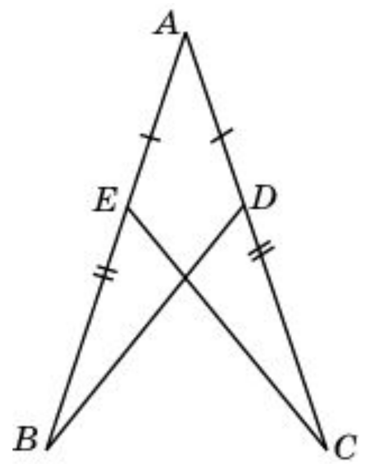
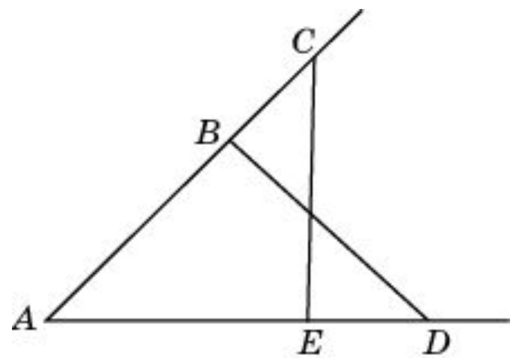
Задачи на доказательство № 25 из ОГЭ

На рисунке $AB=AC$, $AE=AD$. Докажите, что $BD=CE$.



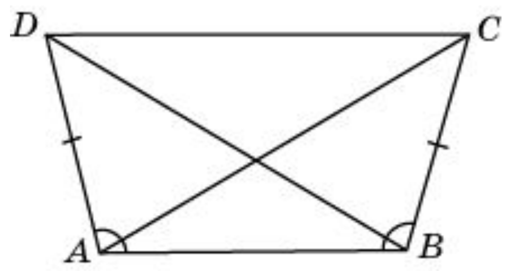
Решение. Треугольники ABD и ACE равны по первому признаку равенства треугольников ($AB=AC$, $AD = AE$, угол A общий). Следовательно, равны соответствующие стороны BD и CE этих треугольников.

На сторонах угла *CAD* отмечены точки *B* и *E* так, что точка *B* лежит на стороне *AC*, а точка *E* – на стороне *AD*, причем *AC* = *AD* и *AB* = *AE*. Докажите, что угол *CBD* равен углу *DEC*.



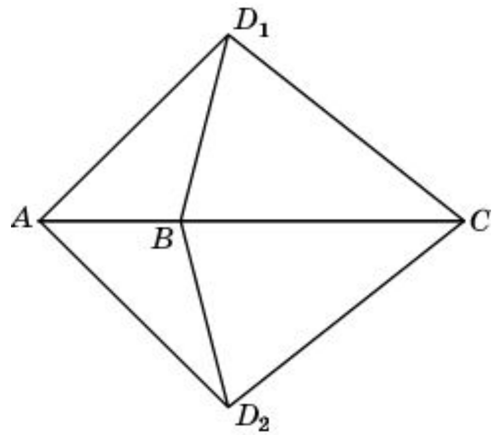
Решение. Треугольники *ABD* и *ACE* равны по первому признаку равенства треугольников (*AC* = *AD*, *AB*=*AC*, угол *A* общий). Следовательно, равны соответствующие углы *ABD* и *AEC*. Из равенства этих углов следует равенство смежных углов *CBD* и *DEC*.

На рисунке угол A равен углу B, $AD = BC$. Докажите, что $AC = BD$.



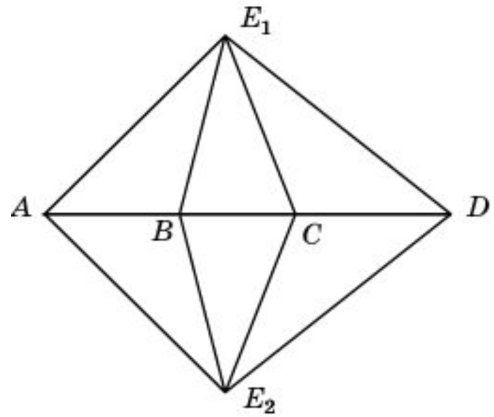
Решение. Треугольники ABC и BAD равны по первому признаку равенства треугольников (AB – общая сторона, $BC = AD$, угол ABC равен углу BAD). Следовательно, равны соответствующие стороны AC и BD этих треугольников.

Точки A, B, C принадлежат одной прямой. Точки D_1 и D_2 лежат по разные стороны от этой прямой. Докажите, что если треугольники ABD_1 и ABD_2 равны, то треугольники BCD_1 и BCD_2 тоже равны.



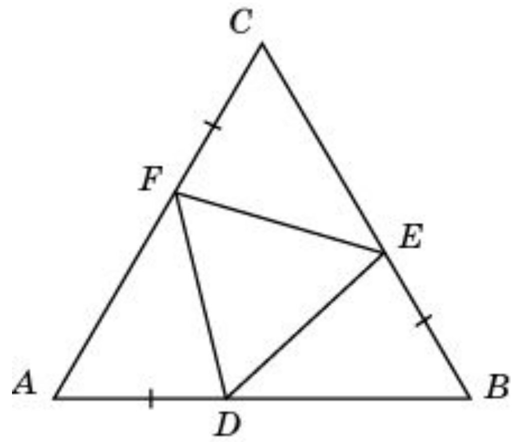
Решение. Из равенства треугольников ABD_1 и ABD_2 следует равенство соответствующих сторон BD_1 и BD_2, а также равенство соответствующих углов ABD_1 и ABD_2. Из равенства указанных углов следует равенство смежных с ними углов CBD_1 и CBD_2. Треугольники BCD_1 и BCD_2 равны по первому признаку равенства треугольников ($BD_1 = BD_2$, BC – общая сторона, угол CBD_1 равен углу CBD_2.

Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой. Точки E_1 и E_2 лежат по разные стороны от этой прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны.



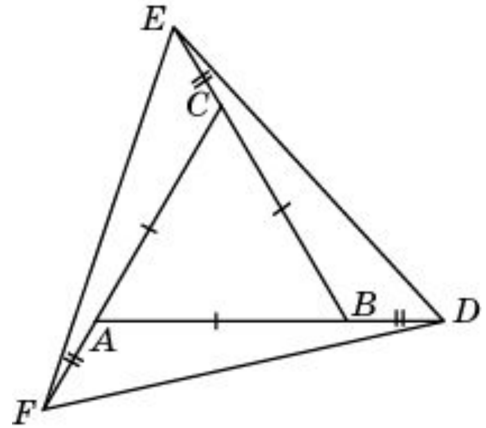
Решение. Из предыдущей задачи следует, что из равенства треугольников ABE_1 и ABE_2 вытекает равенство треугольников BCE_1 и BCE_2, которое, в свою очередь, влечет равенство треугольников CDE_1 и CDE_2.

На каждой стороне правильного треугольника ABC последовательно отложены равные отрезки AD, BE, CF. Докажите, что треугольник DEF тоже правильный.



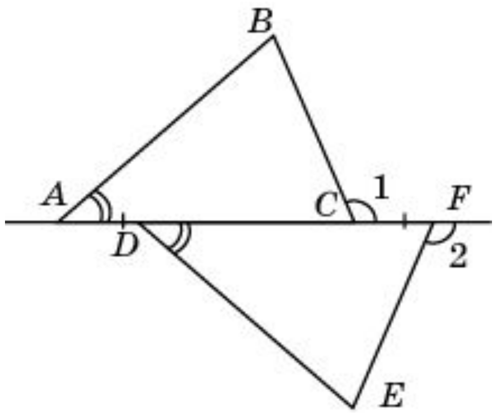
Решение. Из равенства сторон правильного треугольника и равенства отрезков AD, BE и CF следует равенство отрезков AF, CE и BD. Треугольники ADF, BED и CFE равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BE = CF$, $AF = BD = CE$, угол A равен углу B и равен углу C). Следовательно, равны соответствующие стороны DF, DE и EF этих треугольников. Значит, треугольник DEF тоже правильный.

На продолжении каждой стороны правильного треугольника *ABC* последовательно отложены равные отрезки *BD*, *CE*, *AF*. Докажите, что треугольник *DEF* тоже правильный.



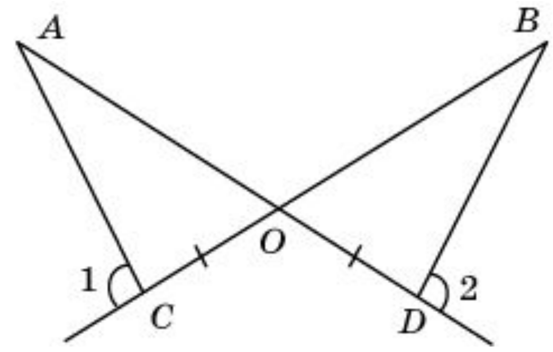
Решение. Из равенства сторон правильного треугольника *ABC* и равенства отрезков *BD*, *CE* и *AF* следует равенство отрезков *AD*, *BE* и *CF*. Из равенства углов правильного треугольника *ABC* следует равенство углов *FAD*, *DBE* и *ECF*. Треугольники *ADF*, *BED* и *CFE* равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BE = CF$, $AF = BD = CE$, угол *FAD* равен углу *DBE* и равен углу *ECF*). Следовательно, равны соответствующие стороны *DF*, *DE* и *EF* этих треугольников. Значит, треугольник *DEF* тоже правильный.

На рисунке дана фигура, у которой $AD = CF$, угол BAC равен углу EDF, угол 1 равен углу 2. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.



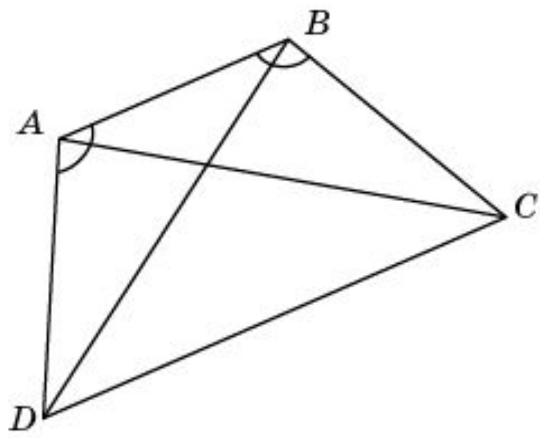
Решение. Из равенства углов 1 и 2 следует равенство смежных углов ACB и DFE. Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и DF. Треугольники ACB и DFE равны по второму признаку равенства треугольников ($AC = DF$, угол BAC равен углу EDF, угол ACB равен углу DFE).

Лучи AD и BC пересекаются в точке O, угол 1 равен углу 2, $OC = OD$. Докажите, что $OA = OB$.



