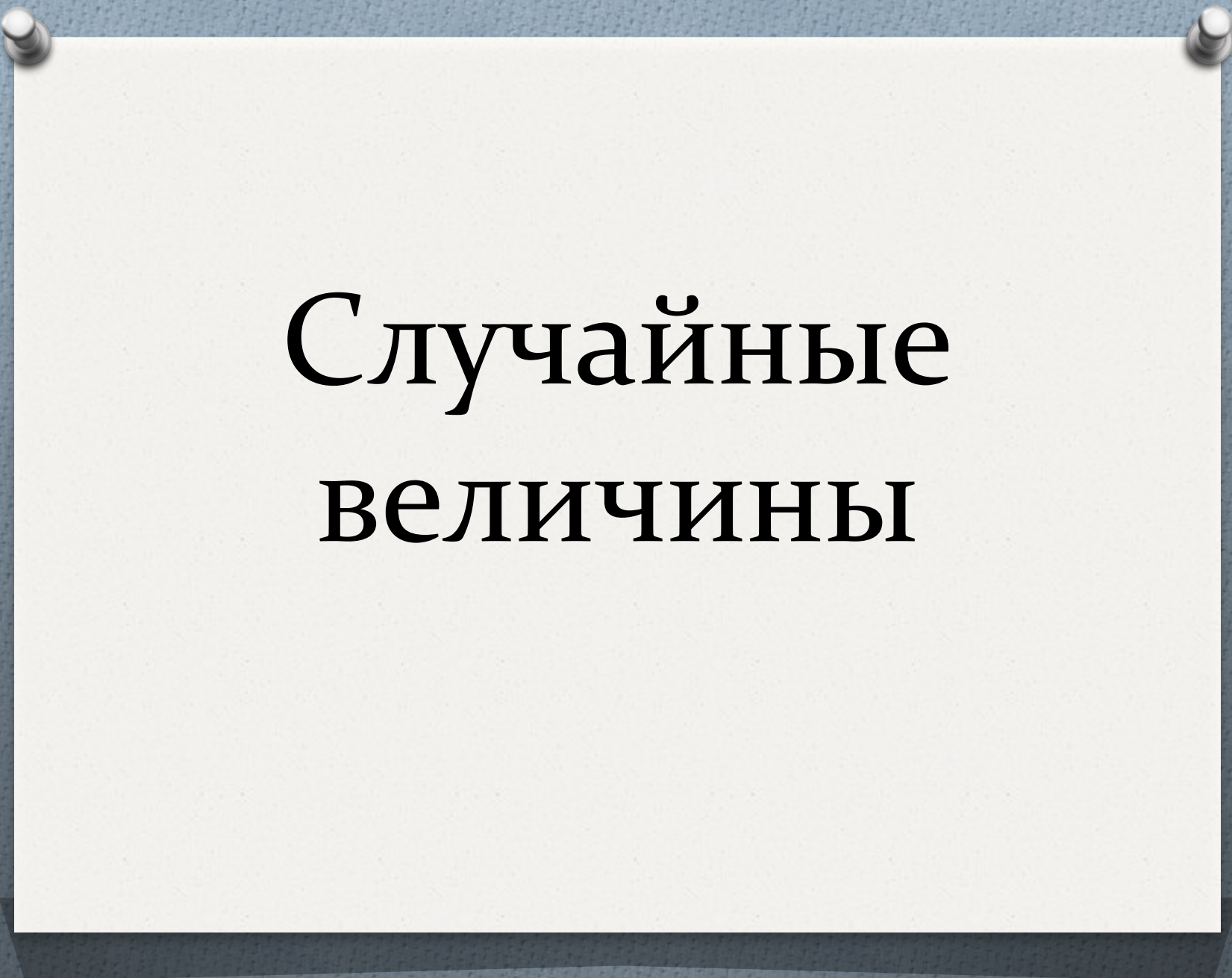




Случайные величины

О **Случайной величиной** называется величина, численное значение которой может меняться в зависимости от условий эксперимента.

