

# Кванторы

Рассматриваемые вопросы

1. Кванторы.
2. Квантор всеобщности.
3. Квантор существования.
4. Понятие формулы логики предикатов. Значение формулы логики предикатов.
5. равносильные формулы логики предикатов.

# Понятие квантора

**Квантор** - (от лат. quantum - сколько), логическая операция, дающая количественную характеристику области предметов, к которой относится выражение, получаемое в результате её применения.

*В обычном языке носителями таких характеристик служат слова типа "все", "каждый", "некоторый", "существует", "имеется", "любой", "всякий", "единственный", "несколько", "бесконечно много", "конечное число", а также все количественные числительные.*

# Операции для предиката

Для предикатов вводятся две новые по сравнению с логикой высказываний операции:

**квантор общности**

**квантор существования**

# Квантор общности

Пусть  $P(x)$  – одноместный предикат, определенный на предметном множестве  $M$ .

Универсальным высказыванием, соответствующим предикату  $P(x)$ , называется высказывание:

*«каждый элемент множества  $M$  удовлетворяет предикату  $P(x)$ »*

ИЛИ

*«для всякого  $x$  выполняется предикат»*

Это высказывание обозначается -  $(\forall x)P(x)$

Высказывание  $(\forall x)P(x)$  считается *истинным*, если предикат  $P(x)$  тождественно истинный, а *ложным* – в противном случае.

# Квантор общности

Символ  $\forall x$  называется **квантором общности по переменной  $x$** , его читают так:

«для всех  $x$ »

«для каждого  $x$ »

«для любого  $x$ »

**Выражение**  $(\forall x)P(x)$  читается: «для всех  $x$ ,  $P(x)$ », или «для каждого  $x$ ,  $P(x)$ ».

**Например**,  $\forall x(x=x)$  – это истинное универсальное высказывание, а  $\forall x(x>2)$  – ложное универсальное высказывание.

Если  $P(x)$ - одноместный предикат, определенный на конечном множестве  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , то:

$$\forall P(x) \leftrightarrow [P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_m)]$$

# Квантор общности

Таким образом, **квантор общности**  
МОЖНО ПОНИМАТЬ как *оператор*  
*конъюнкции по квантифицируемой*  
*переменной.*

# Квантор существования

Экзистенциальным высказыванием, соответствующим предикату  $P(x)$ , называется высказывание **«существует элемент множества  $M$ , удовлетворяющий предикату  $P(x)$ »**, которое обозначается  $\exists x P(x)$  и считается *истинным*, если предикат  $P(x)$  выполнимый, а *ложным* – в противном случае.

Символ  $\exists x$  называют *квантором существования*, а выражение  $\exists x$ , в котором этот квантор предшествует переменной  $x$ , читают так:

**«существует  $x$  такой, что...»**

**«для некоторого  $x$ , ...»**

# Квантор существования

## НАПРИМЕР

$\exists x(x > 2)$  – истинное *экзистенциальное высказывание*

$\exists x(x = x + 1)$  – ложное *экзистенциальное высказывание.*

Если  $P(x)$ - одноместный предикат, определенный на конечном множестве  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , то

$$\exists P(x) \leftrightarrow [P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_m)]$$

# Квантор существования

Таким образом, **квантор существования** можно понимать как оператор дизъюнкции по квантифицируемой переменной.

# Примеры

Примеры записей формул и их словесные выражения:

$\forall x(x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1))$  Для всех  $x$  выполняется предикат...

$\exists x(|x| \leq 0)$  Для некоторого  $x$ , справедливо неравенство...

$\forall x(|x| > 0)$  Для всех  $x$ , справедливо.....

$\exists y(5 + y = 5)$  Существует  $y$  такой, что  $5+y=5$

$\forall y(y^2 + y + 1 > 0)$  Для всех  $y$  выполняется предикат

$\exists y(y^2 + y + 1 = 0)$  Существует  $y$ , что ....