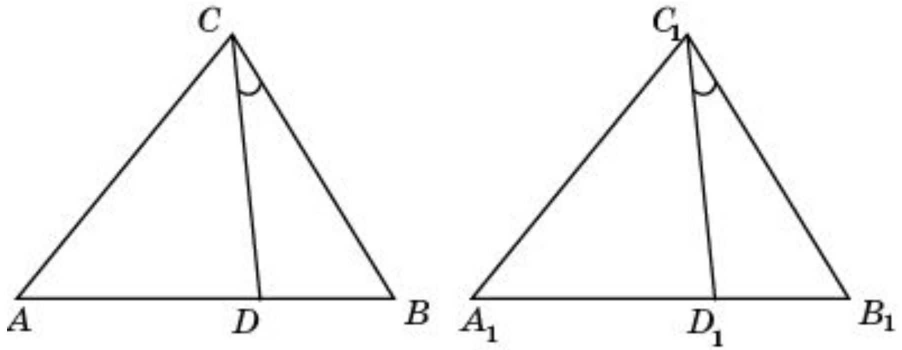
Решение. Из равенства углов 1 и 2 следует равенство смежных с ними углов ACO и BDO. Треугольники ACO и BDO равны по второму признаку равенства треугольников ($CO = DO$, угол ACO равен углу BDO, угол AOC равен углу BOD). Следовательно, равны соответствующие стороны OA и OB этих треугольников.

В четырехугольнике *ABCD* угол *DAB* равен углу *CBA* и диагонали *AC* и *BD* образуют со стороной *AB* равные углы. Докажите, что *AC* = *BD*.



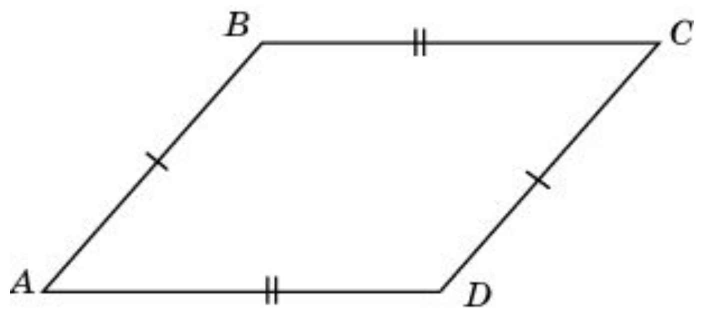
Решение. Треугольники *ABC* и *BAD* равны по второму признаку равенства треугольников (*AB* – общая сторона, угол *ABC* равен углу *BAD*, угол *BAC* равен углу *ABD*. Следовательно, равны соответствующие стороны *AC* и *BD* этих треугольников.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Отрезки CD и C_1D_1 образуют со сторонами соответственно CB и C_1B_1 равные углы. Докажите, что $AD = A_1D_1$.



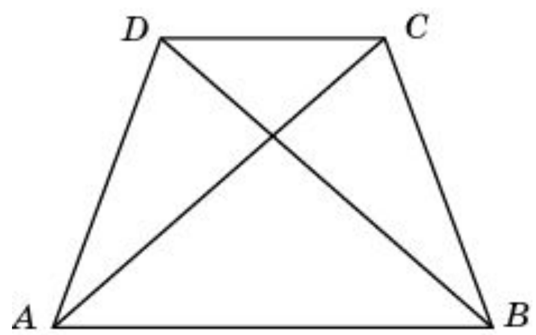
Решение. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство соответствующих сторон BC и B_1C_1, а также соответствующих углов B и B_1. Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по первому признаку равенства треугольников ($BC = B_1C_1$, угол B равен углу B_1, угол BCD равен углу $B_1C_1D_1$). Следовательно, равны соответствующие стороны BD и B_1D_1 этих треугольников. Из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует равенство соответствующих сторон AB и A_1B_1. Следовательно, имеет место равенство отрезков AD и A_1D_1.

В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $AD = BC$. Докажите, что угол A равен углу C.



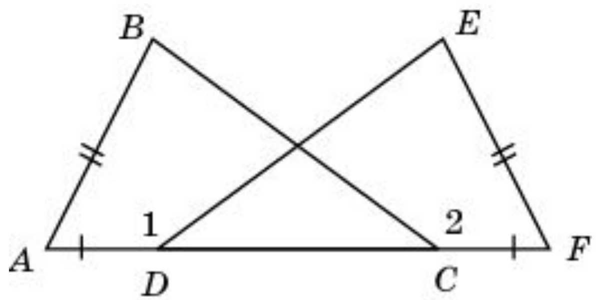
Решение. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ BD. Треугольники ABD и CDB равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $AD = BC$, BD – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы A и C этих треугольников.

В четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $AC = BD$. Докажите, что угол BAD равен углу ABC.



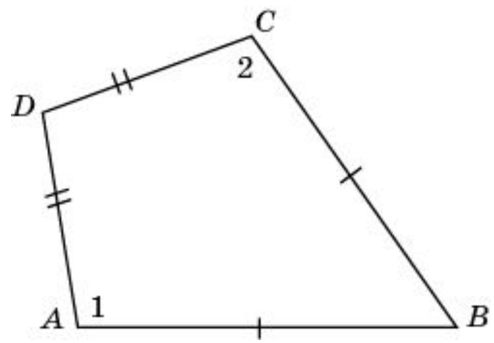
Решение. Треугольники ABC и BAD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AD = BC$, $AC = BD$, AB – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы BAD и ABC.

На рисунке $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что угол 1 равен углу 2.



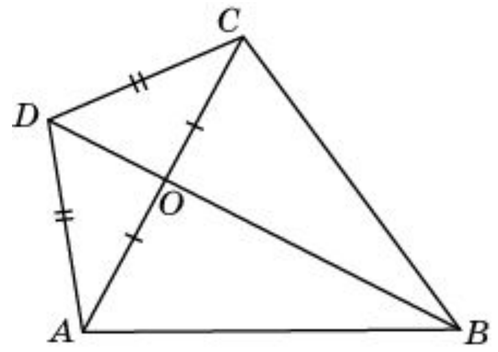
Решение. Из равенства отрезков AD и CF следует равенство отрезков AC и DF. Треугольники ABC и FED равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = FE$, $BC = ED$, $AC = FD$). Следовательно, равны соответствующие углы ACB и FDE этих треугольников, а, значит, равны и смежные с ними углы 1 и 2.

