

Лекция N2

Тема:

**Матрицы: элементарные
преобразования строк, приведение к
ступенчатому виду и виду Гаусса.
Ранг матрицы**

Опр. 1 Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

- 1) Перестановка местами двух строк**
- 2) Замена строки суммой этой строки и некоторой другой, умноженной на число**
- 3) Умножение строки на ненулевое число α**

Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов.

Опр.2 Опорным элементом строки называется первый слева ненулевой элемент этой строки.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

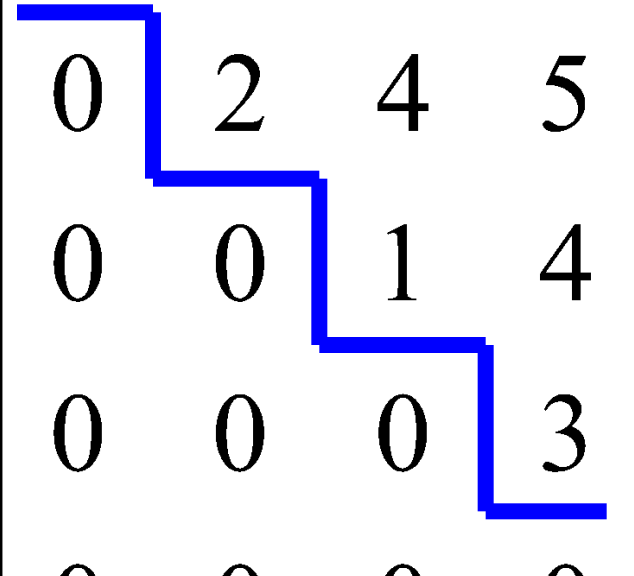
**① ② ④ – опорные
элементы**

У нулевой строки опорного элемента нет

Опр. 3 Матрица называется
ступенчатой, если опорный элемент в
каждой последующей строке
расположен правее, чем в предыдущей.

**Если строка нулевая, то все
последующие строки также нулевые.**

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


Опр. 4 Матрица имеет **вид Гаусса**, если

- 1) она ступенчатая
- 2) все опорные элементы равны единице
- 3) над опорными элементами только нули

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 4 Любая матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

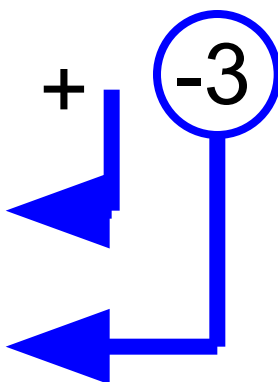
Опр. 5 Строки и столбцы матрицы, в которых расположены ее опорные элементы, называются **базисными.**

Опр. 6 Рангом матрицы называется число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы.

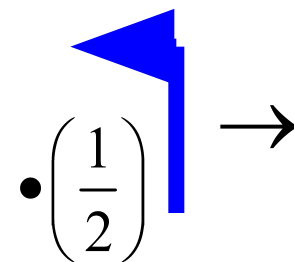
Обозначается $r(A)$.

Пример.

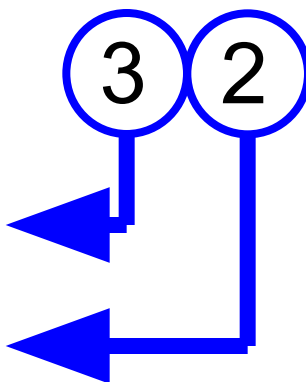
Привести матрицу к ступенчатому виду и найти ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$


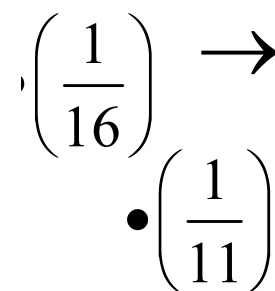
A diagram consisting of a blue line with two arrows pointing to the left. To the right of the line is a plus sign (+). Further right is a blue circle containing the number -3.



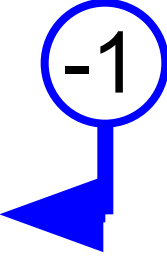
A diagram consisting of a blue line with an arrow pointing to the left, followed by a dot and a vector in parentheses: $\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. To the right of this is a right-pointing arrow $\rightarrow$.



