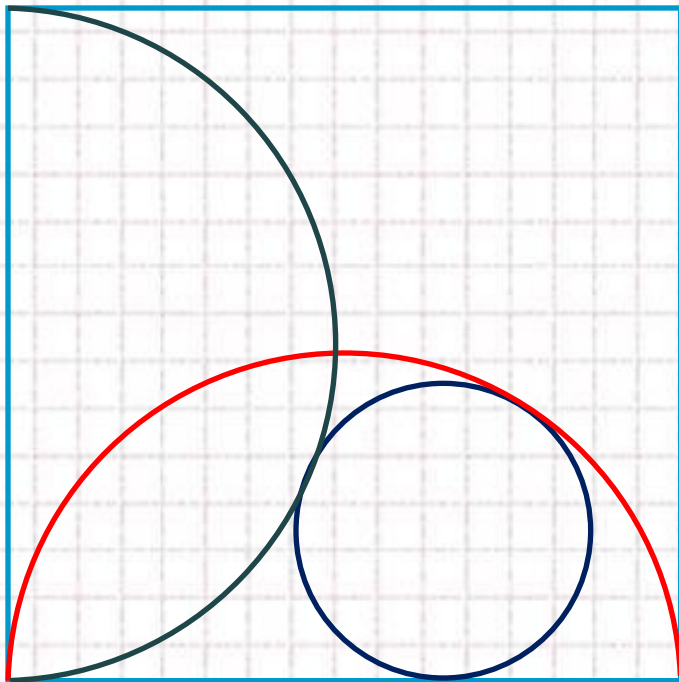


Рис. 8.

Задача 5. Внутри квадрата со стороной a на двух его смежных сторонах как на диаметрах построены полуокружности. Найти радиус окружности, касающейся этих двух построенных полуокружностей и одной из сторон данного квадрата.

Ответ: $\frac{2a}{9}$.