На рисунке $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что угол 1 равен углу 2.



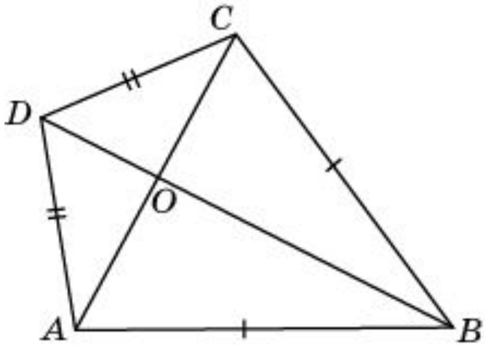
Решение. Проведем отрезок BD. Треугольники ABD и CBD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CB$, $AD = CD$, BD – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы 1 и 2 этих треугольников.

На рисунке $AD = CD$, $AO = OC$. Докажите, что $AB = BC$.



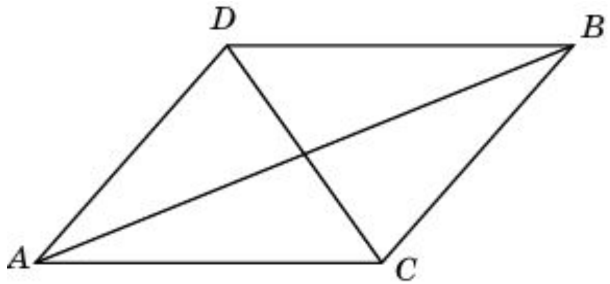
Решение. Треугольники AOD и COD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AO = CO$, $AD = CD$, OD – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ADO и CDO. Треугольники ABD и CBD равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = CD$, BD – общая сторона, угол ADB равен углу CDB). Следовательно, равны соответствующие стороны AB и BC этих треугольников.

На рисунке $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $AO = OC$.



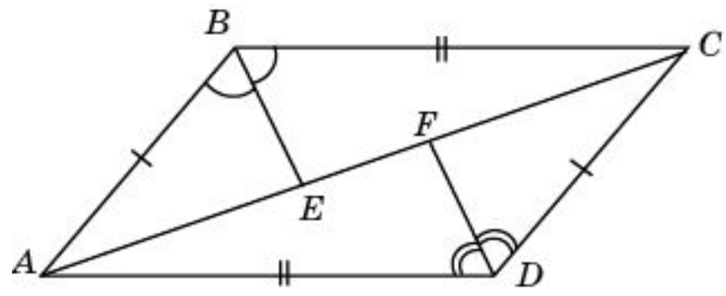
Решение. Треугольники ABD и CBD равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CB$, $AD = CD$, BD – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ABO и CBO. Треугольники ABO и CBO равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CB$, BO – общая сторона, угол ABO равен углу CBO). Следовательно, равны соответствующие стороны AO и CO этих треугольников.

Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что треугольники CBD и DAC равны.



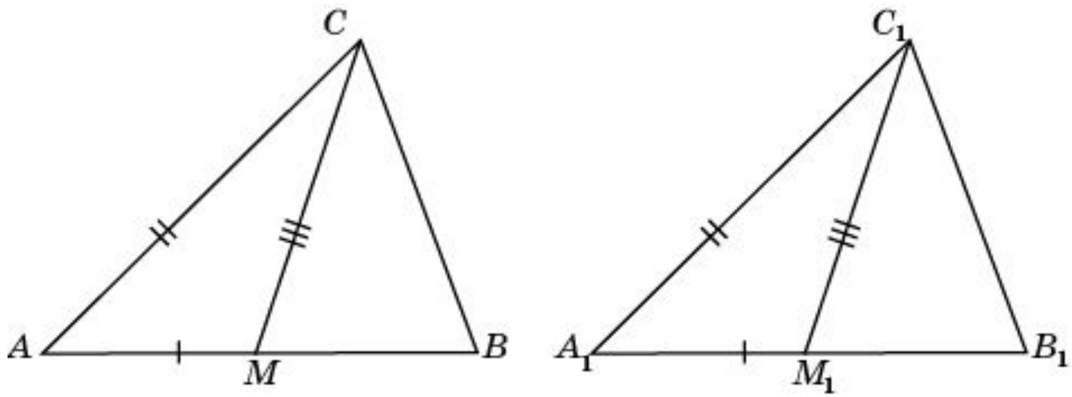
Решение. Из равенства треугольников ABC и BAD следует равенство соответствующих сторон AC и BD, BC и AD. Треугольники CBD и DAC равны по третьему признаку равенства треугольников ($CB = DA$, $BD = AC$, CD – общая сторона.

На рисунке $AB = CD$, $AD = BC$, BE - биссектриса угла ABC, а DF - биссектриса угла ADC. Докажите, что треугольники ABE и CDF равны.



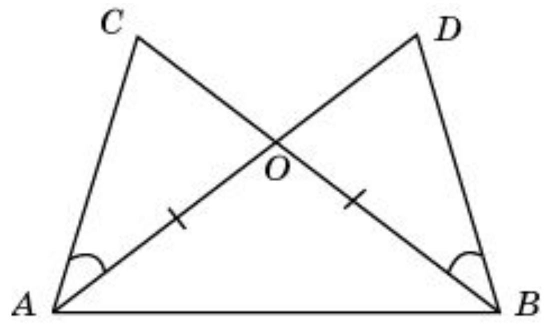
Решение. Треугольники ABC и ADC равны по третьему признаку равенства треугольников ($AB = CD$, $AD = BC$, AC – общая сторона). Следовательно, равны соответствующие углы ABC и CDA, BAC и DCA. Из равенства углов ABC и CDA следует равенство углов ABE и CDF. Треугольники ABE и CDF равны по второму признаку равенства треугольников ($AB = CD$, угол BAE равен углу DCF, угол ABE равен углу CDF).

