Векторный анализ

Лекция 7

§ 7. Алгебраические структуры

Пусть дано некоторое множество $X \neq \varnothing$.

Отображение ω: $X^n \to X$, где $n \in \mathbb{N}$, называется n-арной алгебраической операцией на X.

При $n = 2$ операция называется бинарной,

при $n = 1$ – унарной,

при $n = 0$ – нульарной (означает фиксирование некоторого элемента в X).

Алгебраическую операцию на множестве X обозначают специальным символом: $*$, $\times$, $\cdot$, $+$, $-$

и т. п.

Примеры алгебраических операций

1. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Действия с натуральными числами: сложение, вычитание, умножение, деление и т. д.

Операции сложения, умножения – бинарные алгебраические операции.

Операции вычитания, деления не являются алгебраическими операциями, т. к. результат операции может и не принадлежать множеству $\mathbb{N}$.

2. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ алгебраическими (бинарными) операциями являются операции сложения, вычитания, умножения. Операция деления не является алгебраической операцией.

3. Все арифметические операции на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ являются алгебраическими операциями.

4. На множестве геометрических векторов V операции – сложение, вычитание, векторное умножение являются бинарными алгебраическими операциями; умножение вектора на число – унарной алгебраической операцией.

5. На множестве $M_{n\times n}$ матриц размера n операции – сложение, вычитание, умножение матриц являются бинарными алгебраическими операциями; умножение матрицы на число – унарной алгебраической операцией.

Операция * на множестве X называется **коммутативной**, если $\forall a, b \in X \;\; a*b = b*a$.

Операция * называется **ассоциативной**, если

$\forall a, b, c \in X \qquad (a*b)*c = a*(b*c)$.

Пример

Операция сложения на множестве геометрических векторов V является и ассоциативной, и коммутативной;

операция вычитания на этом же множестве – неассоциативная и некоммутативная операция.

Алгебраическая структура – система, состоящая из множества элементов X и операций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, определенных на X.

Обозначение: $(X;\ f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Группоид – алгебраическая структура, определяемая одной бинарной операцией.

Группоид называется **коммутативным**, если бинарная операция коммутативна.

Полугруппа – группоид, операция которого ассоциативна, т.е. $\forall a,b,c \in X \;\; (a*b)*c = a*(b*c)$.

Элемент *e* группоида (X; *) называется **нейтральным** (единичным или единицей), если $\forall a \in X \;\; a*e = e*a = a$.

Элемент θ группоида (X; *) называется **нулевым** (нулем), если $\forall a \in X \; a*\theta = \theta*a = \theta$.

Полугруппа (X; *) с единицей *e* называется **группой**, если $\forall a \in X \; \exists b \in X : a*b = b*a = e,$ при этом *b* называется **обратным элементом** для элемента *a*.

Коммутативная группа чаще называется **абелевой**.

В абелевой группе операцию обычно называют **сложением**, нейтральный элемент – **нулем** и обратный элемент – **противоположным элементом**.

Примеры

1. ($\mathbb{N}$; +), ($\mathbb{N}$; ·) – коммутативные полугруппы.

2. ($\mathbb{Z}$; +), ($\mathbb{R}$; +), – абелевы группы.

3. ($\mathbb{Z}$; ·) – коммутативная полугруппа с единицей, но не группа.

Кольцо – алгебраическая структура K с двумя бинарными операциями, одна из которых называется сложением (+), другая – умножением (·), при этом должны выполняться следующие условия:

1. $\forall a,b \in K \quad (a+b)=(b+a);$
2. $\forall a,b,c \in K \quad a+(b+c)=(a+b)+c;$
3. $\exists!\theta \in K \quad \forall a \in K \quad a+\theta=\theta+a=a;$
4. $\forall a \in K \quad \exists!(-a) \in K \quad a+(-a)=(-a)+a=\theta;$
5. $\forall a,b,c \in K \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c;$
6. $\forall a,b,c \in K \quad (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$

Заметим, что (K; +) – абелева группа;

(K; ·) – полугруппа.

Примеры

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ – числовые кольца;

2. $P[x]$ – кольцо многочленов от неизвестного x с действительными коэффициентами.

3. Множество функций, определенных на $\mathbb{R}$, с операциями сложения и умножения.

4. $M_{n\times n}$ – множество матриц размера n.

Кольцо называется **коммутативным**, если операция умножения коммутативна.

Коммутативное кольцо *P*, в котором есть единица и любой ненулевой элемент имеет обратный, называется **полем**.

Аксиомы поля:

А. Аксиомы сложения.

1. $\forall a, b \in P \quad a+b=b+a;$
2. $\forall a, b, c \in P \ (a+b)+c=a+(b+c);$
3. $\exists! \theta \in P: \quad a+\theta=a;$
4. $\forall a \in P \ \ \exists!(-a) \in P: a+(-a)=\theta.$

Б. Аксиомы умножения:

5. $\forall a,b \in P \quad a \cdot b = b \cdot a;$

6. $\forall a,b,c \in P \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

7. $\forall a \in P \quad e \cdot a = a;$

8. $\forall a \in P\ (a \neq \theta)\ \exists a^{-1} \in P: \quad a \cdot a^{-1} = e;$

В. Аксиома дистрибутивности:

9. $\forall a,b,c \in P \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Бесконечные поля называются *числовыми*, а их элементы – числами.

Примеры числовых полей:

- поле рациональных чисел;
- поле действительных чисел;
- поле комплексных чисел.