

Механика твёрдого тела

лекция 4

Физическим телом называется система взаимодействующих частиц массой Δm_i и объемом ΔV_i , непрерывно заполняющих объем V .

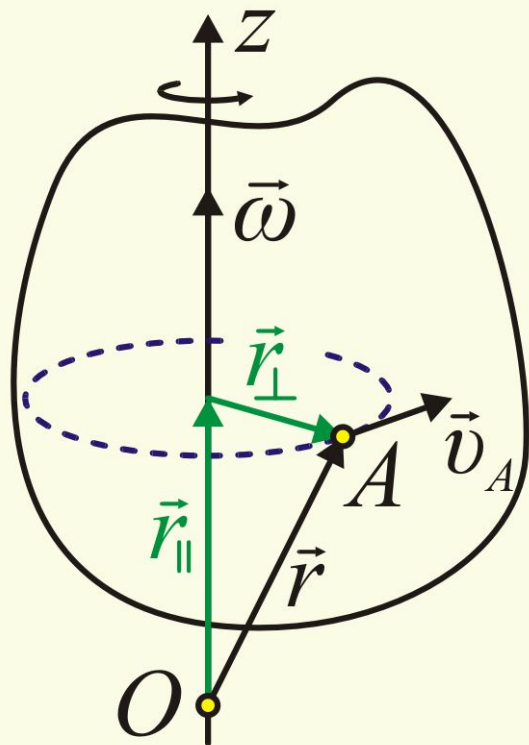
Абсолютно твердое тело (АТТ)
это система м.т. (частиц), расстояние между которыми постоянно.
т.е. это тело, деформациями которого, в условиях данной задачи, можно пренебречь.

§§ Плоское движение

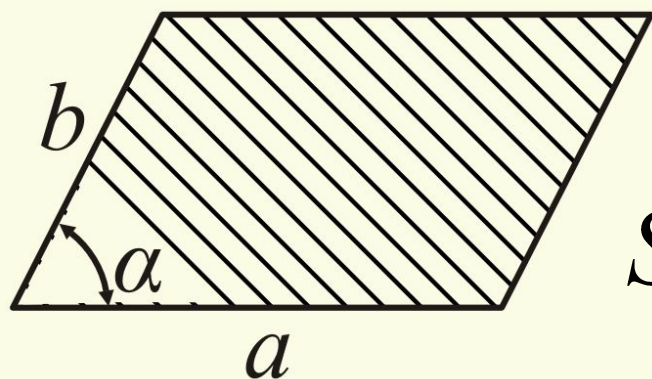
Поступательным называется движение, при котором любая из прямых, связанных сдвигающимся телом, остается параллельной ее начальному направлению.

Вращательным называется движение, при котором все точки тела двигаются по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью** **вращения**.

Скорость точки

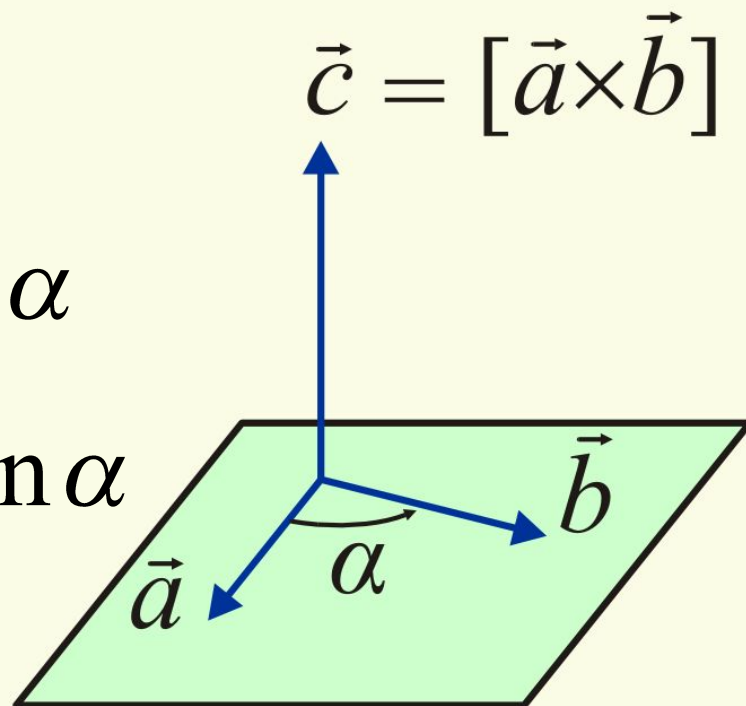


$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= [\vec{\omega} \times \vec{r}] = [\vec{\omega} \times (\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp})] \\ &= [\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}] = [\vec{\omega} \times \vec{R}]\end{aligned}$$



