НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения с одним неизвестным

- Нелинейные уравнения:

- алгебраические (содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные)
- трансцендентные (содержащие другие функции (тригонометрические, показа-показательные, логарифмические и др.)).

- 1. Метод деления отрезка пополам (метод бисекции).

- Пусть мы нашли отрезок $[a,b]$, на котором функция меняет знак , т.е. на котором находится значение корня $x = c$, т. е.

$$c \in [a,b]$$

- В качестве начального приближения корня c_0 принимаем середину этого отрезка:

$$c_0 = (a+b)/2$$

- Далее исследуем значения функции на концах отрезков $[a, c_0]$и $[c_0, b]$

- Тот из отрезков, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$.

- В качестве первого приближения корня принимаем

$$c_1 = (a_1 + b_1)/2$$

- Таким образом, *k*-е приближение вычисляется как

$$c_k = (a_k + b_k)/2$$

- после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, а после k итераций он сокращается в $2k$ раз:

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

- Пусть приближенное решение x_* требуется найти с точностью до некоторого заданного малого числа $\varepsilon > 0$:

$$|x - x_*| < \varepsilon$$

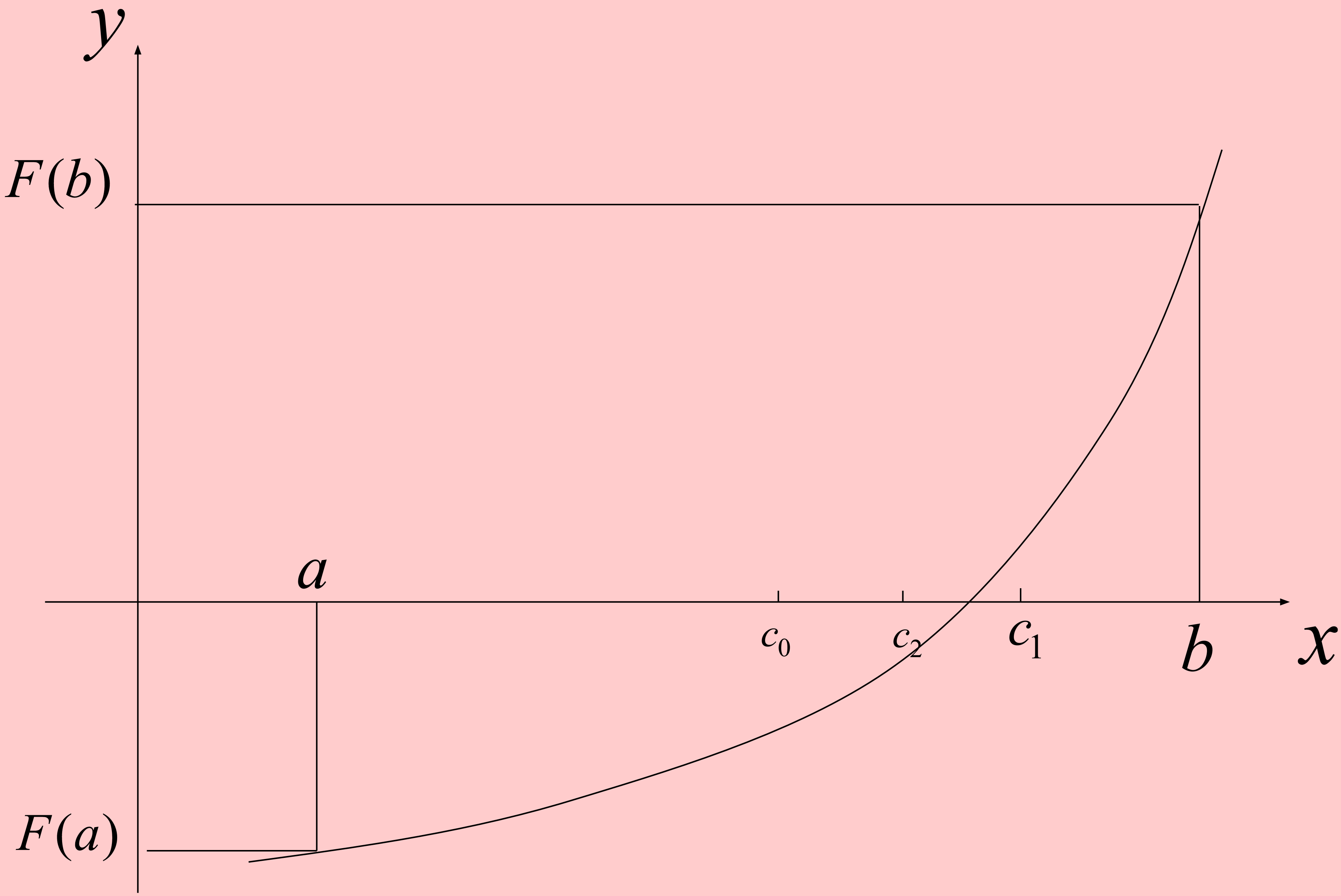
- Взяв в качестве приближенного решения k-е приближение корня: $x_* = c_k$, учитывая, что $x = c$