$\exists x(x^3 < x^2)$  Для некоторого  $x$ , справедливо

# Формулы логики предикатов

В логике предикатов имеется следующая символика:

**Символы  $p, q, r, \dots$**  - переменные высказывания, принимающие два значения: 1 - истина, 0 - ложь.

**Предметные переменные** –  $x, y, z, \dots$ , которые пробегают значения из некоторого множества  $M$ ;

$x^0, y^0, z^0$  – предметные константы, т. е. значения предметных переменных.

$P(\cdot), Q(\cdot), F(\cdot), \dots$  - одноместные предикатные переменные;

$Q(\cdot, \cdot, \dots, \cdot), R(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$  –  $n$ -местные предикатные переменные.

$P_0(\cdot), Q_0(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$  – символы постоянных предикатов.

**Символы логических операций:**  $\wedge, \vee, \rightarrow,$

**Символы кванторных операций:**  $\forall x,$

$\exists x$   
**Вспомогательные символы:** скобки, запятые.

# Формулы логики предикатов

**Предметная переменная** называется **свободной**, если она не следует непосредственно за квантором и не входит в область действия квантора по этой переменной, все другие переменные, входящие в формулу, называются **связанными**.

$$\exists y \forall z (P(x,y) \Leftrightarrow P(y,z))$$

Формулой логики предикатов являются:

Каждая предикатная буква и предикатная буква со следующими за ней в скобках предметными переменными.

Выражения вида  $F \wedge G$ ,  $F \vee G$ ,  $\neg G$ ,  $F \Rightarrow G$ ,  $F \Leftrightarrow G$ ,  $(\forall y)F$ ,  $(\exists y)G$ , где  $F$  и  $G$  – формулы логики предикатов, переменная  $y \in M$ .

# Формулы логики предикатов

Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является **формулой (элементарной)**.

Если  $F(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$  –  $n$ -местная предикатная переменная или постоянный предикат, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – предметные переменные или предметные постоянные (не обязательно все различные), то  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  **есть формула**. Такая формула называется **элементарной**, в ней предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.

# Формулы логики предикатов

Если  $A$  и  $B$  – формулы, причем, такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то слова  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \square B$  есть **формулы**. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободны, являются **свободными**, а те, которые были связанными, являются **связанными**.

Если  $A$  – формула, то  $\neg A$  – **формула**, и характер предметных переменных при переходе от формулы  $A$  к формуле  $\neg A$  не меняется.

# Формулы логики предикатов

Если  $A(x)$  – формула, в которую предметная переменная  $x$  входит свободно, то слова  $\forall xA(x)$  и  $\exists xA(x)$  являются **формулами**, причем, предметная переменная входит в них связано.

Всякое слово, отличное от тех, которые названы формулами в предыдущих пунктах, **не является формулой**.

# Формулы логики предикатов

Например, если  $P(x)$  и  $Q(x,y)$  – одноместный и двухместный предикаты, а  $q, r$  – переменные высказывания, то формулами будут, выражения:

$$q, P(x), P(x) \wedge Q(x^0, y), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y), \overline{(Q(x, y) \vee q)} \rightarrow r$$

Не является формулой, например, слово:  $\forall x Q(x, y) \rightarrow P(x)$

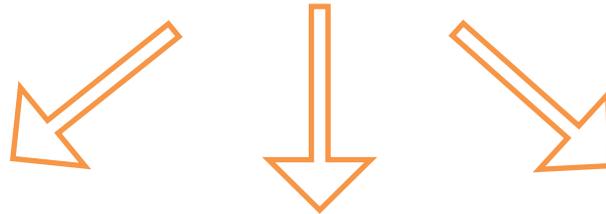
Здесь нарушено условие п.3, так как формулу  $\forall x Q(x, y)$  переменная  $x$  входит связанно, а в формулу  $P(x)$  переменная  $x$  входит свободно.