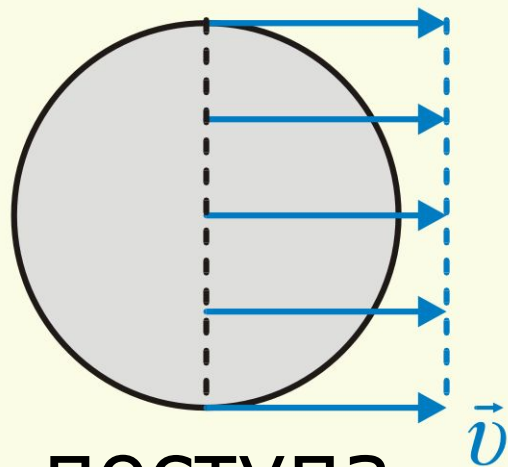
$$c = ab \sin \alpha$$

$$S_{ab} = ab \sin \alpha$$

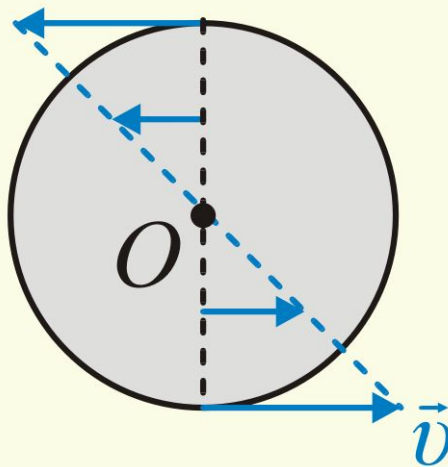


Плоским называется движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Поступательное движение происходит перпендикулярно оси вращения.

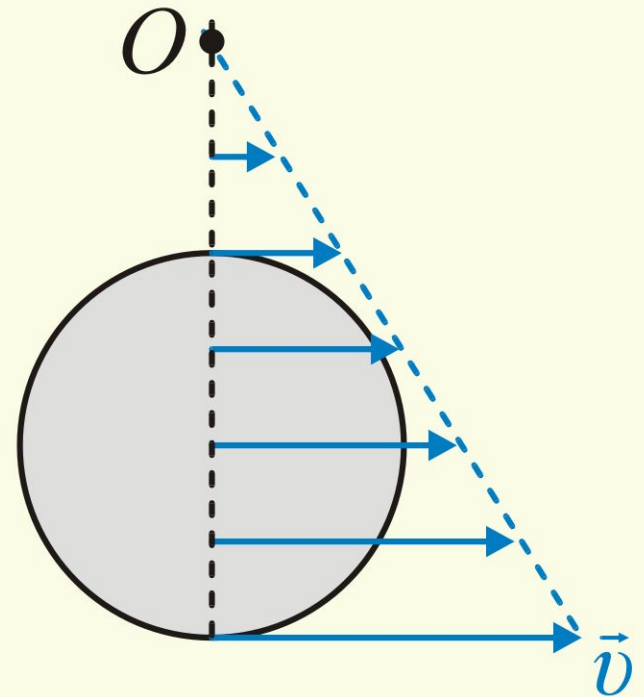
$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$



поступа-
тельное.



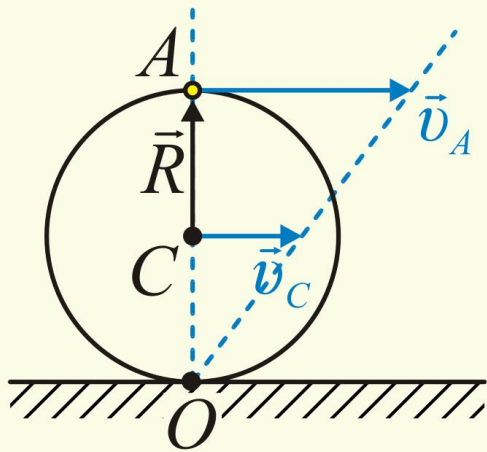
вращательное



плоское

При плоском движении т.т. может быть переведено из одного положения в другое путем поворота относительно **МГНОВЕННОЙ ОСИ**.

Пример: качение цилиндра

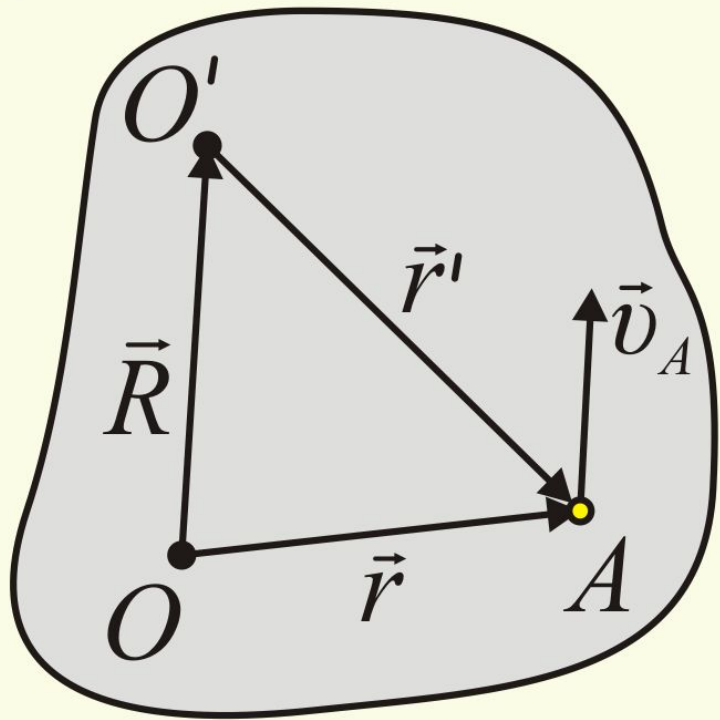


$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + [\vec{\omega} \times \vec{R}]$$

$$\vec{v}_A = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

С течением времени мгновенная ось непрерывно перемещается как в теле, так и в пространстве.

