Расчет электрического сопротивления бесконечного каркаса
(the calculation of electric resistance of the endless frame)

Семичастнов А.С.
РГУНГ (НИУ) им. И.М. Губкина
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Иванов В. И.

Постановка задачи

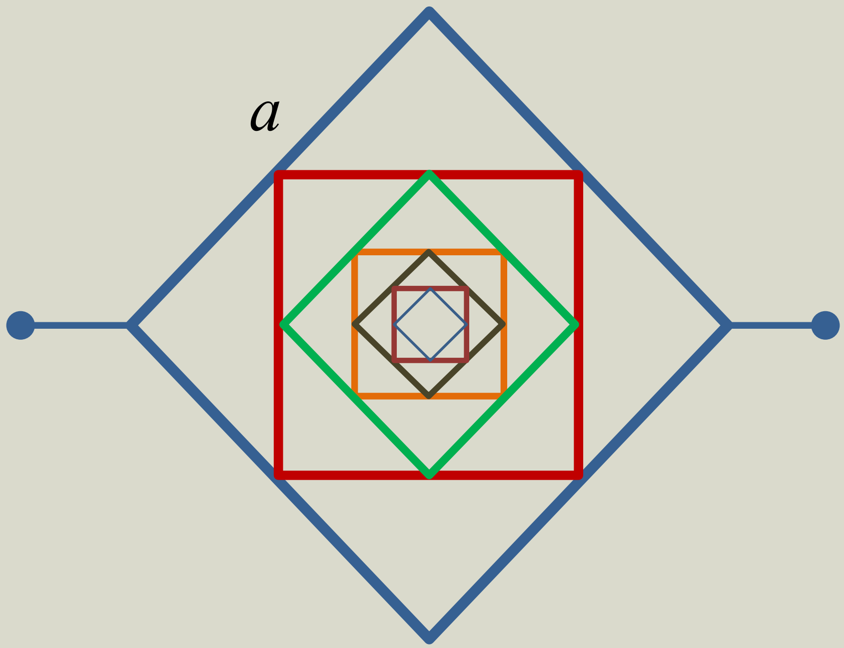
Рассматривается каркас, составленный из бесконечного числа вписанных друг в друга квадратов, стороны которых являются однородными проводниками определённого сечения.
Все проводники состоят из материала с удельной проводимостью σ.

$$R = \frac{L}{\sigma \cdot S} = r \cdot R_o = r \cdot \frac{a}{\sigma \cdot S_o}$$

$$\frac{L_n}{L_{n+1}} = \frac{l_n}{l_{n+1}} = \sqrt{2}; \quad \frac{S_n}{S_{n+1}} = k; \quad L_o = a$$

$$L_n, \quad l_n = L_n / a, \quad S_n -$$

длина, безразмерная длина и сечение стороны *n*-го вписанного квадрата

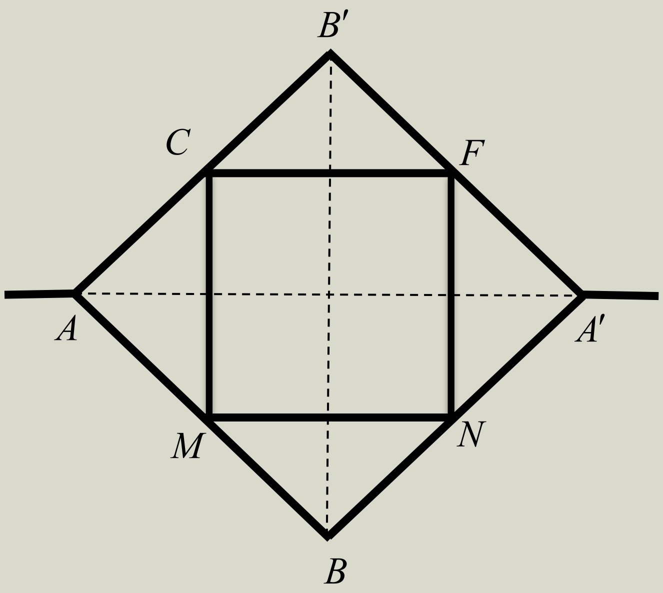


Условия симметричности

относительно оси AA'

Ток не будет перетекать из одной половины в другую.