*Из определения формулы логики предикатов ясно, что всякая формула алгебры высказываний является формулой логики предикатов.*

# Интерпретация формулы предикатов

*Интерпретацией формулы исчисления предикатов* называется конкретизация множеств, из которых принимают значения предметные переменные и конкретизация отношений и соответствующих множеств истинности для каждой предикатной буквы.

# Формулы исчисления предикатов



*тождественно истинные* при любой интерпретации, т.е. общезначимые

*тождественно ложные* при любой интерпретации, т.е. противоречивые

*выполнимые* (формулы, истинность которых зависит от интерпретации)

# Значение формулы логики предикатов

В качестве примера рассмотрим формулу

$$\exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$$

В формуле двухместный предикат  $P(x, y)$  определен на множестве  $M \times M$ , где  $M = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ , т.е.  $M \times M = N \times N$ .

В формулу входит переменный предикат  $P(x, y)$ , предметные переменные  $x, y, z$ , две из которых  $y$  и  $z$  – связанные кванторами, а  $x$  – свободная.

Возьмем за конкретное значение предиката  $P(x, y)$  фиксированный предикат  $P^0(x, y)$ : « $x < y$ », а свободной переменной  $x$  придадим значение  $x^0 = 5 \in M$ .

Тогда при значениях  $y$ , меньших  $x^0 = 5$ , предикат  $P^0(x^0, y)$  принимает значение “ложь”, а импликация  $P(x, y) \rightarrow P(y, z)$  при всех  $z \in M$  принимает значение “истина”, т.е. высказывание имеет значение “истина”.

# Равносильные формулы логики предикатов

## Определение 1.

Две формулы логики предикатов  $A$  и  $B$  называются **равносильными** на области  $M$ , если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области  $M$ .

## Определение 2.

Две формулы логики предикатов  $A$  и  $B$  называются **равносильными**, если они равносильны на всякой области.

# Равносильные формулы логики предикатов

Пусть  $A(x)$  и  $B(x)$  – переменные предикаты, а  $C$  – переменное высказывание (или формула, не содержащая  $x$ ). Тогда имеют место следующие равносильности:

1.  $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$ .
2.  $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$ .
3.  $\forall x A(x) \equiv \overline{\overline{\exists x A(x)}}$ .
4.  $\exists x A(x) \equiv \overline{\overline{\forall x A(x)}}$ .
5.  $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$
6.  $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$ .
7.  $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$
8.  $C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x [C \rightarrow B(x)]$
9.  $\forall x [B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$ .
10.  $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ .
11.  $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$ .
12.  $\exists x [C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$ .
13.  $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y [A(x) \wedge B(y)]$ .
14.  $\exists x [C \rightarrow B(x)] \equiv C \rightarrow \exists x B(x)$ .
15.  $\exists x [B(x) \rightarrow C] \equiv \forall x B(x) \rightarrow C$ .

# Равносильные формулы логики предикатов

## Пример

Предикат  $Мать(x,y)$  означает, что  $x$  является матерью для  $y$ .

Тогда  $\forall y \exists x Мать(x,y)$  означает, что *у каждого человека есть мать*, - истинное утверждение.

$\exists x \forall y Мать(x,y)$  означает, что *существует мать всех людей*, что является другим утверждением, истинность которого зависит от множества значений, которые могут принимать  $y$ : если это множество братьев и сестер, то оно истинно, а в противном случае оно ложно.

Таким образом, перестановка кванторов всеобщности и существования может изменить смысл и значение выражения.