получим

$$|c - c_k| < \varepsilon$$

- Последнее неравенство выполнено, если

$$b_k - a_k < 2\varepsilon$$


y
F(b)
a
c0
c2
c1
b
x
F(a)

- метод деления отрезка пополам всегда сходится, причем можно гарантировать, что полученное решение будет иметь любую наперед заданную точность.

- 2. Метод хорд.

- Процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений корню уравнения принимаются значения точек пересечения хорды с осью абсцисс.

- (Для определенности примем)

$$F(a) > 0, F(b) < 0$$

- Сначала находим уравнение хорды *ab*:

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

- Для точки пересечения ее с осью абсцисс получим уравнение

$$c_0 = a - \frac{b-a}{F(b)-F(a)}F(a)$$

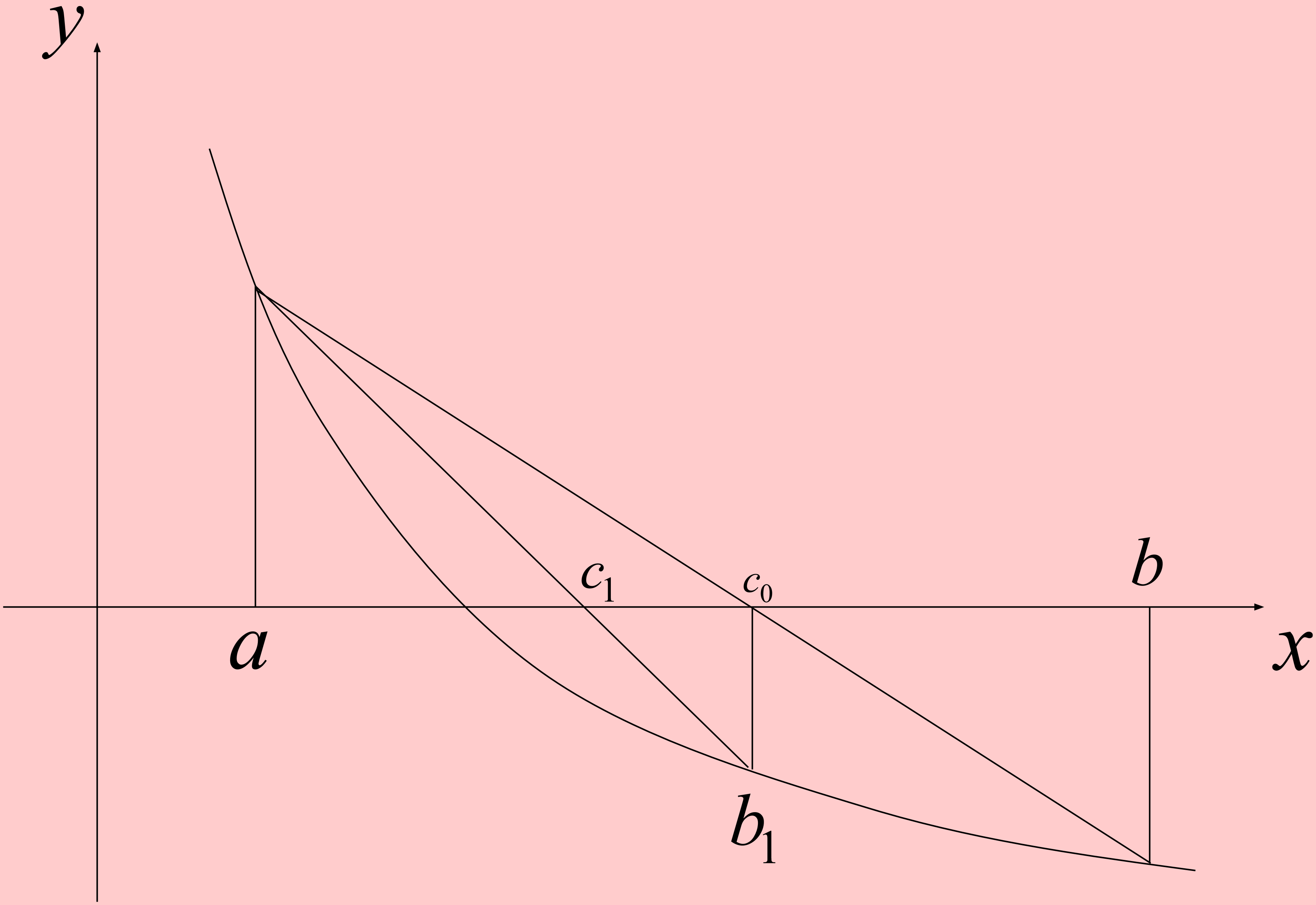
- Далее, сравнивая знаки величин $F(a)$ и $F(c_0)$ для рассматриваемого случая, приходим к выводу, что корень находится в интервале (a, c_0), так как

  $F(a)F(c_0) < 0$. Отрезок $[c_0, b]$ отбрасываем.

и т.д.

- В качестве условия окончания итераций используется условие близости двух последовательных приближений

$$\left|c_k - c_{k-1}\right| < \varepsilon$$



y
x
a
c1
c0
b
b1

- 3. Метод Ньютона (метод касательных).

- метод состоит в том, что на *k*-й итерации проводится касательная к кривой $y = F(x)$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс.

- При этом не обязательно задавать отрезок $[a,b]$, содержащий корень уравнения, а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение корня

$$x = c_0$$

- Уравнение касательной, проведенной к кривой в точке $(c_0, F(c_0))$ имеет вид
- $$y - F(c_0) = F'(c_0)(x - c_0)$$