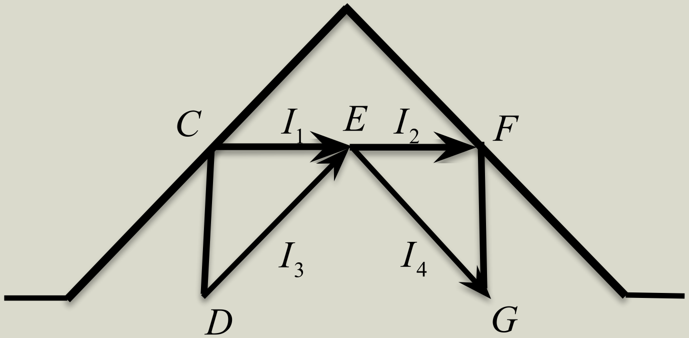
$R_{общ} = R/2.$



относительно оси BB'

$I_1 = I_2,\ I_3 = I_4.$

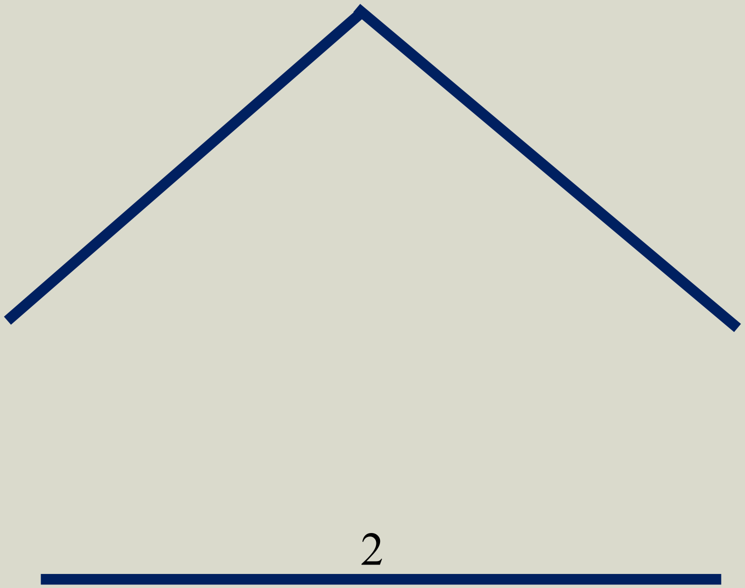
Следовательно, ток не перетекает из проводника DE в проводник EF. Поэтому можно разъединить проводники CEF и DEG в т. E.



