

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Форма и принципы представления
математических моделей

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

- ◉ Моделирование - это замещение некоторого объекта А другим объектом Б. Замещаемый объект А называется оригиналом или объектом моделирования, а замещающий Б - моделью.
- ◉ *Целью моделирования* являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; а модель здесь выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта.

Слово "Модель" происходит от латинского modus (копия, образ, очертание).

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

- модели
 - вещественные
 - натурные
 - физические
 - математические
 - идеальные
 - наглядные
 - знаковые
 - математические

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ

- ◉ *Вещественные натурные модели* - это реальные объекты, процессы и системы, над которыми выполняются эксперименты научные, технические и производственные.
- ◉ *Вещественные физические модели* - это макеты, муляжи, воспроизводящие физические свойства оригиналов (кинематические, динамические, гидравлические, тепловые, электрические, световые модели).
- ◉ *Вещественные математические модели* - это аналоговые, структурные, геометрические, графические, цифровые и кибернетические модели.

ИДЕАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

- ◉ *Идеальные наглядные модели* - это схемы, карты, чертежи, графики, графы, аналоги, структурные и *геометрические модели*.
- ◉ *Идеальные знаковые модели* - это символы, алфавит, языки программирования, упорядоченная запись, топологическая запись, сетевое представление.
- ◉ *Идеальные математические модели* - это аналитические, функциональные, имитационные, комбинированные модели.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- ◉ *Математическое моделирование* - это средство изучения реального объекта, процесса или системы путем их замены *математической моделью*, более удобной для экспериментального исследования с помощью ЭВМ.
- ◉ *Математическая модель* является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженным в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала.
Математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и *внешние связи*.

математическая модель реального объекта, процесса или системы обычно представляется в виде системы функционалов

$$\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0,$$

где X - вектор входных переменных, $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]^t$,
 Y - вектор выходных переменных, $Y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_N]^t$,
 Z - вектор внешних воздействий, $Z = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_N]^t$,
 t - координата времени.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Построение *математической модели* заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат.

- Предварительно производится выявление и исключение из рассмотрения факторов, несущественно влияющих на конечный результат. На основе данных эксперимента выдвигаются гипотезы о связи между величинами, выражающими конечный результат, и факторами, введенными в *математическую модель*.
- Конечная цель* - формулирование математической задачи, решение которой с необходимой точностью выражает результаты, интересующие специалиста. Математическая модель обычно включает значительно меньшее число факторов, чем в реальной действительности.

ФОРМА И ПРИНЦИПЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

По принципам построения *математические модели* разделяют на:

1. аналитические
2. имитационные

В аналитических моделях процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных *функциональных зависимостей*.

Аналитическая модель разделяется на типы в зависимости от математической проблемы:

1. уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные),
2. аппроксимационные задачи (*интерполяция, экстраполяция, численное интегрирование и дифференцирование*),
3. задачи оптимизации,
4. стохастические проблемы.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- В *имитационном моделировании* функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов. Алгоритмы имитируют реальные элементарные явления, составляющие процесс или систему с сохранением их *логической структуры* и последовательности протекания во времени.
- *Имитационное моделирование* позволяет по исходным данным получить сведения о *состояниях процесса* или системы в определенные моменты времени, однако прогнозирование поведения объектов, процессов или систем здесь затруднительно.
- *Имитационные модели* - это проводимые на ЭВМ *вычислительные эксперименты с математическими моделями*, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

В зависимости от характера исследуемых реальных процессов и систем *математические модели* могут быть:

1. детерминированные
2. стохастические

В детерминированных моделях предполагается отсутствие всяких случайных воздействий, элементы модели (переменные, математические связи) достаточно точно установлены, поведение системы можно точно определить. При построении детерминированных моделей чаще всего используются алгебраические уравнения, интегральные уравнения, матричная алгебра.

Стохастическая модель учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

По виду входной информации *математические модели* разделяются на:

1. непрерывные,
2. дискретные.

Если информация и параметры являются непрерывными, а математические связи устойчивы, то модель - непрерывная. И наоборот, если информация и параметры - дискретны, а связи неустойчивы, то и *математическая модель* - дискретная.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

По поведению моделей во времени они разделяются на:

- 1.статические,
- 2.динамические.