§§ Общий случай движения



Скорость произвольной точки:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$\vec{\omega}$ – угловая скорость относительно МОВ, проходящей ч/з $m.O$

Относительно другого начала:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{O'} + [\vec{\omega}' \times \vec{r}']$$

$$\cancel{\vec{v}_O} + [\cancel{\vec{\omega}} \times \cancel{\vec{r}}] = \vec{v}_{O'} + [\vec{\omega}' \times \vec{r}']$$

$$\parallel$$

$$\cancel{\vec{v}_O} + [\vec{\omega} \times \vec{R}] = [\vec{\omega} \times (\cancel{\vec{r}} - \vec{r}')]]$$

следовательно:

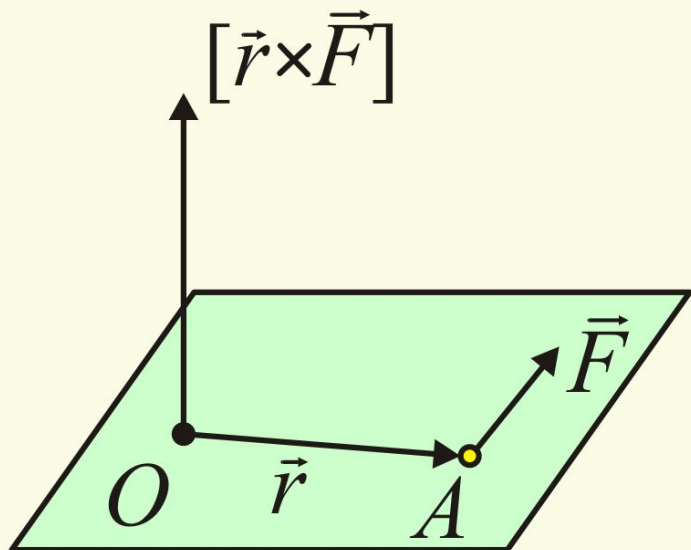
$$[\vec{\omega} \times \vec{r}'] = [\vec{\omega}' \times \vec{r}']$$

т.к. $\vec{r}'$ – произволен, то

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}'}$$

– **не зависит** от выбора $m.O$.

§§ Момент силы



$m.A$ – точка приложения
силы

$m.O$ – начало (центр)

Моментом силы относительно $m.O$

называется векторное произведение
радиус-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Свойства:

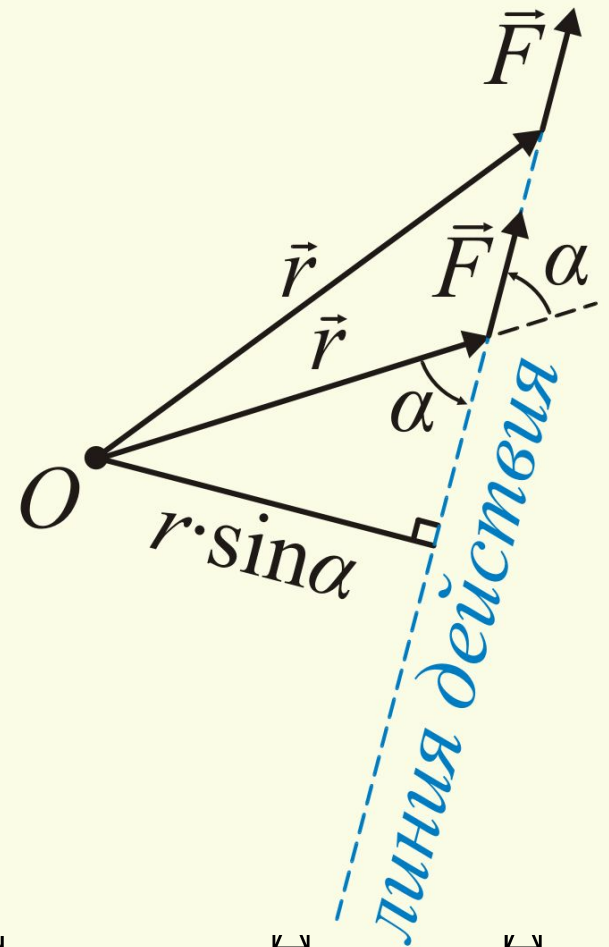
- 1) при переносе силы вдоль **линии** ее **действия** момент силы не изменяется

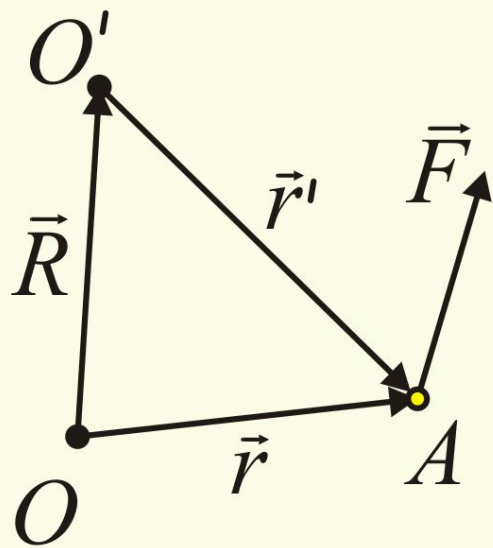
$$M = rF \sin \alpha = \text{const}$$

- 2) если $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)] = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

т.е. момент равнодействующей силы равен сумме моментов сил.