Получение рекуррентной формулы

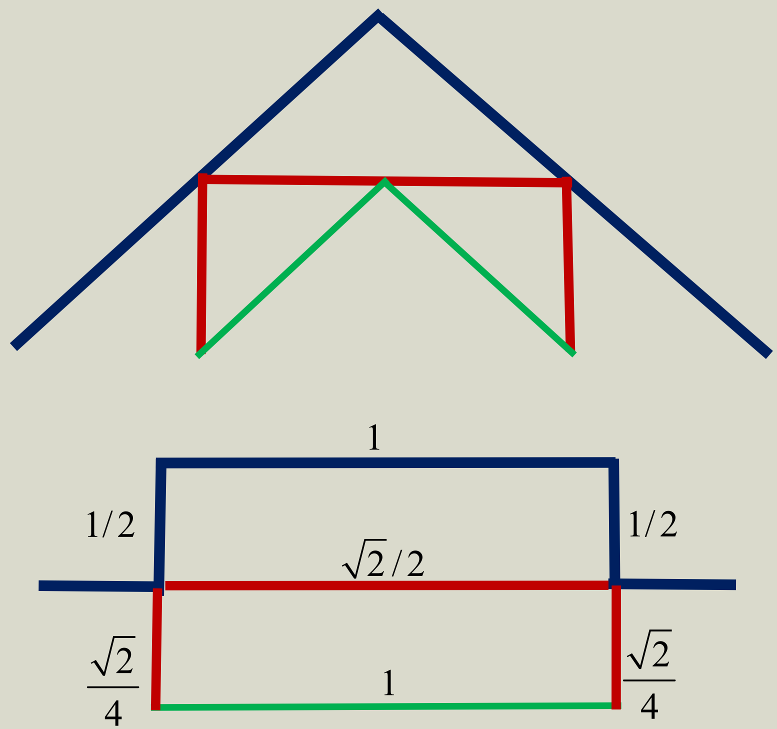
Нечетное количество квадратов

а) 1



$$r_1 = 2$$

б)3

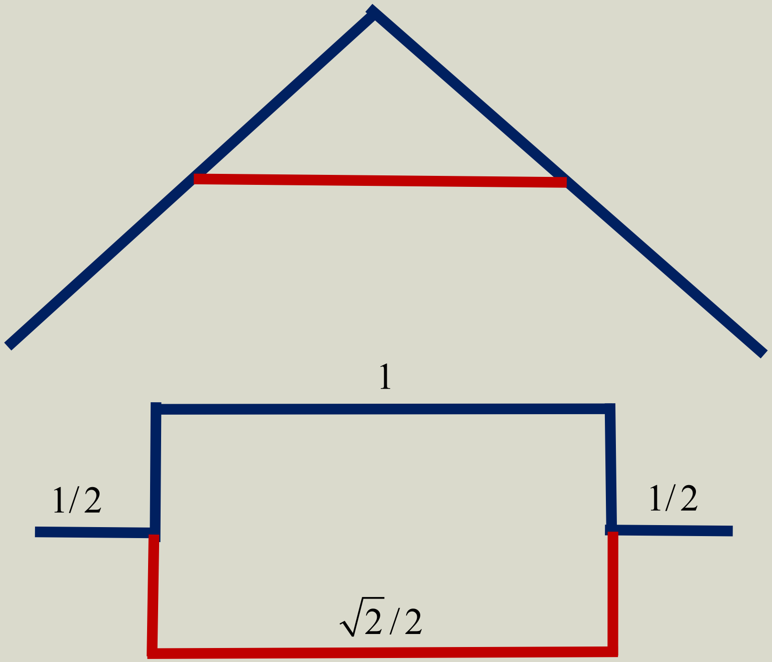


$$r_3 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1} + \cfrac{1}{k\cfrac{\sqrt{2}}{2}} + \cfrac{1}{k\cfrac{\sqrt{2}}{2} + \cfrac{k^2}{2}2}}$$