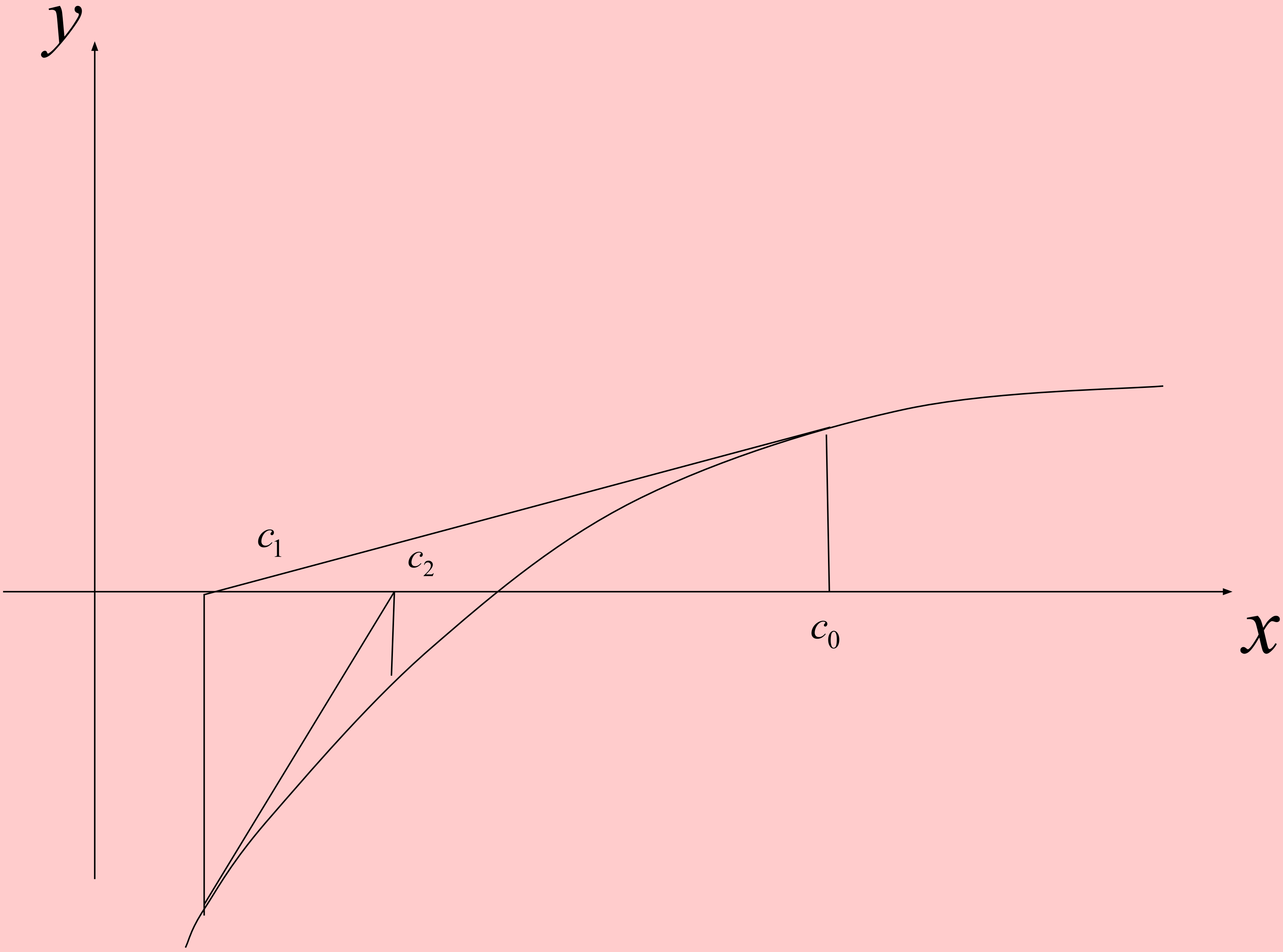
- Отсюда найдем следующее приближение корня как абсциссу точки пересечения касательной с осью x ($y = 0$):

$$c_1 = c_0 - F(c_0)/F'(c_0)$$

- Аналогично формула для k-го приближения имеет вид

$$c_k = c_{k-1} - F(c_{k-1}) / F'(c_{k-1})$$

- необходимо, чтобы $F'(c_{k-1})$ не равнялась нулю.



y
c1
c2
c0
x

- для погрешности корня $\varepsilon_k = c - c_k$ имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}^2}\right| = \left|\frac{F''(c)}{2F'(c)}\right|$$

- 4. Метод простой итерации.

- Для использования этого метода исход- исходное нелинейное уравнение записывается в виде

$$x = f(x)$$

- Пусть известно начальное приближение корня

$$x = c_0$$

- Подставляя это значение в правую часть уравнения получаем новое приближение

$$c_1 = f(c_0)$$

- Подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение получаем последовательность значений

$$c_k = f(c_{k-1})$$

- Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т. е. если выполнено неравенство

$$\left|c_k - c_{k-1}\right| < \varepsilon$$