О Случайные величины принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита - $X, Y, Z, \dots$, а их значения – соответствующими строчными буквами $x, y, z, \dots$

Пример 1. В вашей группе 17 человек.
Случайная величина X – число студентов, находящихся в аудитории перед началом занятий.

Ее возможными значениями будут числа
 $0, 1, 2, \dots, 17$.



Пример 2. Изменение курса валют.

Случайная величина X -
стоимость валюты.

Примет некоторое значение в
пределах от 57 до 62 рублей.



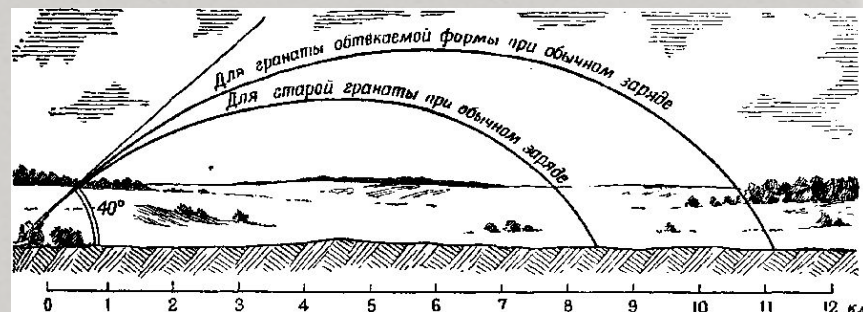
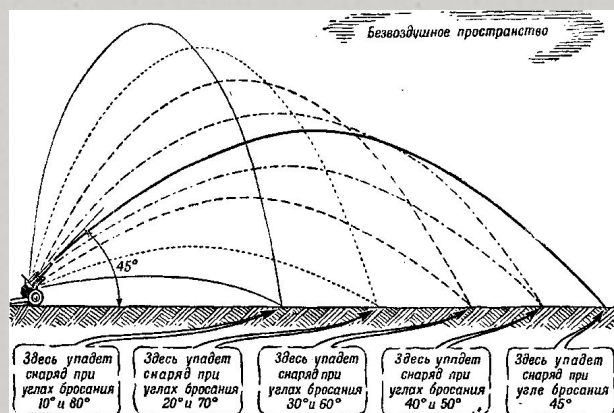
**Пример 3. Однократное бросание
игральной кости.**

Случайная величина X –
число, выпавшее на верхней
границе игрального кубика
Её значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6.



Пример 4. Случайная величина X -расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия

Возможные значения этой величины
принадлежат некоторому промежутку $(a; b)$.



0 Дискретная случайная величина – случайная величина, которая принимает *конечное или счётное* число значений с определенными вероятностями.

0 Непрерывная случайная величина – случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного *промежутка*.

Определить вид случайной величины

- 0 Число студентов в группе.
- 0 Бросаем игральную кость один раз? Два раза? n раз?
- 0 Ошибка измерения.
- 0 ...

Дискретные случайные величины (ДСВ)

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и десять выигрышей по 1 рублю.

Пусть **случайная величина X** – стоимость возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Найти значения этой величины и вероятности этих значений.



Запишем возможные значения случайной величины X : $x_1=50$, $x_2=1$, $x_3=0$.

Вычислим вероятность возможных значений случайной величины X :