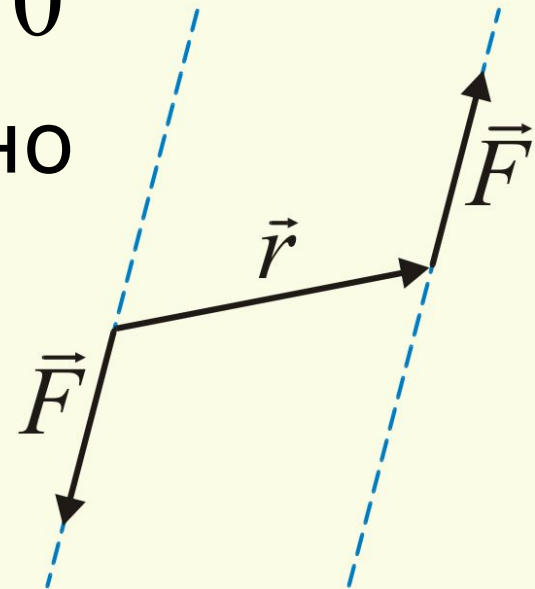


Вычислим момент $\vec{M}'$ относительно нового начала

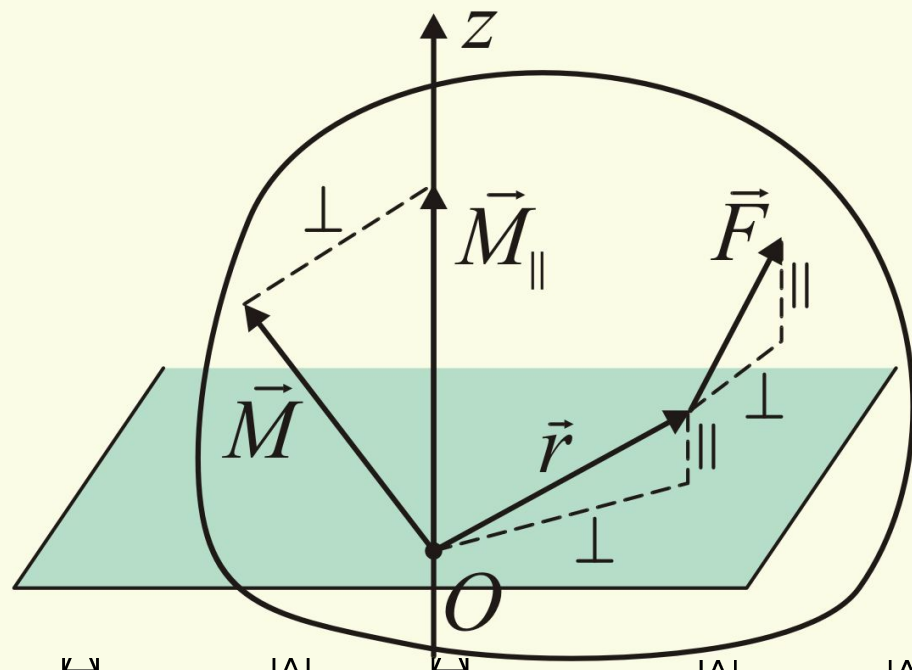
$$\begin{aligned}\vec{M}' &= [\vec{r}' \times \vec{F}] = [(\vec{r} - \vec{R}) \times \vec{F}] \\ &= \vec{M} - [\vec{R} \times \vec{F}]\end{aligned}$$

$\vec{M} = \vec{M}'$ при $\vec{R} \parallel \vec{F}$ (т.е. смещение вдоль линии действия силы) и $\vec{F} = 0$

две равные и противоположно направленные силы, линии действия которых смещены одна относительно другой, называются **парой сил.**



§§ Момент относительно оси



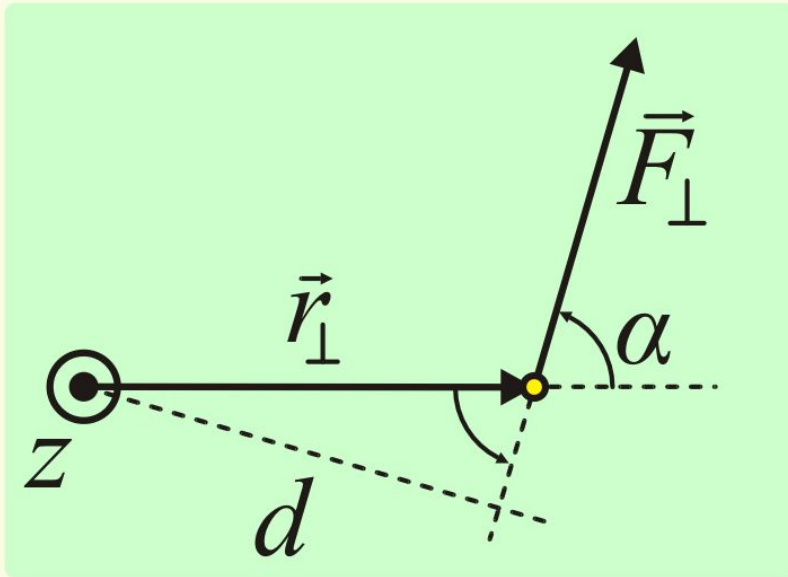
Будем раскладывать

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= [\vec{r} \times \vec{F}] = [(\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}) \times (\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel})] \\ &= \underbrace{[\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{\parallel}} + \underbrace{[\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\perp}]}_{\vec{M}_{\perp}} + \underbrace{[\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}_{\parallel}]}_{0} \end{aligned}$$