Докажите, что если две стороны и медиана, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.



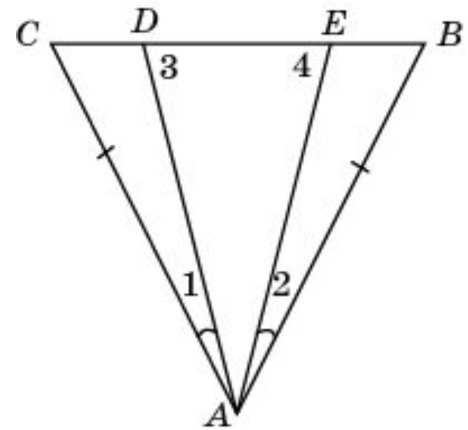
Решение. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и медиана CM равна медиане C_1M_1. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников ($AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$, $CM = C_1M_1$). Следовательно, угол A равен углу A_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, угол A равен углу A_1).

На рисунке угол DBC равен углу DAC, $BO = AO$. Докажите, что угол C равен углу D.



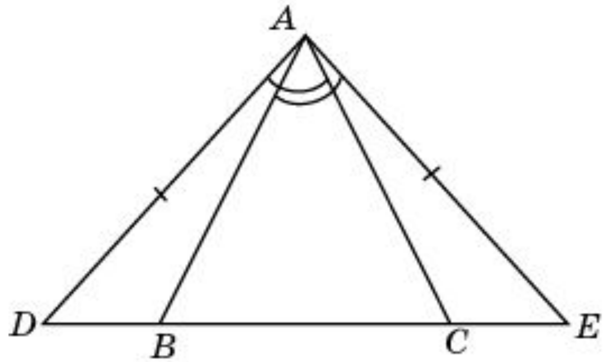
Решение. Треугольник ABO равнобедренный и, следовательно, $OAB = OBA$. Учитывая равенство углов DAC и DBC, получаем равенство углов ABD и BAC. Треугольники ABC и BAD равны по второму признаку равенства треугольников (AB – общая сторона, угол ABC равен углу BAC, угол BAC равен углу ABD). Следовательно, равны соответствующие углы C и D этих треугольников.

В треугольнике ABC $AB = AC$ и угол 1 равен углу 2. Докажите, что угол 3 равен углу 4.



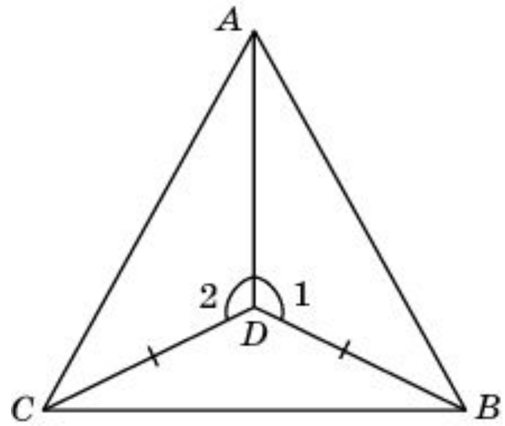
Решение. Треугольник ABC равнобедренный. Следовательно, угол B равен углу C. Треугольники ABE и ACD равны по второму признаку равенства треугольников ($AB = AC$, угол 1 равен углу 2, угол B равен углу C). Следовательно, равны соответствующие стороны AE и AD этих треугольников. Треугольник AED равнобедренный. Следовательно, угол 3 равен углу 4.

На рисунке $AD = AE$, угол CAD равен углу BAE. Докажите, что $BD = CE$.



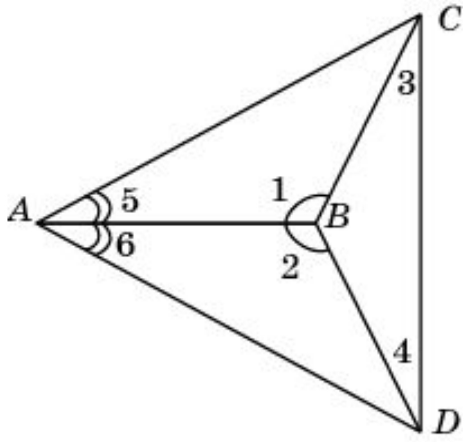
Решение. Треугольник ADE равнобедренный. Следовательно, угол D равен углу E. Треугольники ACD и ABE равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = AE$, угол D равен углу E, угол CAD равен углу BAE). Следовательно, равны соответствующие стороны CD и BE. Значит, равны и отрезки BD и CE.

На рисунке $CD = BD$, угол 1 равен углу 2. Докажите, что угол ACB равен углу ABC.



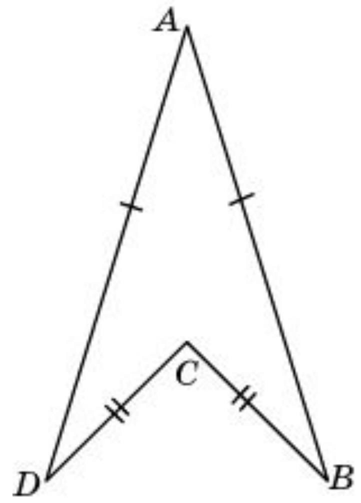
Решение. Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников (AD – общая сторона, $BD = CD$, угол ADB равен углу ADC). Следовательно, равны соответствующие стороны AB и AC этих треугольников. Треугольник ABC равнобедренный и, значит, $ACB = ABC$.