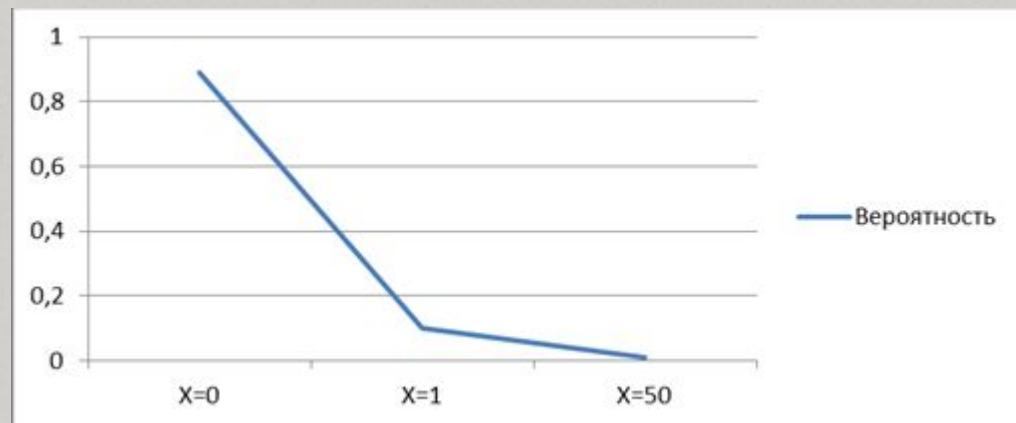
$$p_1 = \frac{1}{100} = 0,01 \quad p_2 = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$p_3 = 1 - 0,01 - 0,1 = 0,89$$

0 Можно составить таблицу соответствий значений случайной величины и их вероятностей:

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

0 Графически решение данной задачи будет иметь вид:



Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называют **законом распределения дискретной случайной величины.**

Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

Таблично:

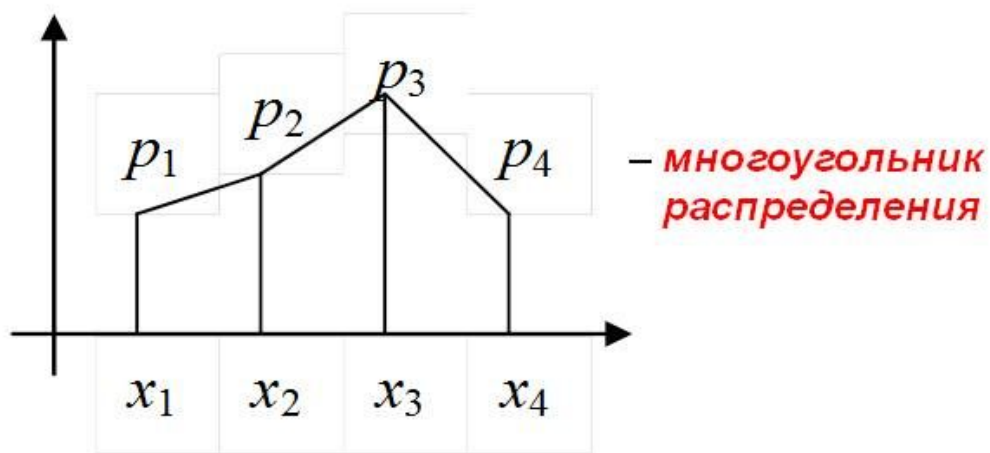
X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Аналитически:

$$p(x_i) = f(i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Графически:



Числовые характеристики ДСВ

Пусть закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Математическим ожиданием (средним)

дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е. число:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Свойства математического ожидания:

$$1. M(c) = c, c = const$$

$$2. M(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n)$$

$$3. M(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \dots * M(x_n)$$

$$4. M(cx) = cM(x), c = const$$

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - M^2(X)$$

Свойства дисперсии:

1. $D(c) = 0, c = \text{const}$

2. $D(cX) = C^2 D(X)$

3. $D(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n)$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Непрерывные случайные величины (НСВ)

НСВ называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Число всех возможных значений НСВ бесконечно.

Пример: Случайное отклонение по дальности точки падения снаряда от цели.



Функция распределения НСВ

Функцией распределения (или интегральной функцией распределения) называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что СВХ примет значение, меньшее x , т.е.

$$F(x) = P(X < x)$$

($F(x)$ определяется и для ДСВ).