Получение рекуррентной формулы

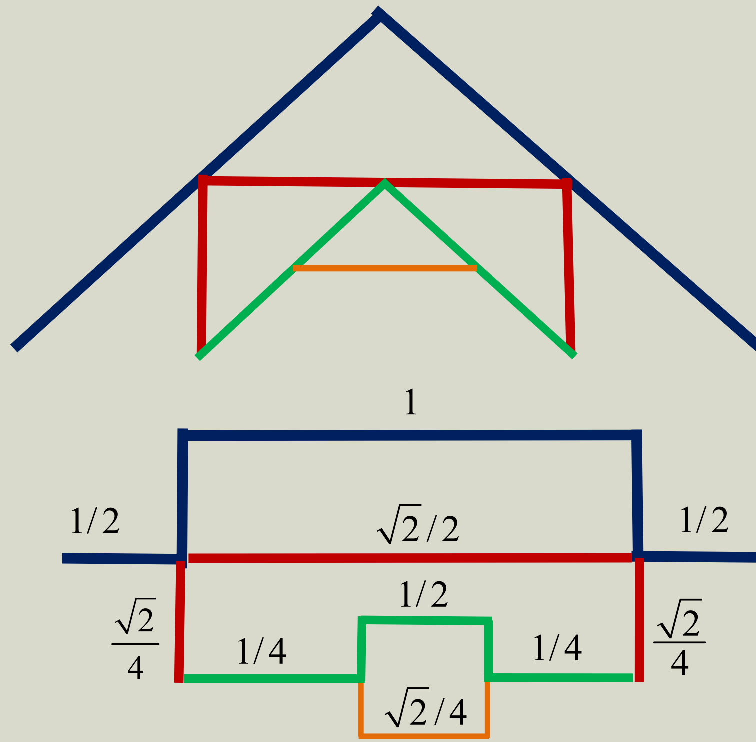
Четное количество квадратов

а)2



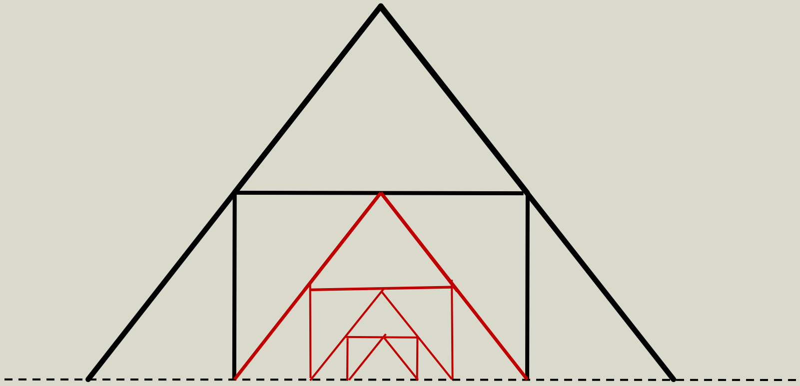
$$r_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{2}}{k \cdot 2}}$$

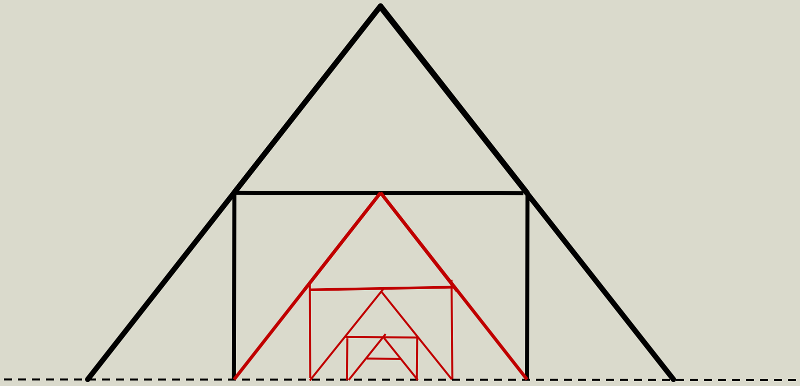
б)4



$$r_4 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1} + \cfrac{1}{k\cfrac{\sqrt{2}}{2}} + \cfrac{1}{k\cfrac{\sqrt{2}}{2} + \cfrac{k^2}{2}\left(1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{2}}{k \cdot 2}}\right)}}$$

Получение рекуррентной формулы





$$r_{2n+3}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cfrac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot r_{2n+1}}}$$

$$r_{2n+2}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cfrac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot r_{2n}}}$$

$$r_{n+2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cfrac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot r_{n}}}$$

Существование предела последовательности

$r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ Предположим, что $r_n > r_{n+1}$, покажем, что $r_{n+2} > r_{n+3}$,

Сравним
$$r_{n+3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{k^2}{2}\cdot r_{n+1}}} \vee 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{k^2}{2}\cdot r_n}} = r_{n+2}$$

$$\frac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{k^2}{2}\cdot r_{n+1}} \wedge \frac{1}{k\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{k^2}{2}\cdot r_n} \Leftrightarrow r_{n+1} \vee r_n \Rightarrow \vee \equiv <, \text{т.е.} \quad r_{n+3} < r_{n+2}.$$