$\vec{M}_{||} = \vec{M}_z = [\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}]$ – **момент силы**
относительно оси

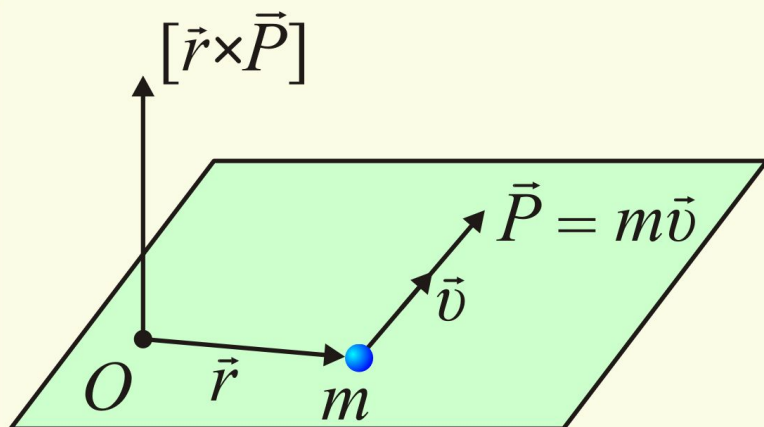


$$M_z = r_{\perp} F_{\perp} \sin \alpha$$
$$= F_{\perp} d$$

d – **плечо силы**

т.е. момент может быть определен как произведение перпендикулярной составляющей силы на кратчайшее расстояние до линии действия (плечо)

§§ Момент импульса



Моментом импульса

м.т. относительно $m.O$ называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{P}$

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}]$$

Вычислим производную по времени, считая начало неподвижным:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \right] = [\vec{v} \times \vec{P}] + [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

– **уравнение моментов**

производная по времени м.и. м.т.
относительно неподвижного начала
равна моменту действующей силы
относительно того же начала

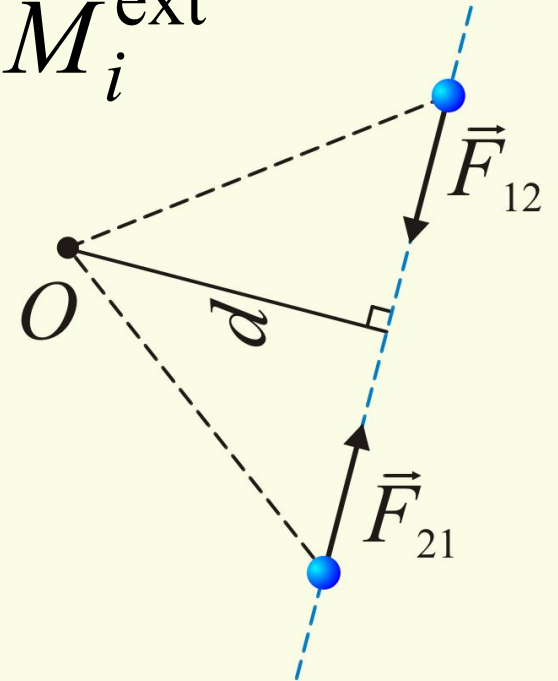
Рассмотрим систему из N частиц

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^{\text{int}} + \vec{M}_i^{\text{ext}}$$

суммируя уравнения, получаем:

$$\sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i^{\text{int}} + \sum \vec{M}_i^{\text{ext}}$$

$\swarrow$
 0



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

производная по времени м.и. с.м.т.
относительно неподвижного начала
равна геометрической сумме моментов
внешних сил относительно этого начала

Закон сохранения момента импульса

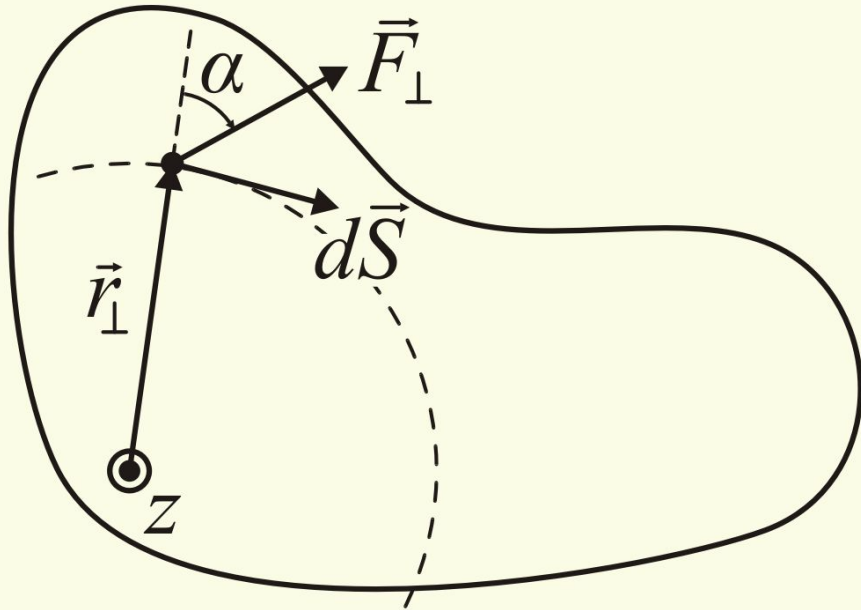
если момент внешних сил относительно неподвижного начала равен нулю, то м.и. системы относительно того же начала остается постоянным во времени

в проекции на ось:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{ext}}$$

если момент внешних сил относительно оси равен нулю, то м.и. системы относительно той же оси остается постоянным.