Свойства:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

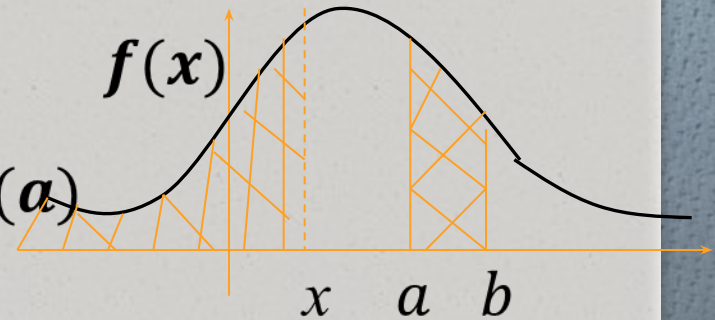


Функция плотности вероятности

Для непрерывной случайной величины производная функции распределения $F'(x) = f(x)$ называется **функцией плотности вероятности** или **дифференциальной функцией распределения**.

$$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



$f(x) \geq 0$ (как производная неубывающей функции)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки) - площадь под графиком плотности вероятности равна 1.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины: математическое ожидание $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$\begin{aligned} D[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx = \\ &= M[X^2] - M^2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2[X] \end{aligned}$$

**Некоторые законы
распределения
случайных
величин**

Биномиальное распределение



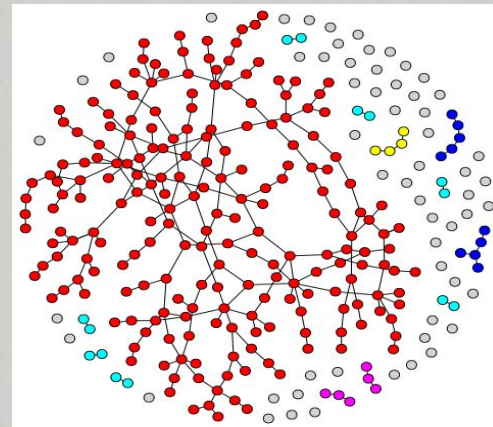
Дискретная случайная величина X распределена по **биномиальному закону**, если она имеет значения $\{0 \dots n\}$, а вероятность $X=m$

$$P(X=m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Биномиальное распределение описывает **вероятность m успехов при n возможных исходов**

