

Сучасні методи наближення функцій багатьох змінних (інтерфлетація, інтерстріпація, інтерлокація.



Лекція 5

Українська інженерно-педагогічна
академія

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних.
2. Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на трьох площинах $x = a_1, y = a_2, z = a_3$.
3. Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на чотирьох площинах $x = x_1, x = x_2, y = y_1, y = y_2$.
4. Інтерстріпація функцій трьох змінних
5. Порівняння інтерполяції, інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації, інтерлокації
6. Чисельні експерименти

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних

Інтерфлетація функцій трьох змінних.

Нехай задана функція $u = f(x, y, z)$ двох змінних і система площин

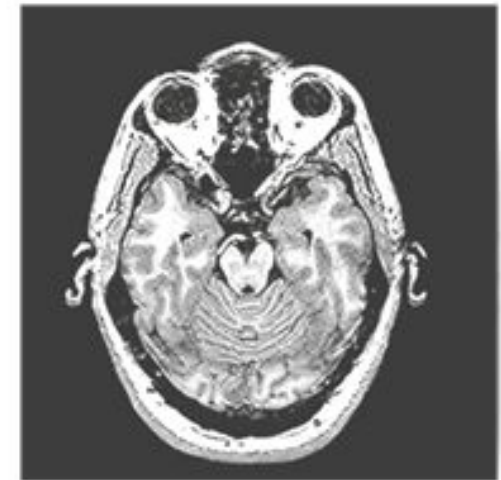
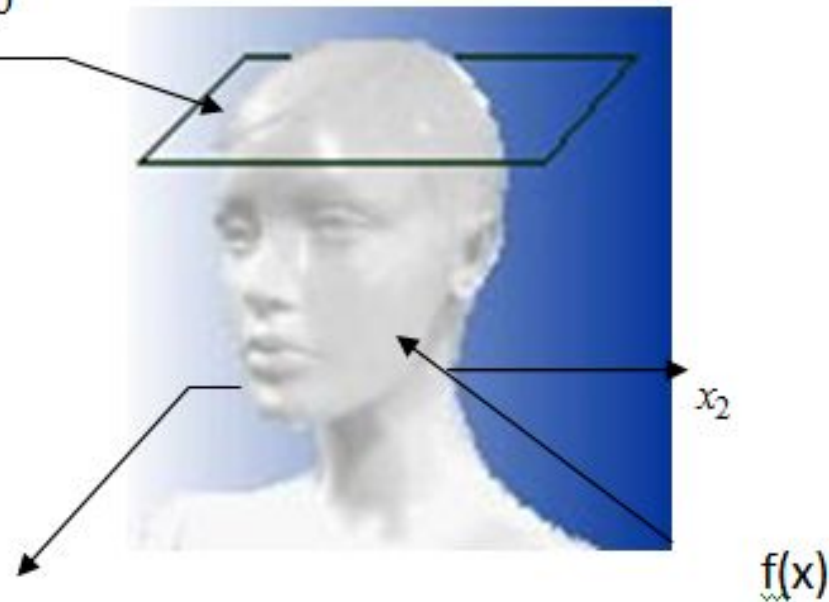
$$\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$$

Слідом функції $u = f(x, y, z)$ на площині $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$ називається функція двох змінних $f_k(x, y)$ або $f_k(y, z)$, або $f_k(x, z)$ яка в кожній точці цієї площини приймає такі ж значення, як і функція $u = f(x, y, z)$.

