

Тема 3. Математические основы финансово-экономических расчетов при принятии финансово-кредитных решений



Two empty rectangular boxes with vertical bars on the left side, likely for notes or additional information.

Вопросы

1. Базовые понятия финансовой математики. Способы начисления процентов.
2. Простые и сложные ставки ссудных процентов.
3. Простые и сложные учётные ставки.
4. Эквивалентность процентных ставок различного типа.
5. Аннуитет.

1. Базовые понятия финансовой математики.

Способы начисления процентов.

- **Проценты** - это доход от предоставления капитала в долг в различных формах (ссуды, кредиты и т. д.), либо от инвестиций производственного или финансового характера.
- **Процентная ставка** - величина, характеризующая интенсивность начисления процентов.
- **Наращение (рост) первоначальной суммы долга** - увеличение суммы долга за счет присоединения начисленных процентов (дохода).
- **Множитель (коэффициент) наращения** - это величина, показывающая, во сколько раз вырос первоначальный капитал.
- **Период начисления** - промежуток времени, за который начисляются проценты (получается доход).
- Период начисления может разбиваться на интервалы начисления.
- **Интервал начисления** - минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов.

Существуют **два способа** определения и начисления процентов: **декурсивный** и **антисипативный** (предварительный).

При **декурсивном** способе проценты начисляются в конце каждого интервала начисления исходя из величины предоставляемого капитала.

При **антисипативном способе** проценты начисляются в начале каждого интервала начисления исходя из наращенной суммы.

При обоих способах начисления процентов процентные ставки могут быть либо **простыми** (если они применяются к одной и той же первоначальной денежной сумме в течение всего периода начисления), либо **сложными** (если по прошествии каждого интервала начисления она применяются к сумме долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов).

2. Простые и сложные ставки ссудных процентов.

Простые ставки ссудных (декурсивных) процентов

применяются обычно в краткосрочных финансовых операциях, когда интервал начисления совпадает с периодом начисления (и составляет, как правило, срок менее одного года), или когда после каждого интервала начисления кредитору выплачиваются проценты.

Введем следующие обозначения:

i – величина годовой ставки процентов;

I - общая сумма процентных денег за весь период начисления;

P - величина первоначальной денежной суммы;

S - наращенная сумма;

K_n - коэффициент наращения;

n - продолжительность периода начисления в годах;

d - продолжительность периода начисления в днях;

K - продолжительность года в днях.

- Величина K является **временной базой** для расчета процентов.
- В зависимости от способа определения продолжительности финансовой операции рассчитывается либо **точный**, либо **обыкновенный** (коммерческий) процент.
- Точный процент получают, когда за временную базу берут фактическое число дней в году (365 или 366) и точное число дней ссуды.
- Определение современной величины P наращенной суммы S называется **дисконтированием**, а определение величины наращенной суммы S - **компаудированием**.

$S = P(1 + i \cdot n)$ - компаудирование по
простой ссудной ставке

$P = \frac{S}{(1 + i \cdot n)}$ - дисконтирование по простой
ссудной ставке

Если продолжительность ссуды менее
одного года можно использовать
следующую формулы:

$$S = P\left(1 + i \cdot \frac{\delta}{K}\right)$$

$$P = \frac{S}{\left(1 + i \cdot \frac{\delta}{K}\right)}$$

Преобразуя формулы (т. е. заменяя входящие в них выражения на эквивалентные и выражая одни величины через другие), получаем еще несколько формул для определения неизвестных величин в различных случаях

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i}$$

$$i = \frac{S - P}{P \cdot n}$$

$$\delta = \frac{S - P}{P \cdot i} \cdot K$$

$$i = \frac{S - P}{P \cdot \delta} \cdot K$$

Иногда на разных интервалах начисления
 применяются разные процентные ставки. Если
 на последовательных интервалах начисления
 используются ставки процентов $i_1, i_2, \dots, i_N$,
 то доход кредитора в конце интервала составит:

$$I_1 = P \cdot n_1 \cdot t_1 \quad \text{и т. д. в конце второго интервала:} \quad I_2 = P \cdot n_2 \cdot i_2$$

При N интервалах начисленная наращенная сумма
 составит:

$$S = P(1 + \sum_{t=1}^N n_t \cdot i_t)$$

Если после очередного интервала начисления доход (т. е. начисленные за данный интервал проценты) не выплачивается, а присоединяется к денежной сумме, имеющейся на начало этого интервала, для определения наращенной суммы применяют **формулы сложных процентов**.

Сложные ссудные проценты в настоящее время являются весьма распространенным видом применяемых в различных финансовых операциях процентных ставок:

$$S = P(1 + i)^n \qquad P = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

Если срок ссуды n в годах не является целым числом, множитель наращенения определяют по выражению:

$$K_H = (1 + i)^{n_a} \cdot (1 + i \cdot n_b)$$

$$S = P \cdot (1 + i)^{n_a} \cdot (1 + i \cdot n_b)$$

где $n = n_a + n_b$;

n_a - целое число лет;

n_b - оставшаяся дробная часть года.

Начисление сложных процентов может осуществляться не один, а несколько раз в году. В этом случае оговаривается номинальная ставка процентов

j - годовая ставка, по которой определяется величина ставки процентов, применяемой на каждом интервале начисления.

При m равных интервалах начисления и номинальной процентной ставке j эта величина считается равной j/m .

Если срок ссуды составляет n лет, то получаем выражение для определения наращенной суммы:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{nm}$$

Здесь mn – общее число интервалов начисления за весь срок ссуды.