На рисунке угол 1 равен углу 2, угол 5 равен углу 6. Докажите, что угол 3 равен углу 4.



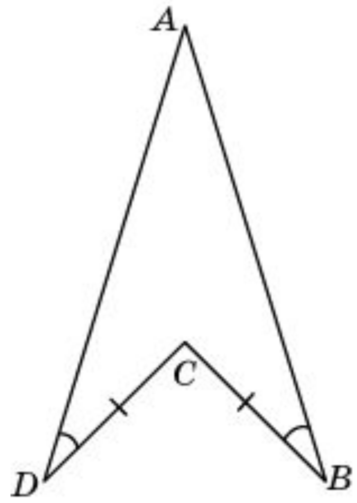
Решение. Треугольники *ABC* и *ABD* равны по второму признаку равенства треугольников (*AB* – общая сторона, угол *ABC* равен углу *ABD*, угол *BAC* равен углу *BAD*). Следовательно, равны соответствующие стороны *BC* и *BD* этих треугольников. Треугольник *BCD* равнобедренный и, значит, угол 3 равен углу 4.

На рисунке $AB = AD$ и $DC = BC$. Докажите, что угол ABC равен углу ADC.



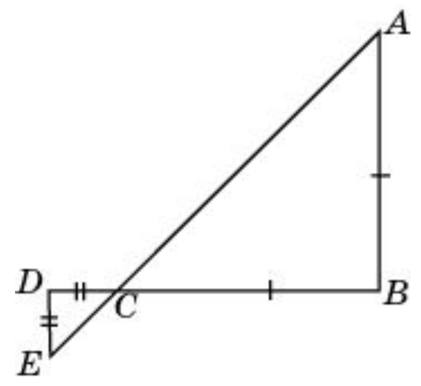
Решение. Проведем отрезок BD. Треугольник ABD равнобедренный ($AB = AD$). Следовательно, угол ABD равен углу ADB. Треугольник CBD равнобедренный ($CB = CD$). Следовательно, угол CBD равен углу CDB. Значит, угол ABC равен углу ADC.

На рисунке $DC = BC$ и угол B равен углу D. Докажите, что $AB = AD$



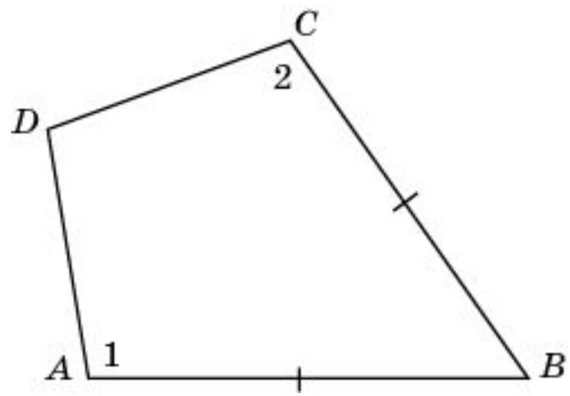
Решение. Проведем отрезок BD. Треугольник BCD равнобедренный ($BC = DC$). Следовательно, имеет место равенство $DBC = BDC$. Из этого равенства и равенства углов ABC и ADC следует равенство углов ABD и ADB. Значит, треугольник ABD – равнобедренный и, следовательно, $AB = AD$.

На рисунке $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что угол BAC равен углу CED.



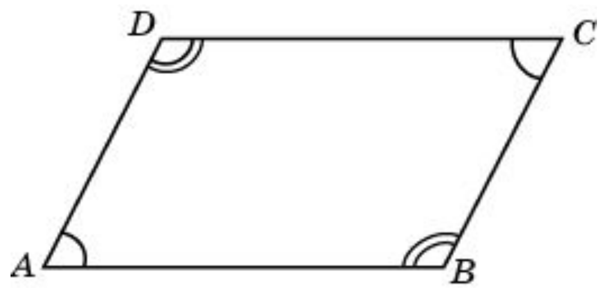
Решение. Треугольник ABC – равнобедренный и, следовательно, угол BAC равен углу BCA. Треугольник CDE – равнобедренный и, следовательно, угол DCE равен углу DEC. Углы BCA и DCE равны как вертикальные. Следовательно, угол BAC равен углу DEC.

На рисунке $AB = BC$, угол 1 равен углу 2. Докажите, что $AD = CD$.



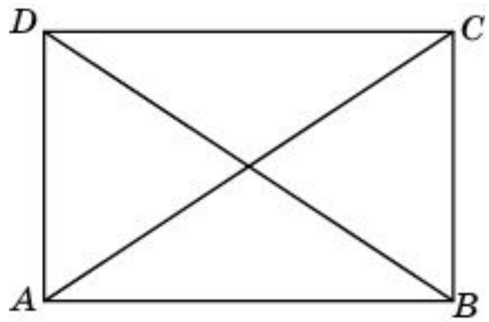
Решение. Проведем отрезок AC. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Следовательно, угол BAC равен углу BCA. Из этого равенства и равенства углов 1 и 2 следует равенство углов DAC и DCA. Значит, треугольник DAC равнобедренный и, следовательно, $AD = CD$.

Докажите, что если противоположные углы четырехугольника равны, то он – параллелограмм.