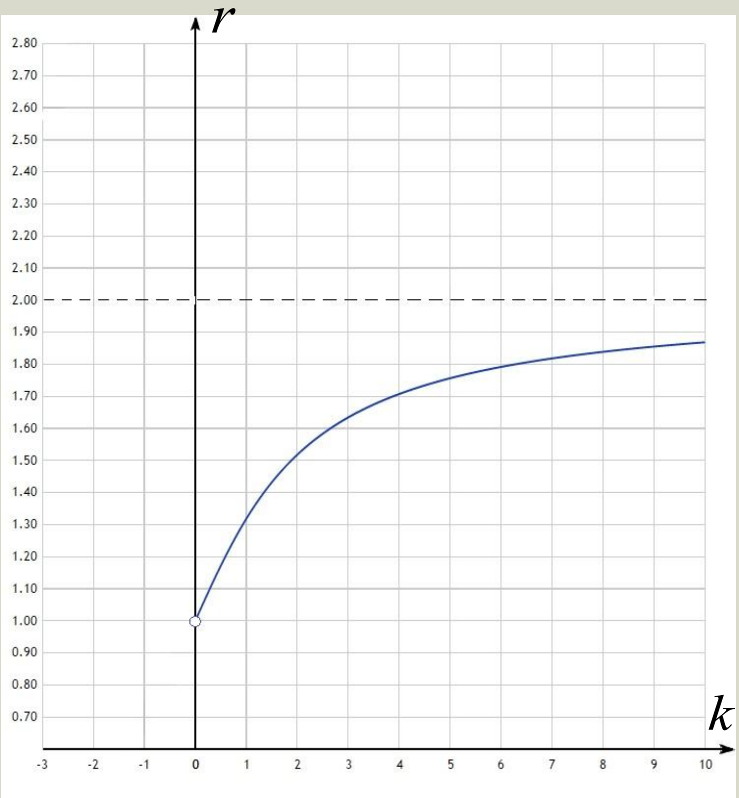
Очевидно, $r_n \geq 1.$

По теореме Вейерштрасса последовательность r_n имеет предел

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_{n+2} = r.$ Тогда, $r = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{2}{k\sqrt{2}} + \frac{2}{k\sqrt{2} + k^2\cdot r}}$

$$r = \frac{-\left(4 - 2k^2\right) + 2\sqrt{k^4 + 2\sqrt{2}k^3 + 4k^2 + 4\sqrt{2}k + 4}}{2\left(k^2 + \sqrt{2}k\right)}, \quad R = \frac{a}{\sigma\cdot S_o}\cdot r.$$

Анализ зависимости r(k)



$$r = \frac{-(4-2k^2) + 2\sqrt{k^4 + 2\sqrt{2}k^3 + 4k^2 + 4\sqrt{2}k + 4}}{2(k^2+\sqrt{2}k)}$$

Предельные случаи:

1. $k \to +\infty$ (отсутствуют внутренние проводники)

$$\lim_{k\to+\infty} r(k) = 2$$

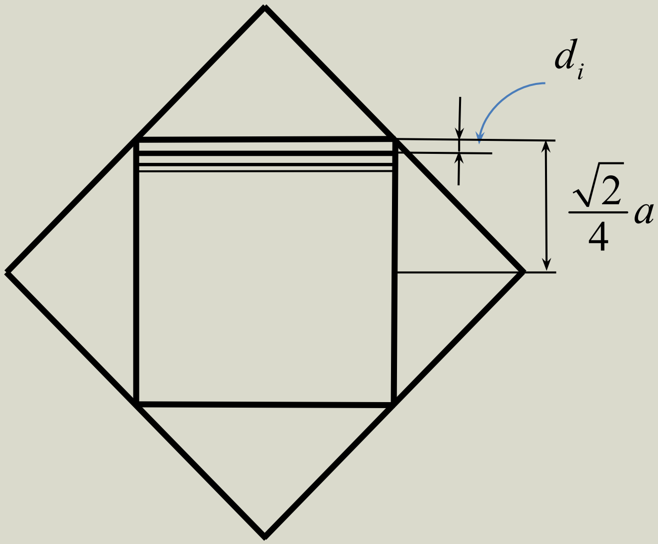
2. $k \to 0+$ (квадрат «заполнен проводником»)