§§ Работа и кин. энергия



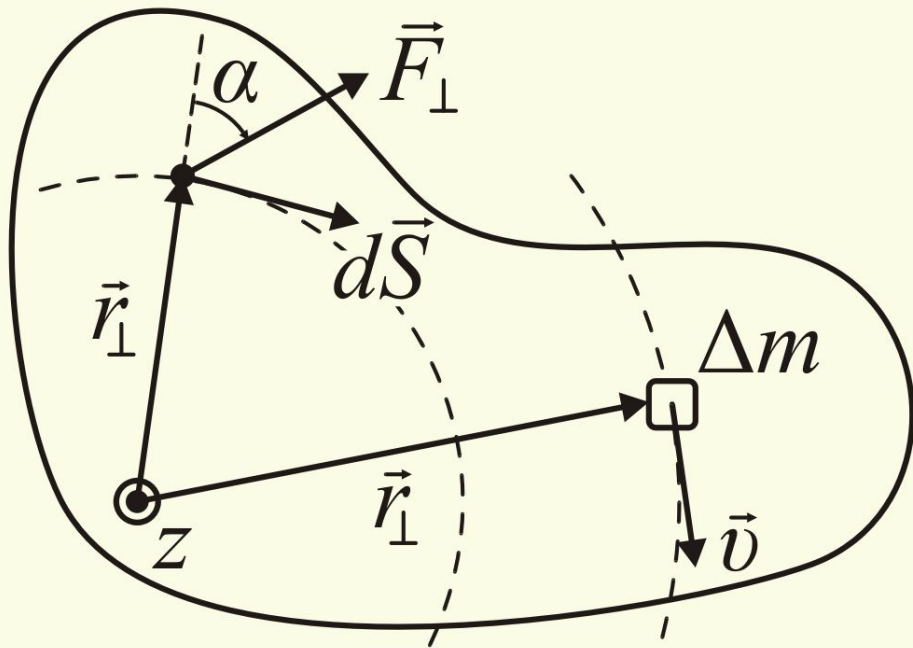
$$dA = (\vec{F}_\perp \cdot d\vec{S})$$

$$= F_\perp r_\perp d\varphi \sin \alpha$$

$$= M_z d\varphi$$

При повороте тела совершается работа:

$$dA = (\vec{M} \cdot d\vec{\varphi})$$



Вычислим
кинетическую
энергию
вращающегося
тела.

$$E_k = \sum \Delta E_k = \sum \frac{\Delta m v^2}{2} = \left| v_i = \omega r_{\perp i} \right|$$

$$= \left[\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right] \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

$J_z = m r_{\perp}^2$ – момент инерции м.т. массой m

$r_{\perp}$ – расстояние до оси z

$J_z = \sum m_i r_{\perp i}^2$ – момент инерции с.м.т.

Величина J_z – является мерой инерции тела (точки) при вращении.

$E_k = \frac{J_z \omega^2}{2}$ – для вращательного движения

$E_k = \frac{m v_O^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2}$ – для плоского движения

§§ Уравнение динамики

Пусть м.т. двигается по окружности:

$$L = r_{\perp} m v = m r_{\perp}^2 \omega = J \omega \quad \boxed{\overset{\Delta}{L} = J \overset{\Delta}{\omega}}$$

подставим в уравнение моментов

$$\boxed{\frac{d}{dt}(J \overset{\Delta}{\omega}) = \overset{\Delta}{M}}$$

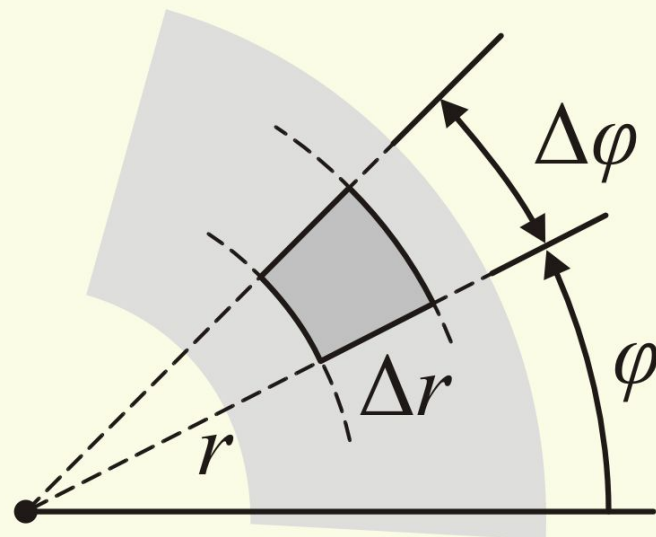
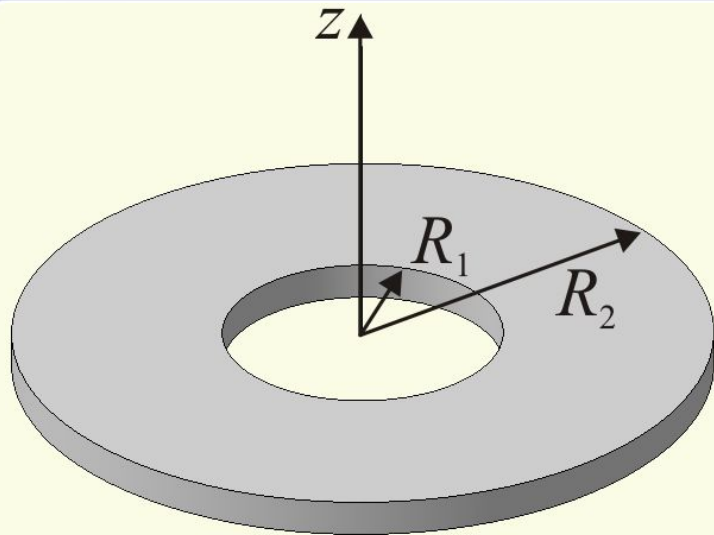
$$\boxed{J \frac{d \overset{\Delta}{\omega}}{dt} = \overset{\Delta}{M}}$$