A diagram consisting of two blue circles containing the numbers 3 and 2. Below the circle with 3 is a blue line with an arrow pointing to the left. Below the circle with 2 is a blue line with an arrow pointing to the left.



A diagram consisting of a vector in parentheses $\begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$, followed by a right-pointing arrow $\rightarrow$, and then a dot followed by another vector in parentheses $\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


Решение систем линейных уравнений.

Метод Гаусса

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 1, \\ -x + y - z = -1. \end{cases}$$

1) Составим расширенную матрицы системы

$$A | b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

2) Приведем матрицу к ступенчатому виду

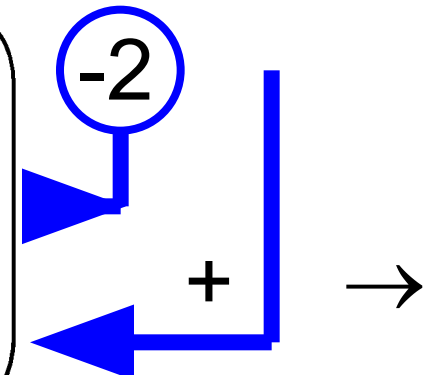
$$A|b = \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$


Diagram illustrating row operations on the augmented matrix:

- A blue circle containing -2 has an arrow pointing to the second row, indicating the operation $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$.
- A blue arrow with a $+$ sign points from the first row to the third row, indicating the operation $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$.

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow$$


3) Составим новую систему

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z + y = 3, \\ -z - 3y = 5, \\ y = 1. \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{x = 0}; \\ -z - 3 = -5; \quad \underline{z = 2}; \\ \underline{y = 1}; \end{array}$$

Система имеет единственное решение

Можно было продолжить преобразования, и привести систему к виду Гаусса.

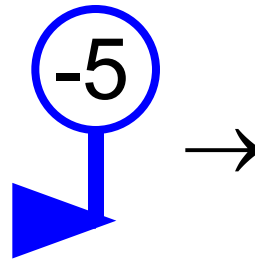
Теорема Кронекера-Капелли.

- 1) Если $r(A) \neq r(A | b)$, то система не имеет решения
- 2) Если $r(A) = r(A | b) = n$, где n - число неизвестных, то система имеет единственное решение
- 3) Если $r(A) = r(A | b) \neq n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Примеры

Пример 1. Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 5x + 10y = 20. \end{cases}$$



Система имеет бесконечное множество решений. Найдем число свободных неизвестных $k = n - r = 2 - 1 = 1$.

Базисная неизвестная x , свободная y .

$$x + 2y = 4.$$

**Обозначим свободную неизвестную $y = c$.
Получим $x = 4 - 2c$.**

Ответ: $(4 - 2c, c)$, где $c \in (-\infty, +\infty)$.

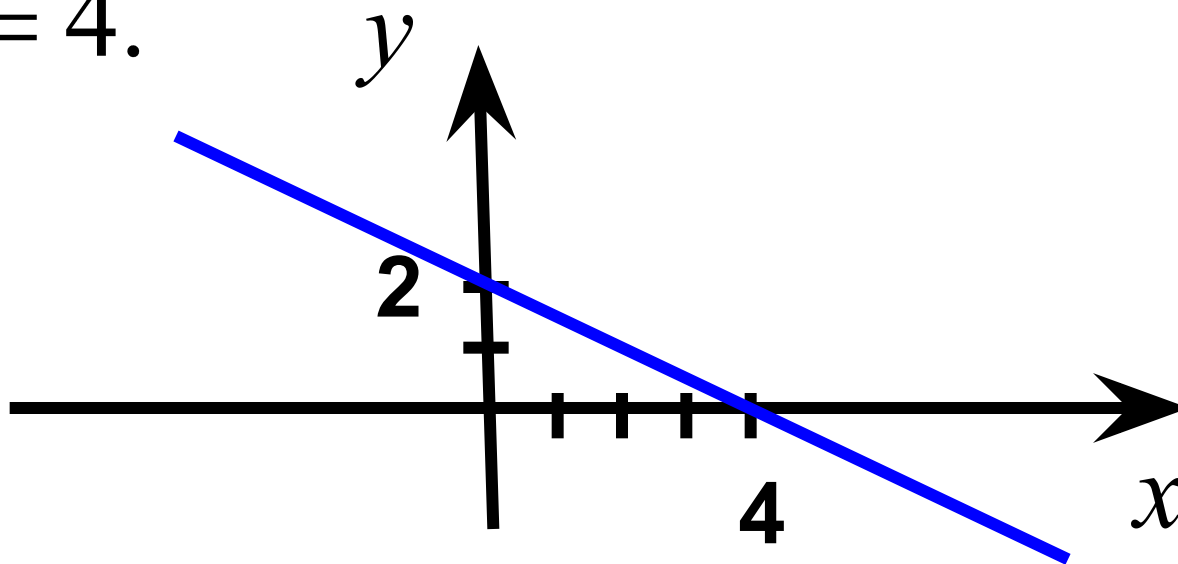
**В этом примере система имеет
бесконечное множество решений.**