- $M[X]=np$ - мат. ожидание
- $D[X]=npq$ - дисперсия,

где p - вероятность успеха,
 q - вероятность неуспеха



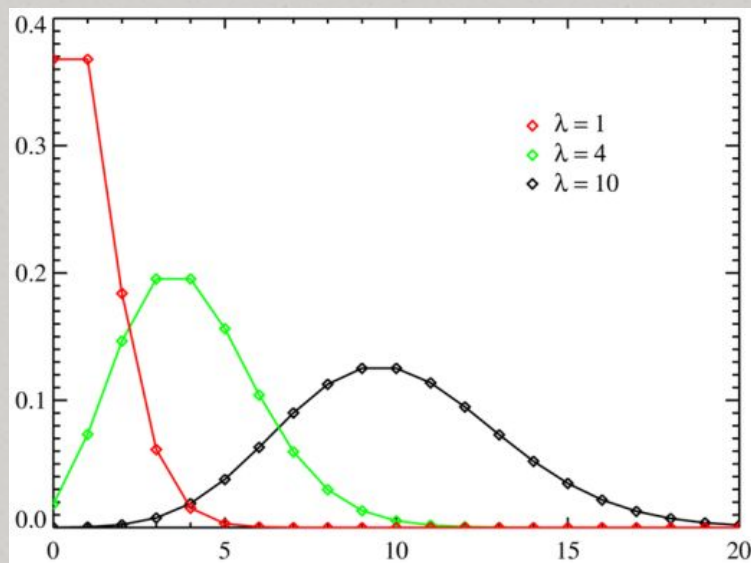
Пуассоновское распределение

$$p_k = P(\mu = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

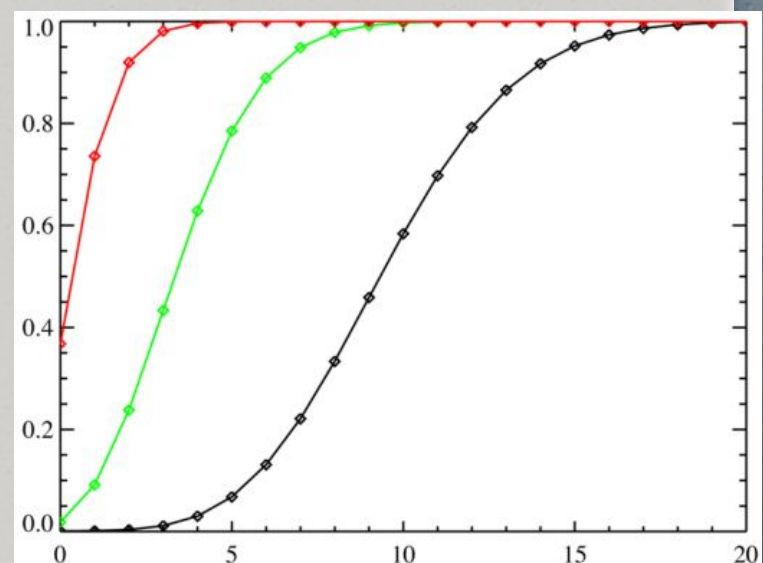
где $k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$ – параметр пуассоновского распределения.

Функция вероятности

Функция распределения



$$M(X) = \lambda$$



$$D(X) = \lambda$$

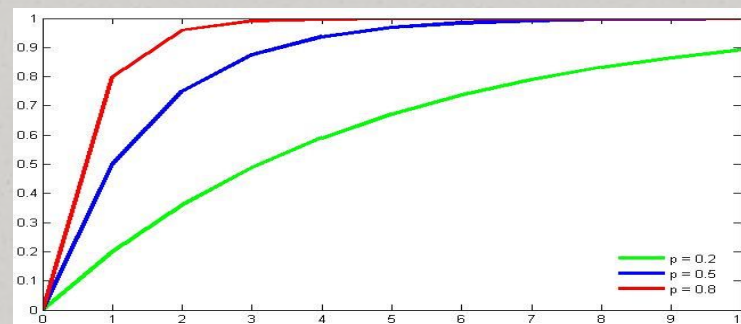
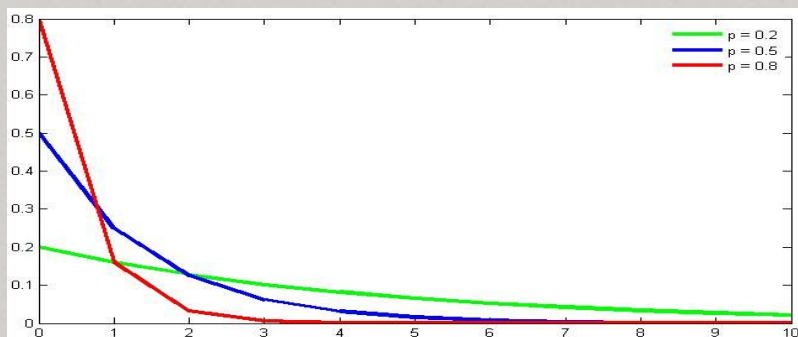
Геометрическое распределение

$$p_k = P(\eta = k) = p^k q$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \dots, n$,

Функция вероятности

Функция распределения



$$M(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}$$

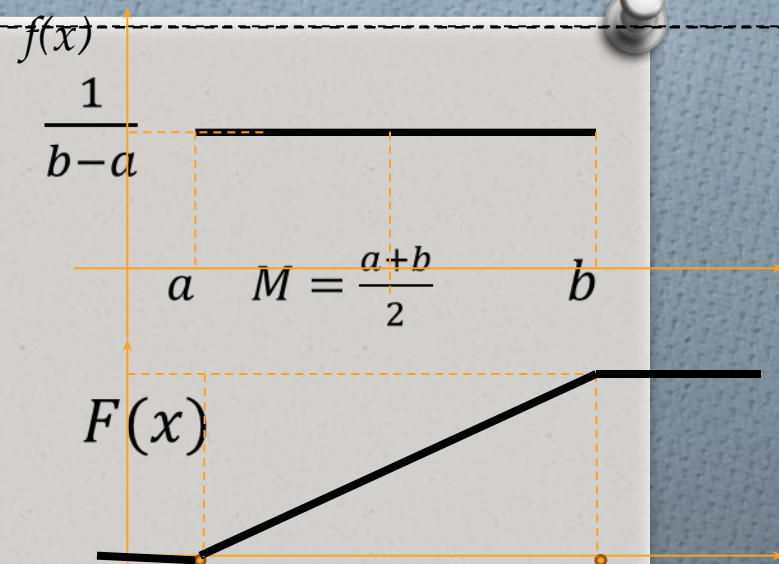
Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \in (-\infty, a \cup b, \infty) \end{cases}$$