$$f(x, y, z)|_{\Pi_k} = f_k(x, y)|_{\Pi_k}$$

1. Інтерфлотація функцій трьох змінних

$$\omega_k(x) : x_3 - c = 0$$



$$T_k(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c)$$

Рис. 1. Графічна ілюстрація поняття томограми

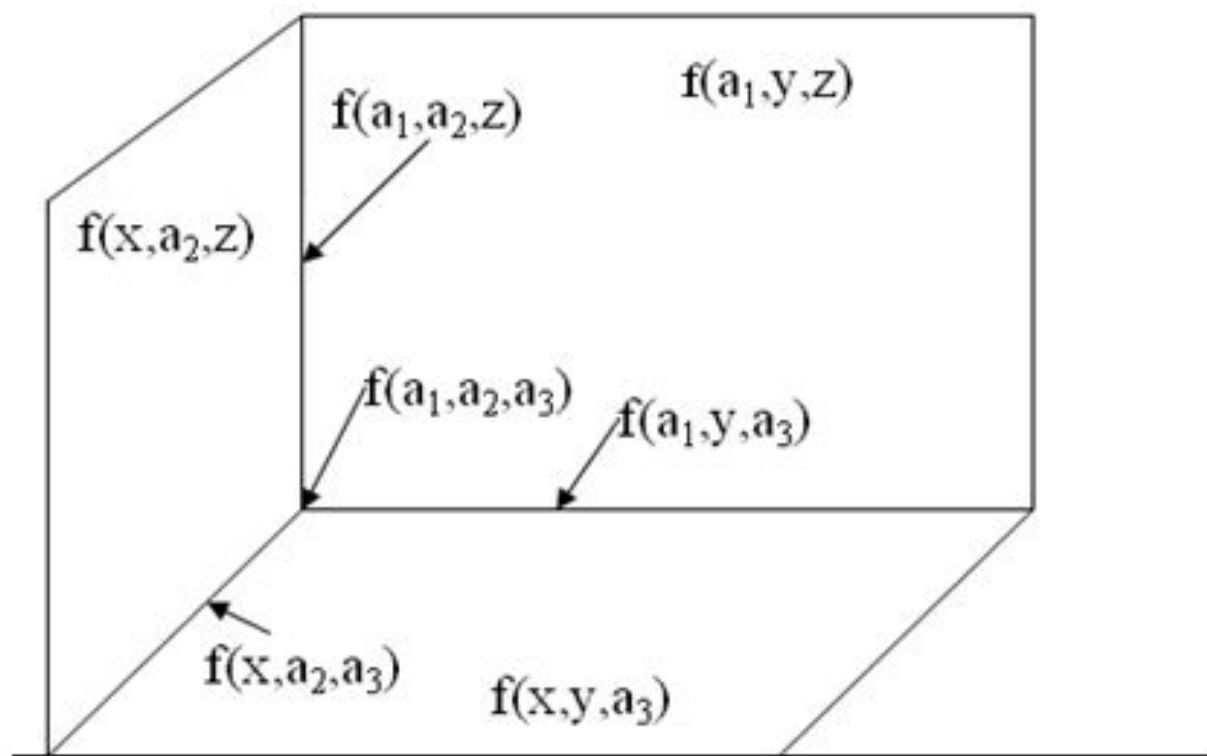
1. Інтерфлетація функцій трьох змінних

Інтерфлетацією функції $f(x, y, z)$ (від англ. *inter* – між, *flat*-площина) на системі площин $x = x_i, i = \overline{1, m};$
 $y = y_j, j = \overline{1, n}$, $z = z_k, k = \overline{1, s}$ називається відновлення її за допомогою слідів $f(x_i, y, z), i = \overline{1, m}$, $f(x, y_j, z), l = \overline{1, n}$,
 $f(x, y, z_k), k = \overline{1, s}$

Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на трьох площинах $x = a_1$, $y = a_2$, $z = a_3$.

Оператор

$$O_3(x, y, z) = f(x, a_2, z) + f(a_1, y, z) + f(x, y, a_3) - f(a_1, a_2, z) - f(a_1, y, a_3) - f(x, a_2, a_3) + f(a_1, a_2, a_3)$$





Оператор інтерфлєтації функції $f(x, y, z)$ на трьох площинах $x = a_1$, $y = a_2$, $z = a_3$.

має такі інтерфлєтаційні властивості властивості:

$$O_3 f|_{x=a_1} = f(a_1, y, z), \quad O_3 f|_{y=a_2} = f(x, a_2, z), \quad O_3 f|_{z=a_3} = f(x, y, a_3).$$

При цьому справедлива тотожність
 $f(x, y, z) = O_3 f(x, y, z) + R_3 f(x, y, z),$

$$R_3 f(x, y) = \int_0^x \int_0^y \int_0^z f^{(1,1,1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad - \quad \text{інтегральний}$$

вигляд похибки наближення.

Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на чотирьох площинах $x = x_1, x = x_2, y = y_1, y = y_2$.



Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на чотирьох площинах $x = x_1, x = x_2, y = y_1, y = y_2$.