Если общее число интервалов начисления не является целым числом (mn - целое число интервалов начисления, l - часть интервала начисления), то выражение принимает вид:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \left(1 + l \frac{j}{m}\right)$$

3. Простые и сложные учетные ставки

При **антисипативном способе** начисления процентов сумма получаемого дохода рассчитывается исходя из наращенной суммы. Так как в данном случае проценты начисляются в начале каждого интервала начисления, заемщик, естественно, получает эту сумму за вычетом процентных денег. Доход, полученный по учетной ставке, т. е. разница между размером кредита и непосредственно выдаваемой суммой называется **дисконтом**.

Пусть теперь

$d(\%)$ - простая годовая учетная ставка;

D_2 - сумма процентных денег, выплачиваемая за год;

D - общая сумма процентных денег;

S - сумма, которая должна быть возвращена;

P - сумма, получаемая заемщиком.

Тогда, согласно определениям, имеем следующие формулы:

$$D_z = d \cdot S \quad D = n \cdot D_z = n \cdot d \cdot S$$

$$P = S - D = S(1 - n \cdot d) = S \left(1 - \frac{\delta}{K} \cdot d \right)$$

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d} = P \div \left(1 - \frac{\delta}{K} \cdot d \right)$$

На практике учетные ставки применяются главным образом при учете (т. е. покупке) векселей и других денежных обязательств.

Из приведенных формул можно вывести еще две формулы для определения периода начисления и учетной ставки при прочих заданных условиях:

$$n = \frac{S - P}{S \cdot d} \quad d = \frac{S - P}{S \cdot n} = \frac{S - P}{S \cdot \delta} \cdot K$$

Компаудирование и дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по следующим формулам:

$$S = \frac{P}{(1 - d)^n} \quad P = S(1 - d)^n$$

Так, для периода начисления, не являющегося целым числом, имеем:

$$K_H = \frac{1}{(1-d)^{n_a} \cdot (1-d \cdot n_b)}$$

Для начисления процентов m раз в году формула имеет следующий вид:

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{g}{m}\right)^{mn}}$$

$$S = \frac{P}{\left[\left(1 - \frac{g}{m}\right)^{mn} \cdot \left(1 - l \frac{g}{m}\right)\right]}$$

При этом mn - целое число интервалов начисления за весь период начисления, l - часть интервала начисления.

4. Эквивалентность процентных ставок различного типа

- **Эквивалентные процентные ставки** - это такие процентные ставки разного вида, применение которых при различных начальных условиях дает одинаковые финансовые результаты.
- Эквивалентные процентные ставки необходимо знать в случаях, когда существует возможность выбора условий финансовой операции и требуется инструмент для корректного сравнения различных процентных ставок.

4. Эквивалентность процентных ставок различного типа

- Для нахождения эквивалентных процентных ставок используют **уравнения эквивалентности**, принцип составления которых заключается в следующем. Выбирается величина, которую можно рассчитать при использовании различных процентных ставок (обычно это наращенная сумма S). На основе равенства двух выражений для данной величины и составляется уравнение эквивалентности, из которого путем соответствующих преобразований получается соотношение, выражающее зависимость между процентными ставками различного вида.

Повторим формулы для определения наращенной суммы при различных способах начисления

$$S = P(1 + i \cdot n) \quad S = P(1 + i)^n$$

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d} \quad S = \frac{P}{(1 - d)^n}$$

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \quad S = \frac{P}{\left(1 - \frac{g}{m}\right)^{mn}}$$

Приравнивая эти формулы попарно, можно получить соотношения, выражающие зависимость между любыми двумя различными процентными ставками.

Рассмотрим несколько случаев.

$$1 + ni = \frac{1}{1 - nd}$$

$$i = \frac{i}{1 - nd}$$

$$d = \frac{i}{1 + ni}$$

$$1 + ni = (1 + i_c)^n \quad i = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n} \quad i_c = \sqrt[n]{1 + ni} - 1$$

$$1 + ni = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \quad i = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n}$$

$$j = m \left(\sqrt[m]{1 + ni} - 1 \right)$$

Для различных случаев сложных процентов получаем следующее уравнение эквивалентности:

$$(1 + i_c)^n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \quad i_c = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$j = m(\sqrt[m]{1 + i_c} - 1)$$

Полученная по последней формуле годовая ставка сложных процентов, эквивалентная номинальной процентной ставке, называется **эффективной (действительной) ставкой сложных процентов**.

Эффективную ставку сложных процентов полезно знать, чтобы оценить реальную доходность финансовой операции, или сравнить процентные ставки в случае, когда используются различные

Далее для установления эквивалентности между сложными учетными ставками и сложными ставками ссудных процентов имеем:

$$(1 + i_c)^n = \frac{1}{(1 - d_c)^n} \quad i_c = \frac{d_c}{1 - d_c} \quad d_c = \frac{i_c}{1 + i_c}$$

Аналогичным образом получаем зависимости между любыми другими эквивалентными процентными ставками.

5. Аннуитет

- **Аннуитет**, т.е. ежегодный платеж – это инвестиции, приносящие вкладчику определенный доход через регулярные промежутки времени. Он означает серию платежей одинаковой суммы, регулярно поступающих через равные промежутки времени в течение определенного числа лет. В основном это вложение капитала в акции, облигации, негосударственные пенсионные фонды, в недвижимость, приносящую доход и др.

□ Расчёт аннуитетного платежа

- Рассчитать месячный аннуитетный платеж можно по следующей формуле:

$$R = A * \left(i + \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right)$$

- , где
- R – месячный платёж, A – первоначальная сумма кредита, i – $(1/12)$ процентной ставки, n – количество месяцев.