$$M[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

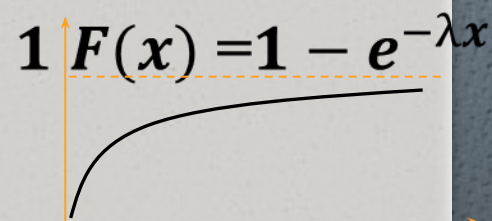
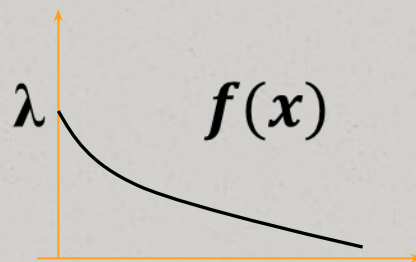
$$D[X] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$F[X] = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$



Показательное распределение

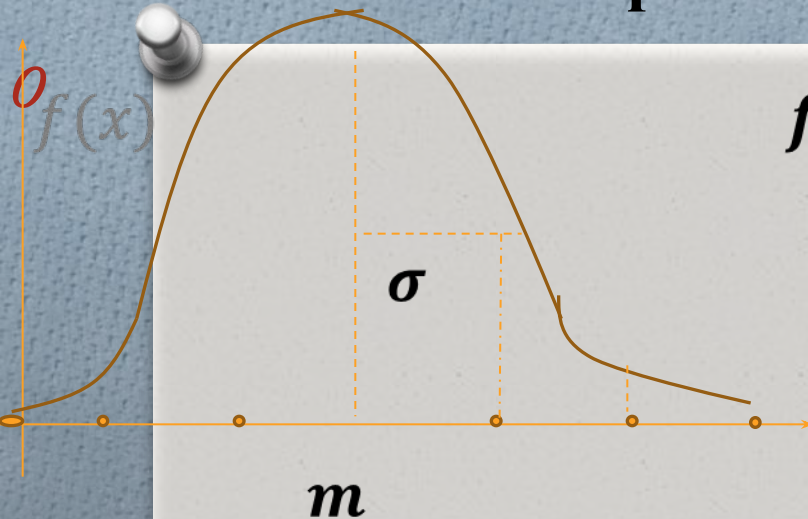
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



$$M[X] = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}; \quad D[X] = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Коэффициент вариации $V = \frac{\sigma[X]}{M[X]} = 1$ (характерный признак)

Нормальное распределение

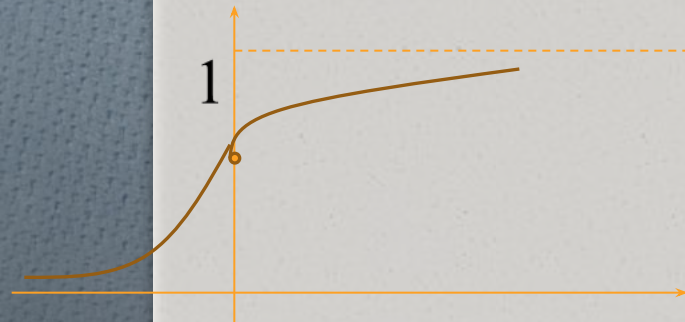


$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$t = \frac{x-m}{\sigma} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$M[X] = m; \quad D[X] = \sigma^2$$

Функция распределения $F[X] = \Phi[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$



$$\Phi(-\infty) = 0; \quad \Phi(\infty) = 1$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$P(|x - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1;$$

Правило 3σ : $P(|x - m| < \varepsilon) = 0,9973$