Оператор

$$O(x, y, z) = O1(x, y, z) + O2(x, y, z) - O12(x, y, z),$$

де

$$O1(x, y, z) = f(x_1, y, z) \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2, y, z) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

$$O2(x, y, z) = f(x, y_1, z) \cdot \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} + f(x, y_2, z) \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

$$O12(x, y, z) = \left(f(x_1, y_1, z) \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} + f(x_1, y_2, z) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + \\ \left(f(x_2, y_1, z) \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} + f(x_2, y_2, z) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

має такі інтерфлетаційні властивості властивості:

$$O f|_{x=x_i} = f(x_i, y, z), \quad O f|_{y=y_j} = f(x, y_j, z), \quad i, j = 1, 2$$

4. Інтерстріпація функцій трьох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$ двох змінних і система смуг

$$D_k : \{y_k \leq y \leq y_{k+1}, x \in [\alpha_k, \beta_k]\}$$

Тут z – віддаль від деякої площини $z = 0$ до поверхні в точці (x, y)

.

Інтерстріпацією функції $f(x, y, z)$ (від англ. *inter* – між, *strip*-смуга) на системі смуг D_k називається відновлення її за допомогою слідів на смугах $f(x, y)|_{D_k}$.

4. Інтерстріпація функцій трьох змінних

Вважаємо, що нам задана система горизонтальних смуг

$$D2_l = \{\gamma_l \leq y \leq \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}]\}, l = \overline{1, n},$$

а також система вертикальних смуг

$$D1_k = \{\alpha_k \leq x \leq \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k = \overline{1, m}.$$

Поверхня $z = f(x, y)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x, y)|_{\alpha_k \leq x \leq \beta_k} = f_{1,k}(x, y), \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1},$$

$$f(x, y)|_{\gamma_l < y < \delta_l} = f_{2,l}(x, y), \gamma_l < y < \delta_l, \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}.$$

5. Порівняння інтерполяції, інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації, інтерлокації

Метод наближення	Тип використовуваної інформації
Інтерполяція функцій однієї або кількох змінних	Значення функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) у деяких заданих точках
Інтерлінація функцій двох або більше змінних	Сліди функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на декількох заданих лініях
Інтерфлетація функцій трьох і більше змінних	Сліди функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на декількох заданих поверхнях
Інтерстріпація функцій трьох і більше змінних	Функції $f_k(x, y), k = \overline{1, M}$, які збігаються з $f(x, y)$ на декількох заданих смугах $S_k = \{(x, y) : w_{k1}(x, y) \geq 0, w_{k2}(x, y) \leq 0\}, k = \overline{1, M}$ $w_{k1}(x, y) \geq 0, w_{k2}(x, y) \leq 0$ - задані функції. $f_k(x, y) = f(x, y), (x, y) \in S_k, k = \overline{1, M}$
Інтерлокація	Функції заданої гладкості і <u>нормалізованості</u> , нулями яких є локуси – області, які не перетинаються

Приклад 1. Нехай ми маємо фотографії двох смуг одного об'єкту $F1$ (Рис. 1) і $F2$ (Рис. 2).



F1

Рис. 1. Перша смуга



F2

Рис. 2. Друга смуга



F4

Рис. 3. Скомпонована матриця з даних смуг.

6. Чисельні експерименти

За допомогою інтерстріпації відновлюємо повне зображення F



F

Рис. 4. Відновлене зображення.



$F3$

Рис. 5. Оригінал зображення

6. Чисельні експерименти

Приклад 2. Аналогічно розглядається чисельна реалізація метода інтерстріпації між паралельними вертикальними смугами.

Маємо чотири смуги одного знімка, розташовані у певному порядку (рис. 6).



Рис. 6. Зображення смуг знімка, розташованих у певному порядку.

6. Чисельні експерименти



Рис. 7. Матриця S об'єднана з даних смуг, заданих у певному порядку.

За допомогою відповідних операторів інтерстріпації, відновлюємо повне зображення



Рис. 8. Відтворене зображення, за допомогою інтерстріпації (F) і реальне зображення (FN).

6. Чисельні експерименти

Приклад 3. Опишемо чисельну реалізацію інтерстріпації між взаємно перпендикулярними смугами.