$$\boxed{J \overset{\Delta}{\varepsilon} = \overset{\Delta}{M}}$$

для неизменной
с.м.т. (атт)

– ЭТО **основное уравнение динамики**
вращательного движения (ОУДВД)

§§ Расчет момента инерции



Выделим на кольце малый элемент

$\Delta S = r \Delta \varphi \Delta r$ – площадь элемента

$$\Delta m = m \frac{\Delta S}{S} = \boxed{\frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}} r \Delta \varphi \Delta r \text{ – его масса}$$

$$\Delta J_z = \Delta m r^2 = \boxed{\times} r^3 \Delta \varphi \Delta r$$

$$J_z = \sum \Delta J_z = \boxed{\times} \sum_{0 < \varphi < 2\pi} \Delta \varphi \sum_{R_1 < r < R_2} r^3 \Delta r$$

$$= \boxed{\times} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

$$= \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4} = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)$$

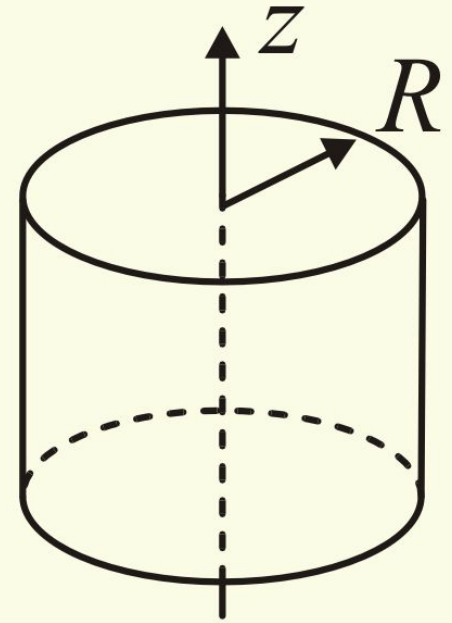
Таблица моментов инерции

Однородный диск (цилиндр)

m – масса, R – радиус,

$$R_1 = 0, R_2 = R$$

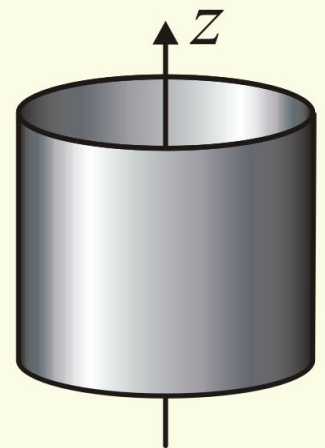
$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$



Тонкое кольцо (трубка):

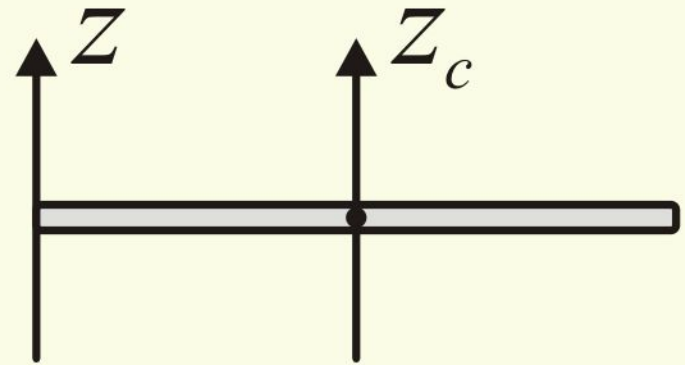
$$R_1 = R_2 = R \Rightarrow$$

$$J_z = m R^2$$



Однородный стержень:

m – масса, L – длина



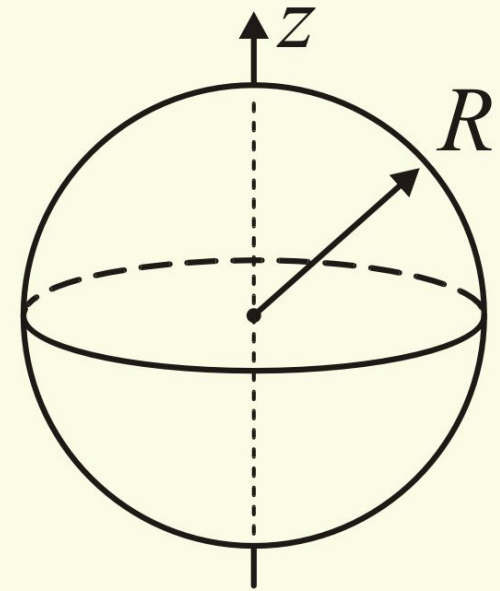
$$J_z = \frac{1}{3}mL^2$$

$$J_{zc} = \frac{1}{12}mL^2$$

Однородный шар:

m – масса, R – радиус

$$J_z = \frac{2}{5}mR^2$$



Замечания:

- 1) момент инерции для тел простой формы:

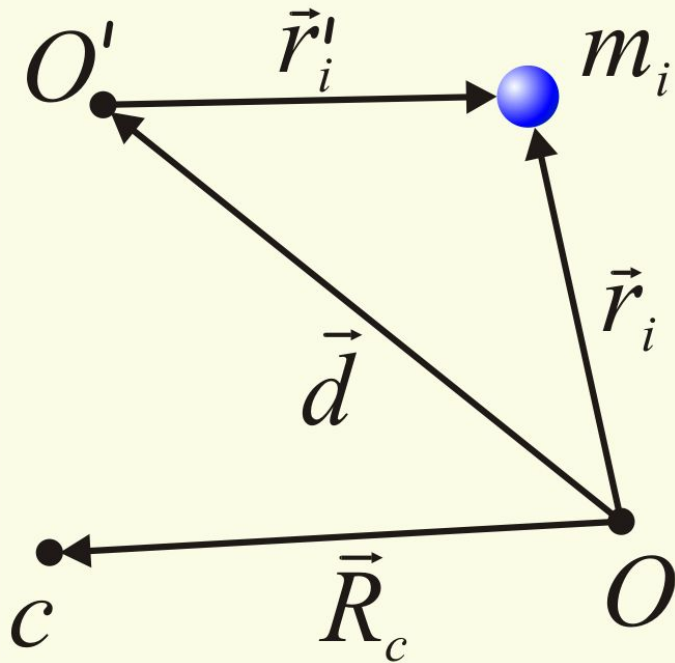
$$J_z = \beta m x^2$$

β – **зависит** от выбора оси z

x – характерный размер

- 2) в справочниках приведены моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс

§§ Теорема Штейнера



$m.O$ – начало (центр)
 ось $z \perp$ плоскости рис.
 r_i – расстояние **до оси**

$$J_O = \sum m_i r_i^2$$

Пусть O' – новый центр, тогда

$$J_{O'} = \sum m_i r_i'^2 = \sum m_i (r_i - d)^2$$

$$= \sum m_i r_i^2 - 2 \left(\sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{d} \right) + \sum m_i d^2$$

$$m \vec{R}_c$$

$$= J_O - 2m(\vec{R}_c \cdot \vec{d}) + md^2$$

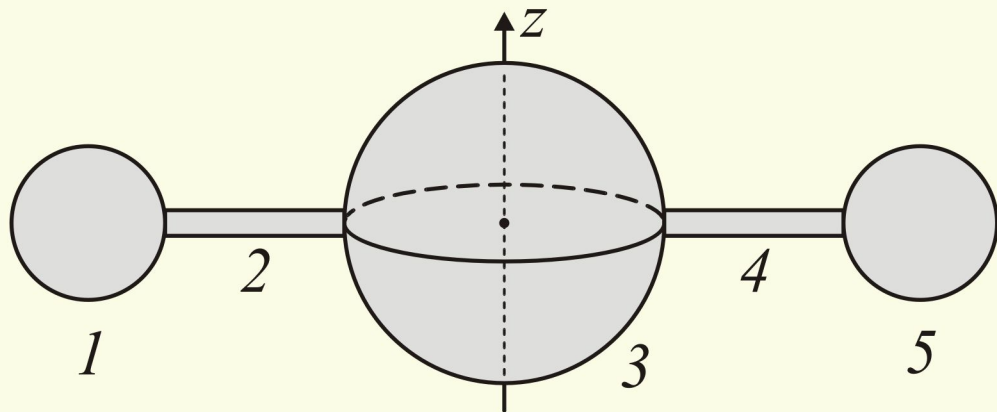
Если $\vec{R}_c = 0$ (ось проходит через центр инерции системы), то

$$J_{O'} = J_c + md^2$$

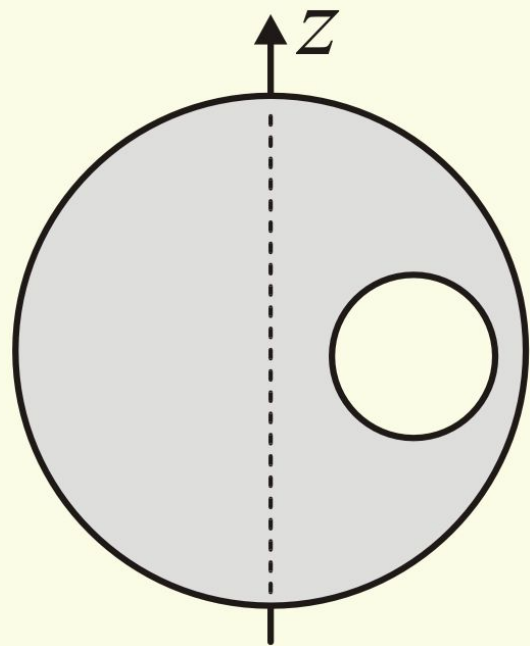
– теорема

Гюйгенса-Штейнера

Замечание: о вычислении J
для составных тел



$$J_z = \sum J_i$$



$$J = J_{\text{полн}} - J_{\text{отв}}$$

т.е. всегда можно
воспользоваться
свойством **линейности**
операции интегрирования