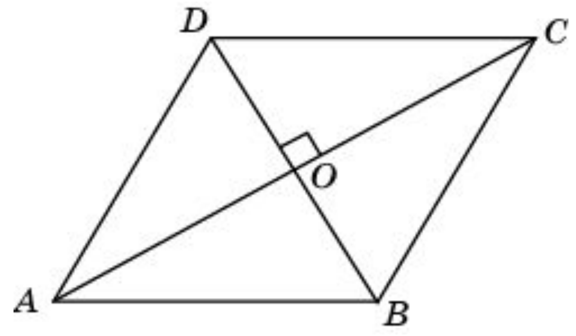
Решение. Пусть *ABCD* – четырехугольник, у которого противоположные углы равны. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то сумма двух односторонних углов будет равна 180° и, следовательно, противоположные стороны этого четырехугольника параллельны, т.е. он – параллелограмм.

Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.



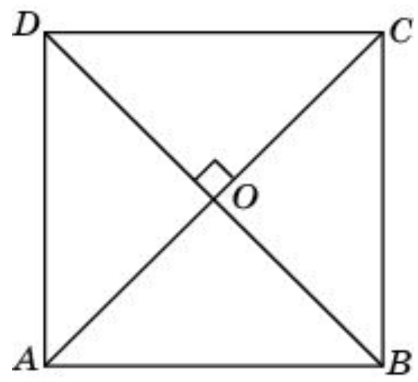
Решение. Пусть в прямоугольнике *ABCD* проведены диагонали *AC* и *BD*. Треугольники *ABC* и *BAD* равны по трем сторонам. Следовательно, угол *ABC* равен углу *BAD*. В сумме эти углы составляют 180º, как односторонние углы при параллельных *BC* и *AD* и секущей *AB*. Следовательно, эти углы равны 90º и, значит, *ABCD* – прямоугольник.

Докажите, что если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то он является ромбом.



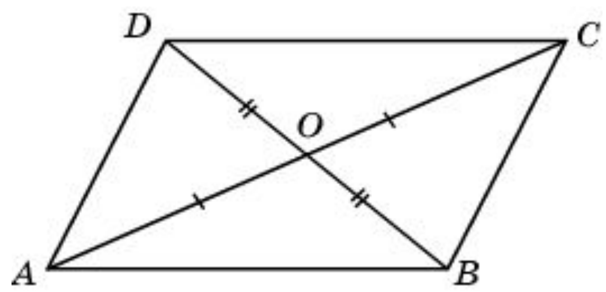
Решение. Пусть диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Прямоугольные треугольники AOB и AOD равны по двум катетам. Следовательно, $AB = AD$ и, значит, параллелограмм $ABCD$ является ромбом.

Докажите, что если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то он является квадратом.



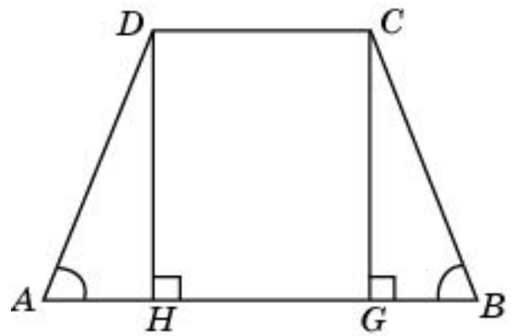
Решение. Пусть диагонали прямоугольника *ABCD* перпендикулярны и пересекаются в точке *O*. Прямоугольные треугольники *AOB* и *AOD* равны по двум катетам. Следовательно, *AB* = *AD* и, значит, *ABCD* – квадрат.

Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.



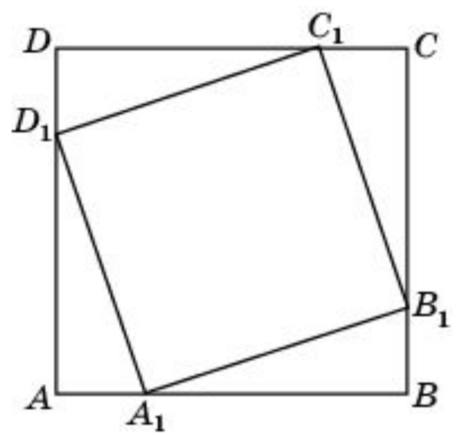
Решение. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, угол OAB равен углу OCD и, значит, отрезки AB и CD равны и параллельны. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Докажите, что если два угла при основании трапеции равны, то трапеция – равнобедренная.



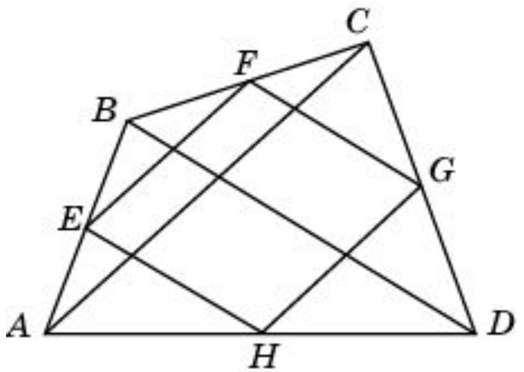
Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ ($AB \parallel DC$) равны острые углы A и B. Из вершин C и D опустим высоты CG и DH на основание AB. Прямоугольные треугольники BCG и ADH равны по катету и острому углу. Следовательно, $BC = AD$ и, значит, трапеция $ABCD$ – равнобедренная.

На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложены равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат.