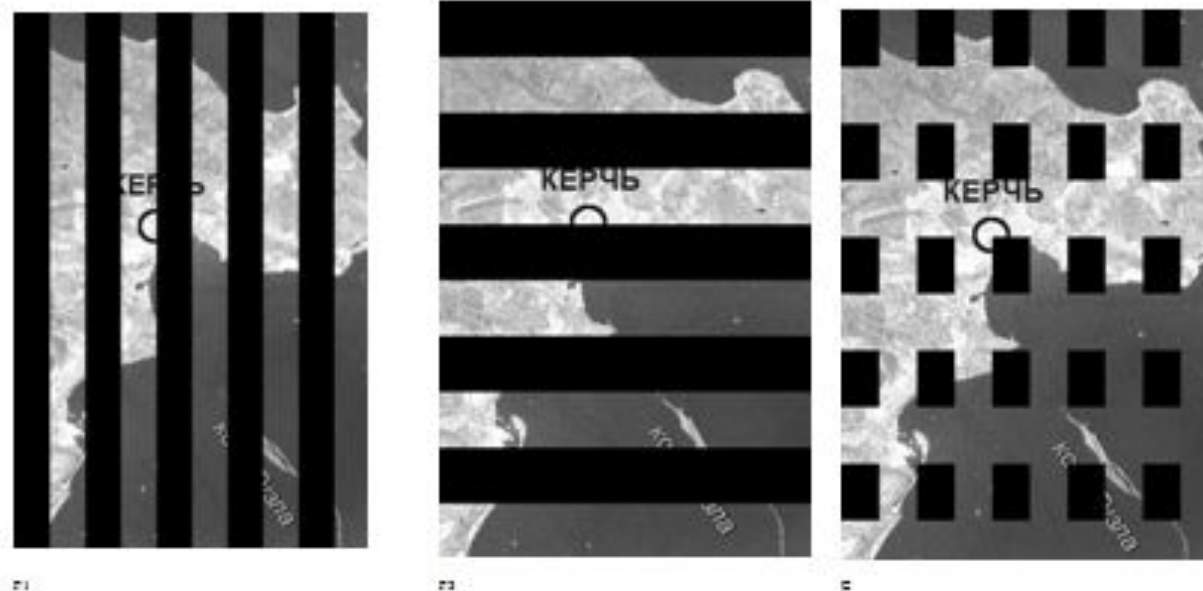


Рис. 9. Зображення матриць: а) з відомими вертикальними смугами (F1); б) з відомими горизонтальними смугами (F3); в) матриці об'єднання смуг.

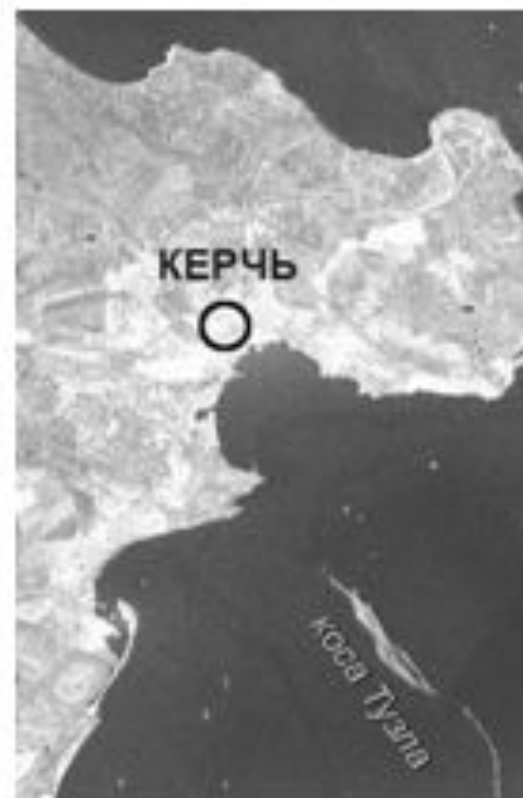


Рис. 10. Відновлене зображення F і оригінал FN.

Приклад 4. У наступному прикладі наведені результати відновлення поверхні об'єкта – Ейфелевої вежі, про яку відомо, що вона є розривною (Рис. 12).



а)



б)



в)



г)

Рис. 12. а) оригінал зображення поверхні; б) зображення 5-ти горизонтальних смуг; в) зображення 5-ти вертикальних смуг; г) відновлене зображення поверхні за допомогою інтерстріпації ($N = 0$).