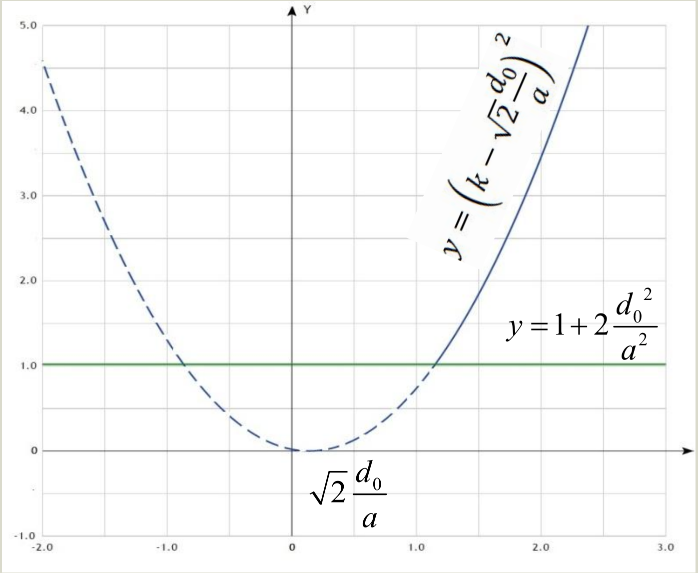
$$\lim_{k\to 0+} r(k) = 1$$ (внутренний «пробой»)

3. $k = 1$ (проводники одинаковой толщины)

$$r(1) = \frac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}-1}{1+\sqrt{2}} \approx 1.32$$

Оценка параметра k





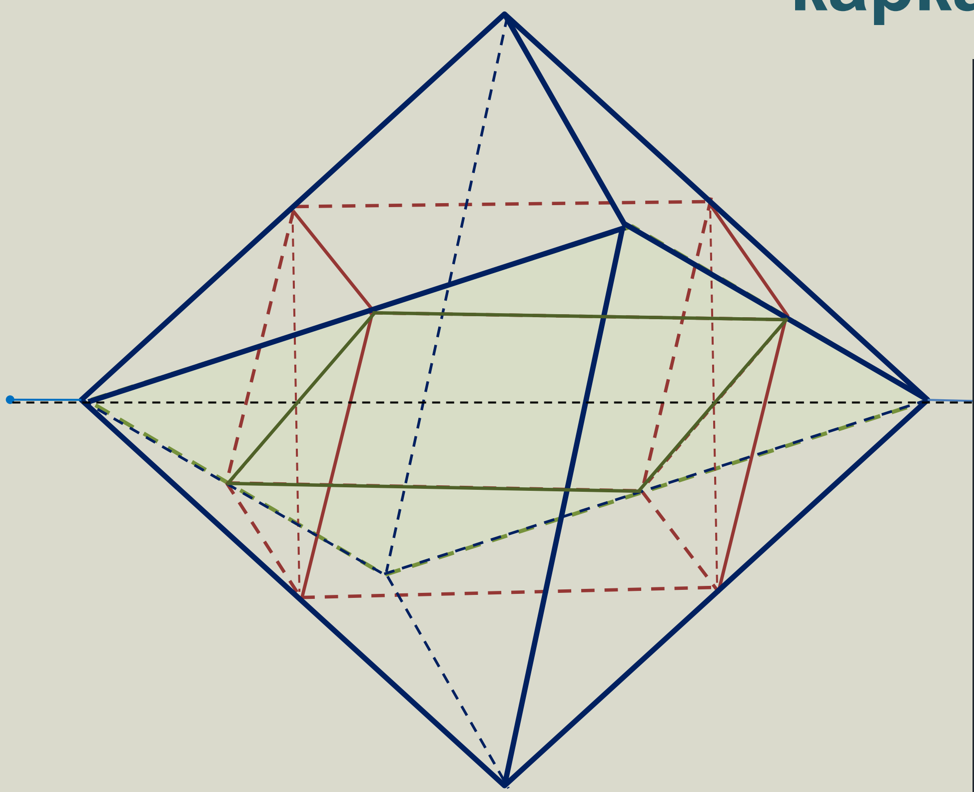
$k \geq 1, \quad \frac{d_o}{a} \ll 1$ - физические соображения