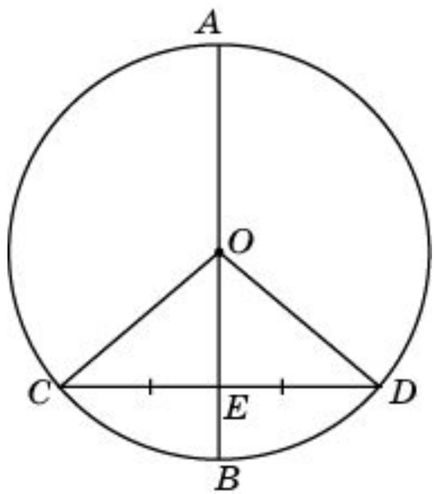
Решение. Все четыре прямоугольных треугольника равны по двум катетам. Следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – ромб. Кроме того, каждый угол этого четырехугольника равен 180^o минус сумма острых углов прямоугольного треугольника, т.е. равен 90^o. Следовательно, $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат.

Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



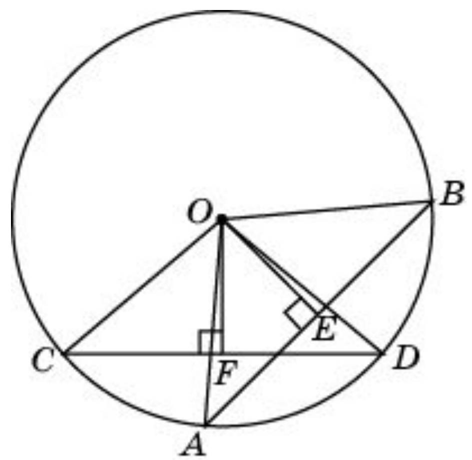
Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точки E, F, G, H являются серединами сторон соответственно AB, BC, CD, DA. В треугольнике ABC EF – средняя линия и, значит, параллельна AC. Аналогично GH параллельна AC. Следовательно, EF параллельна GH. Аналогично FG параллельна EH. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $EFGH$ параллельны и, следовательно, он является параллелограммом.

Докажите, что диаметр, проведенный через середину хорды той же окружности, отличной от диаметра, перпендикулярен этой хорде.



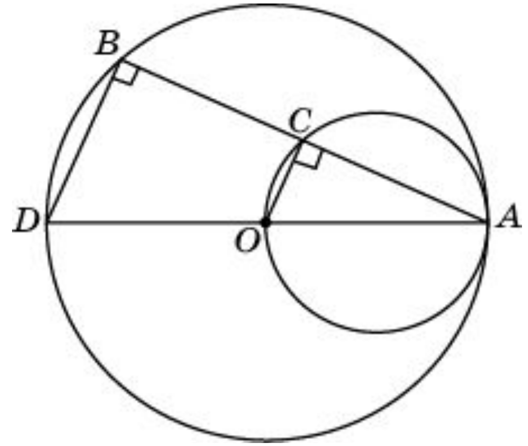
Решение. Пусть AB – диаметр окружности с центром O, проходящий через середину E хорды CD, отличной от диаметра. В равнобедренном треугольнике OCD отрезок OE является медианой и, следовательно, высотой. Значит, AB перпендикулярна CD.

Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от центра окружности.



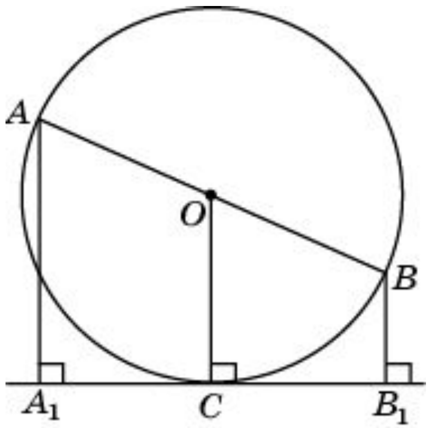
Решение. Пусть AB и CD – равные хорды окружности с центром O. OE, OF – перпендикуляры, опущенные соответственно на AB и CD. Докажем, что $OE = OF$. Действительно, треугольники OAB и OCD – равнобедренные и равны по трем сторонам. Следовательно, их соответствующие высоты OE и OF также равны.

Две окружности касаются внутренним образом, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что всякая хорда большей окружности, проходящая через точку касания, делится меньшей окружностью пополам.



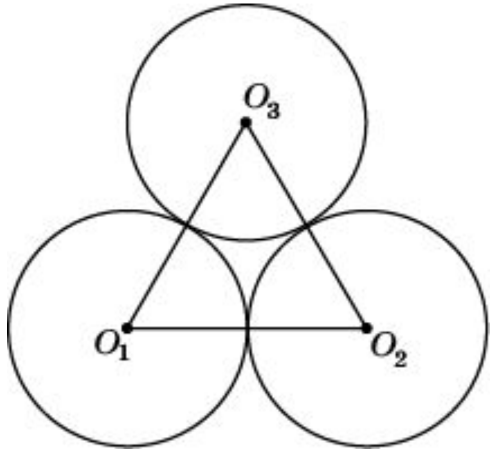
Решение. Пусть две окружности касаются внутренним образом, причем меньшая окружность проходит через центр O большей. AB – хорда большей окружности, проходящая через точку касания A и пересекающая меньшую окружность в точке C. Докажем, что $AC = BC$. Проведем диаметр AD. В треугольнике ABD $OA = OD$, OC параллельна DB. Следовательно, $AC = BC$.

Из концов диаметра AB окружности опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на касательную. Докажите, что точка касания C является серединой отрезка A_1B_1.



Решение. Отрезок OC, соединяющий центр окружности и точку касания, перпендикулярен касательной. Следовательно, OC – средняя линия трапеции ABB_1A_1, значит $A_1C = CB_1$.

Три окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.



Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 – центры окружностей одинакового радиуса, попарно касающихся друг друга. Так как расстояние между центрами любых двух из этих окружностей равно удвоенному радиусу, треугольник $O_1O_2O_3$ – равносторонний.