Запишем некоторые из них:

$$c = 0 \Rightarrow (4; 0); \quad c = 1 \Rightarrow (2; 1).$$

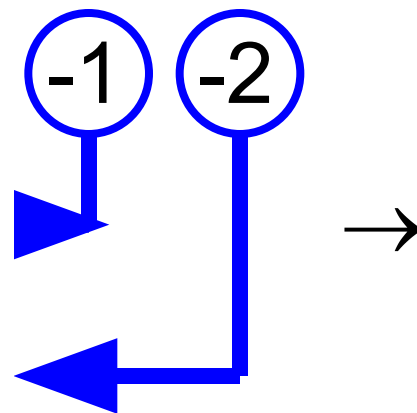
Все решения являются точками прямой

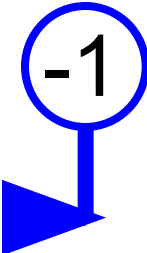
$$x + 2y = 4.$$

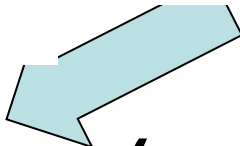


Пример 2. Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ x - 5y - z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = -1. \end{cases}$$



$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -7 & -4 & -5 \end{array} \right)$$




Система несовместна (по теореме Кронекера-Капелли)

Мы рассмотрели два метода решения систем линейных уравнений:

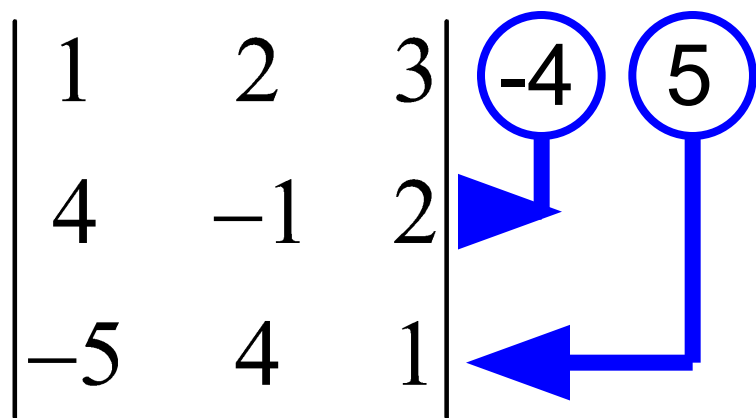
1) Метод Крамера

2) Метод Гаусса

Метод Крамера предполагает вычисление определителей. Мы вычисляли определители 3-его порядка разложением по элементам первой строки.

Пример.

Способ 1.



Способ 2.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & 1 & -5 & 4 \end{array} \right| =$$

Свойства определителей

- 1) Определитель не изменится, если поменять строки на соответствующие столбцы**
- 2) Если у определителя 2 одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.**
- 3) Если у определителя нулевая строка или столбец, то он равен нулю.**

Свойства определителей

- 4) Если две строки (столбца) поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.**
- 5) Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя.**
- 6) Определитель не изменится, если к элементам строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число.**

Пример.

Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 128 & 2009 \end{vmatrix} =$$

(т.к. две одинаковые строки)