Статические модели описывают поведение объекта, процесса или системы в какой-либо момент времени. Динамические модели отражают поведение объекта, процесса или системы во времени.

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

По степени соответствия между *математической моделью* и реальным объектом, процессом или системой *математические модели* разделяют на:

1. *изоморфные*
2. *гомоморфные*

Модель называется *изоморфной*, если между нею и реальным объектом, процессом или системой существует полное поэлементное соответствие, например, как чертеж и изготовленное по нему изделие, негатив и полученный с него отпечаток. Во многих случаях изоморфные модели оказываются чрезмерно сложными и неудобными для использования.

Модель называется *гомоморфной* - если существует соответствие лишь между наиболее значительными составными частями объекта и модели.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Особенности построения
математических моделей

Математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и *внешние связи*.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

план

1. тщательно проанализировать реальный объект или процесс;
2. выделить его наиболее существенные черты и свойства;
3. определить переменные, т.е. параметры, значения которых влияют на основные черты и свойства объекта;
4. описать зависимость основных свойств объекта, процесса или системы от значения переменных с помощью логико-математических соотношений (уравнения, равенства, неравенства, логико-математические конструкций);
5. выделить внутренние связи объекта, процесса или системы с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций;
6. определить внешние связи и описать их с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Математическое моделирование, кроме исследования объекта, процесса или системы и составления их математического описания, также включает:

1. построение алгоритма, моделирующего поведение объекта, процесса или системы;
2. проверка *адекватности модели* и объекта, процесса или системы на основе вычислительного и натурного эксперимента;
3. корректировка модели;
4. использование модели.

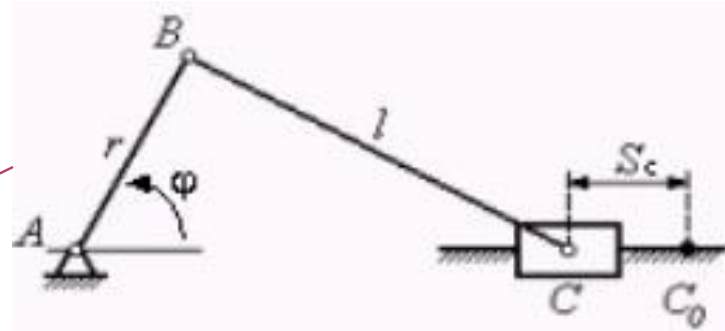
ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Математическое описание исследуемых процессов и систем зависит от:

1. природы реального процесса или системы и составляется на основе законов физики, химии, механики, термодинамики, гидродинамики, электротехники, теории *пластичности*, теории упругости и т.д.
2. требуемой достоверности и точности изучения и исследования реальных процессов и систем.

МОДЕЛЬ КШМ

Кинематическая схема



Кинематическая модель

$$\begin{cases} S_c = \gamma(1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi); \\ V_c = (\frac{d\varphi}{dt})\gamma(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi); \\ A_c = (\frac{d^2\varphi}{dt^2})\gamma(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi); \end{cases}$$

уравнение движения механизма
уравнение для скорости движения
уравнение для ускорения

- ✓ Не учитываются конструктивные формы и расположение масс, входящих в механизм тел, и все тела механизма заменяются отрезками прямых;
- ✓ при построении математической модели движения рассматриваемого механизма не учитывается упругость входящих в механизм тел, т.е. все звенья рассматриваются как абстрактные абсолютно жесткие тела;
- ✓ не учитывается погрешность изготовления звеньев, зазоры в кинематических парах A, B, C и т.д.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

когда наши знания об изучаемом объекте, процессе или системе недостаточны, то при *построении математической модели* приходится делать дополнительные предположения, которые носят характер гипотез.

Такая модель называется **гипотетической**.

Выводы, полученные в результате исследования гипотетической модели, носят условный характер. Для проверки выводов необходимо сопоставить результаты исследования модели на ЭВМ с результатами натурального эксперимента.

Основным критерием истинности является эксперимент!