# ЗАКОНЫ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ (общезначимые формулы логики предикатов)

$$16. \overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}.$$

$$17. \overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}.$$

$$18. \forall x P(x) \equiv \overline{\exists x \overline{P(x)}}.$$

$$19. \exists x P(x) \equiv \overline{\forall x \overline{P(x)}}.$$

$$20. \forall x [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x).$$

$$21. \exists x [P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

$$22. \forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y).$$

$$23. \exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y).$$

$$24. \exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y).$$

$$25. \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)].$$

$$26. \exists x [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x).$$

$$27. \forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)].$$

$$28. \forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x).$$

$$29. \forall x [P(x) \Rightarrow P(y)] \equiv \exists x P(x) \Rightarrow P(y).$$

$$30. P(y) \Rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x [P(y) \Rightarrow P(x)].$$

$$C \Rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x [C \Rightarrow P(x)].$$

$$31. C \wedge \forall x P(x) \equiv \forall x [C \wedge P(x)].$$

$$32. C \vee \forall x P(x) \equiv \forall x [C \vee P(x)].$$

$$33. C \Rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x [C \Rightarrow P(x)].$$

$$34. \exists x [C \vee P(x)] \equiv C \vee \exists x P(x).$$

$$35. \exists x [C \wedge P(x)] \equiv C \wedge \exists x P(x).$$

$$36. \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv \exists x \exists y [P(x) \wedge Q(y)].$$

$$37. \exists x [P(x) \Rightarrow C] \equiv \forall x P(x) \Rightarrow C.$$

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \equiv$$

$$38. \equiv \forall x [P(x) \vee \forall y Q(y)] \equiv \forall x \forall y [P(x) \vee Q(y)].$$

$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \equiv$$

$$39. \equiv \exists x [P(x) \wedge \exists y Q(y)] \equiv \exists x \exists y [P(x) \wedge Q(y)].$$

# Упражнение

Найти отрицание следующих формул

А)  $\overline{\forall x(P(x) \wedge Q(x))}$ ;

Б)  $\overline{\exists x(P(x) \vee Q(x))}$ ;

В)  $\overline{\exists x \exists y(R(x, y) \rightarrow L(x, y))}$

А)  $\overline{\forall x(P(x) \wedge Q(x))} \equiv \exists x(\overline{P(x) \wedge Q(x)}) \equiv \exists x(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)})$ ;

Б)  $\overline{\exists x(P(x) \vee Q(x))} \equiv \forall x(\overline{P(x) \vee Q(x)}) \equiv \forall x(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)})$ ;

В)  $\overline{\exists x \exists y(R(x, y) \rightarrow L(x, y))} \equiv \exists x \exists y(\overline{R(x, y) \rightarrow L(x, y)}) \equiv \exists x \forall y(\overline{R(x, y) \rightarrow L(x, y)}) \equiv$   
 $\equiv \exists x \forall y(\overline{R(x, y) \vee L(x, y)}) \equiv \exists x \forall y(\overline{R(x, y)} \wedge \overline{L(x, y)})$

# Упражнение

Доказать равносильность

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

Пусть предикаты  $A(x)$  и  $B(x)$  тождественно ложны. Тогда будет ложным и предикат  $A(x) \vee B(x)$

При этом будут ложными высказывания

$$\exists x(A(x) \vee B(x))$$

$$\exists xA(x) \exists xB(x)$$

Пусть хотя бы один из предикатов (например,  $A(x)$ ) не тождественно ложный. Тогда будет не тождественно ложным и предикат  $A(x) \vee B(x)$

При этом будут истинными высказывания  $\exists xA(x)$   $\exists x(A(x) \vee B(x))$

Значит, будут истинными и исходные формулы

$$\text{Следовательно: } \exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

# Самостоятельно

Для более подробного изучения материала  
самостоятельно читаем:

УЧЕБНИК: «Математическая логика и теория  
алгоритмов»,  
автор Игошин В.И.

Страницы 157-164

Страницы 165-178

Страницы 178-183

# Домашнее задание

Доказать равносильность  $C \wedge \forall x A(x) \equiv \forall x (C \wedge A(x))$

Доказать что формула является общезначимой

$$A \equiv V(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$$

Доказать что формула является противоречивой

$$A \equiv \exists x ((F(x) \rightarrow \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \rightarrow F(x)))$$