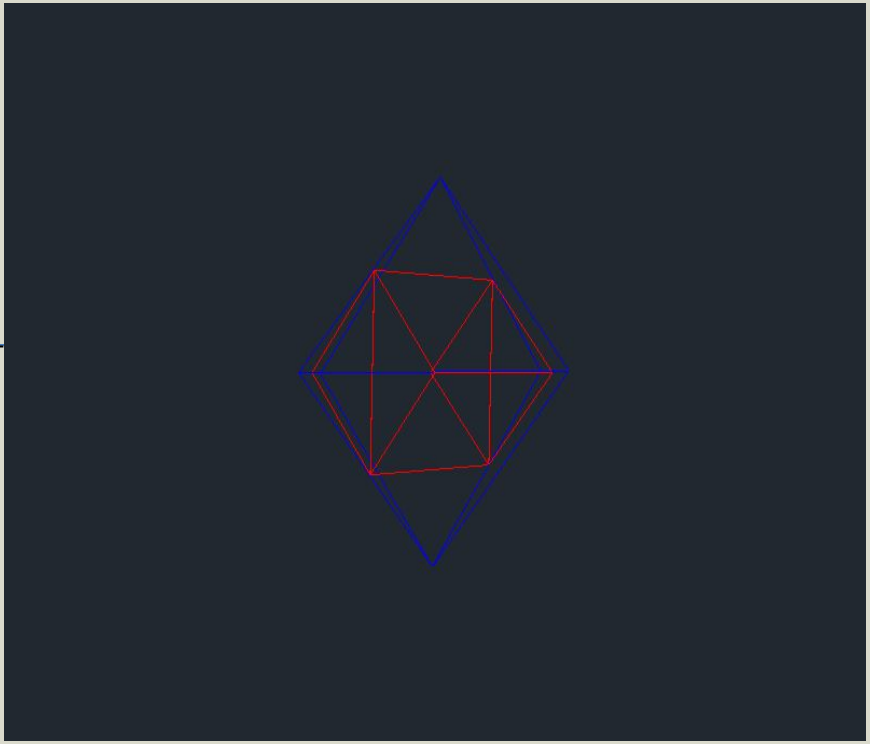
$$\sum_{n=1}^{\infty} d_i = \frac{d_0}{\sqrt{k}} + \frac{d_0}{k\sqrt{k}} + \frac{d_0}{k^2\sqrt{k}} + \cdots = \frac{d_0}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \leq \frac{\sqrt{2}a}{4}$$

$$\left(k - \sqrt{2}\frac{d_0}{a}\right)^2 \geq 1 + 2\frac{d_0^{\,2}}{a^2}$$

$$k \geq \sqrt{2}\cdot\frac{d_o}{a} + \sqrt{1 + 2\left(\frac{d_o}{a}\right)^2} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{d_o}{a} + 1 = k_c$$

Объемный каркас





$$R_{3D}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{\sigma\cdot S_o}\cdot\frac{-\left(4-2k^2\right)+2\sqrt{k^4+2\sqrt{2}k^3+4k^2+4\sqrt{2}k+4}}{2\left(k^2+\sqrt{2}k\right)}$$

Вывод
ы

1. Получена рекуррентная формула для сопротивления каркаса в зависимости
   от числа вложенных квадратов.
2. Получена формула для сопротивления бесконечного каркаса.
3. Рассмотрены предельные случаи отношения сечений проводников:
   отсутствие внутренних проводников и внутренний «пробой».
4. Вычислено сопротивление 3-х мерного каркаса с использованием
   полученных формул.

Спасибо за внимание!