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В задачах проектирования или исследования поведения реальных объектов, процессов или систем математические модели должны отражать реальные физические нелинейные процессы, протекающие в них. При этом параметры (переменные) этих процессов связаны между собой нелинейными физическими законами. Чаще всего используются математические модели типа ДНА:

- ✓ Д – модель детерминированная, отсутствует (точнее не учитывается) влияние случайных процессов.
- ✓ Н – модель непрерывная, информация и параметры непрерывны.
- ✓ А – модель аналитическая, функционирование модели описывается в виде уравнений (линейных, нелинейных, систем уравнений, дифференциальных и интегральных уравнений).

Первый этап - построение **математической модели** рассматриваемого объекта, процесса или системы, т.е. замена прикладной задачи математической.

Второй этап решения прикладной задачи – поиск или разработка **метода решения** сформулированной **математической задачи**. Метод должен быть удобным для его реализации на ЭВМ, обеспечивать необходимое качество решения.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

- ◎ точные методы решения задач
- ◎ численные методы решения задач

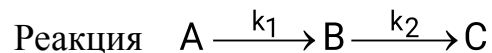
точные методы - имеется аналитическое выражение
(ответ удастся получить в виде формул)

численные методы - решение сложных математических задач сводится к последовательному выполнению большого числа простых арифметических операций.



Прикладную задачу можно считать практически решенной, если ее можно решить с нужной степенью точности.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА



проводится в аппарате идеального вытеснения. Объем аппарата 0.5 м^3 , скорость подачи реагентов $0.05 \text{ м}^3/\text{с}$. Исходные концентрации $C_A=0.8 \text{ моль/л}$, $C_B=C_C=0$. Реакция может проводиться при температурах от 300 до 350 К. Известны значения энергий активации и предэкспоненциальные множители в уравнении Аррениуса.

Определить, при какой температуре концентрация вещества В на выходе из аппарата будет наибольшей



ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ХИМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

$k =$

$$A \cdot e^{(-E/RT)}$$

$$dC_A/dt = -k_1 C_A$$

$$dC_B/dt = k_1 C_A - k_2 C_B$$

$$dC_C/dt = k_2 C_B$$

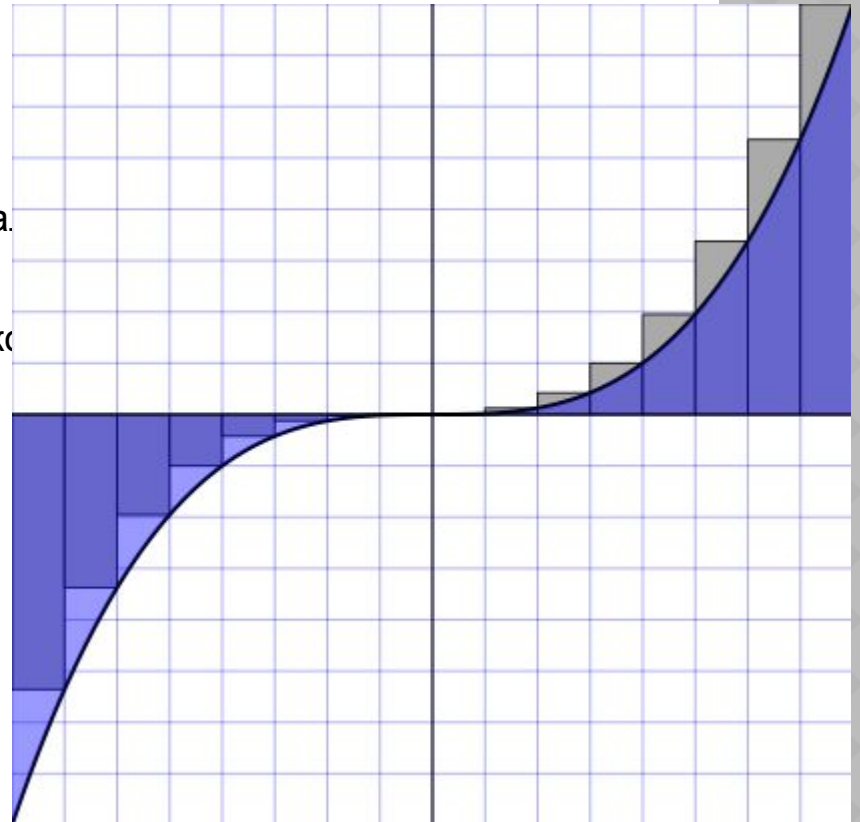
Что не учтено?

МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int_b^a f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\Delta x_i;$$

$x_1=a$ – нижний предел интегрирования;
 $x_{n+1}=b$ – верхний предел интегрирования;
 n – число отрезков, на которые разбит интервал.

Δx_i – длина элементарного отрезка;
 $f(x_i)$ – значение подынтегральной функции на концах отрезков интегрирования



ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Приближенные вычисления

ПРИЧИНЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

- ⊙ Несоответствие математической модели изучаемому реальному явлению
- ⊙ Погрешность исходных данных.
- ⊙ Погрешность метода решения (приближенные методы).
- ⊙ Погрешности округлений в арифметических и других действиях над числами.

ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА

- ⦿ *погрешность дискретизации*
- ⦿ *погрешность округления*

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

- ⊙ абсолютная погрешность $|\tilde{a} - a|$
- ⊙ *предельная абсолютная погрешность*

$$\Delta(\tilde{a}) \geq |\tilde{a} - a|$$

- ⊙ *относительная погрешность* $\frac{|\tilde{a} - a|}{\tilde{a}}$

- ⊙ *предельная относительная погрешность*

$$\delta(\tilde{a}) \geq \frac{|\tilde{a} - a|}{\tilde{a}}$$

$$\delta(\tilde{a}) \geq \frac{\Delta(\tilde{a})}{|\tilde{a}|}$$

ЗАПИСЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

$$a = \tilde{a} \pm \Delta(\tilde{a})$$

$$a = \tilde{a} (1 \pm \delta(\tilde{a}))$$

ЗНАЧАЩИЕ ЦИФРЫ

Значащими цифрами называются все цифры в его представлении, начиная с первой отличной от нуля слева.

Нуль считается значащей цифрой, если он расположен между значащими цифрами или стоит правее всех значащих.

0,38 - 2 значащих цифры, 0,308 — три,
0,3080 — четыре, 0,00308 — три.

Значащая цифра называется **верной в широком смысле** если абсолютная погрешность числа не превосходит одной единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Значащая цифра называется **верной в узком смысле** если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре.

В противном случае цифра считается **сомнительной**.

ЗНАЧАЩИЕ ЦИФРЫ

- предельная абсолютная погрешность определяется числом **десятичных знаков** после запятой: чем меньше десятичных знаков после запятой, тем больше $\Delta(\tilde{a})$
- Предельная относительная погрешность определяется числом **значащих цифр**: чем меньше значащих цифр, тем больше $\delta(\tilde{a})$

ОКРУГЛЕНИЕ

- Округлением (по дополнению) числа называется запись этого числа с меньшим количеством разрядов по следующему правилу: если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу.
- Погрешность округления по дополнению не превосходит по абсолютной величине половины единицы младшего оставляемого разряда.
- При вычислении результирующей погрешности, погрешность округления суммируется с первоначальной абсолютной погрешностью числа.

ДЕЙСТВИЯ НАД ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

- Предельная абсолютная погрешность алгебраической **суммы** равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.
- Относительная погрешность **суммы** заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.
- Относительная погрешность **произведения** или частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.
- Относительная погрешность n -ой **степени** приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как у целых, так и для дробных n).

ДЕЙСТВИЯ НАД ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

- При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков.
- При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.
- При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).
- При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа).
- Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается.
- Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.
- Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с K цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое даёт согласно вышеизложенным правилам $(K+1)$ цифру в результате.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Случайные величины

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ - среднее квадратичное отклонение, $f(x)$ - функция плотности вероятности, показывающая вероятность того, что величина x примет значение μ

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ - среднее квадратичное отклонение, $f(x)$ - функция плотности вероятности, показывающая вероятность того, что величина x примет значение μ

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ - среднее квадратичное отклонение, $f(x)$ - функция плотности вероятности, показывающая вероятность того, что величина x примет значение μ

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ - среднее квадратичное отклонение, $f(x)$ - функция плотности вероятности, показывающая вероятность того, что величина x примет значение μ

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

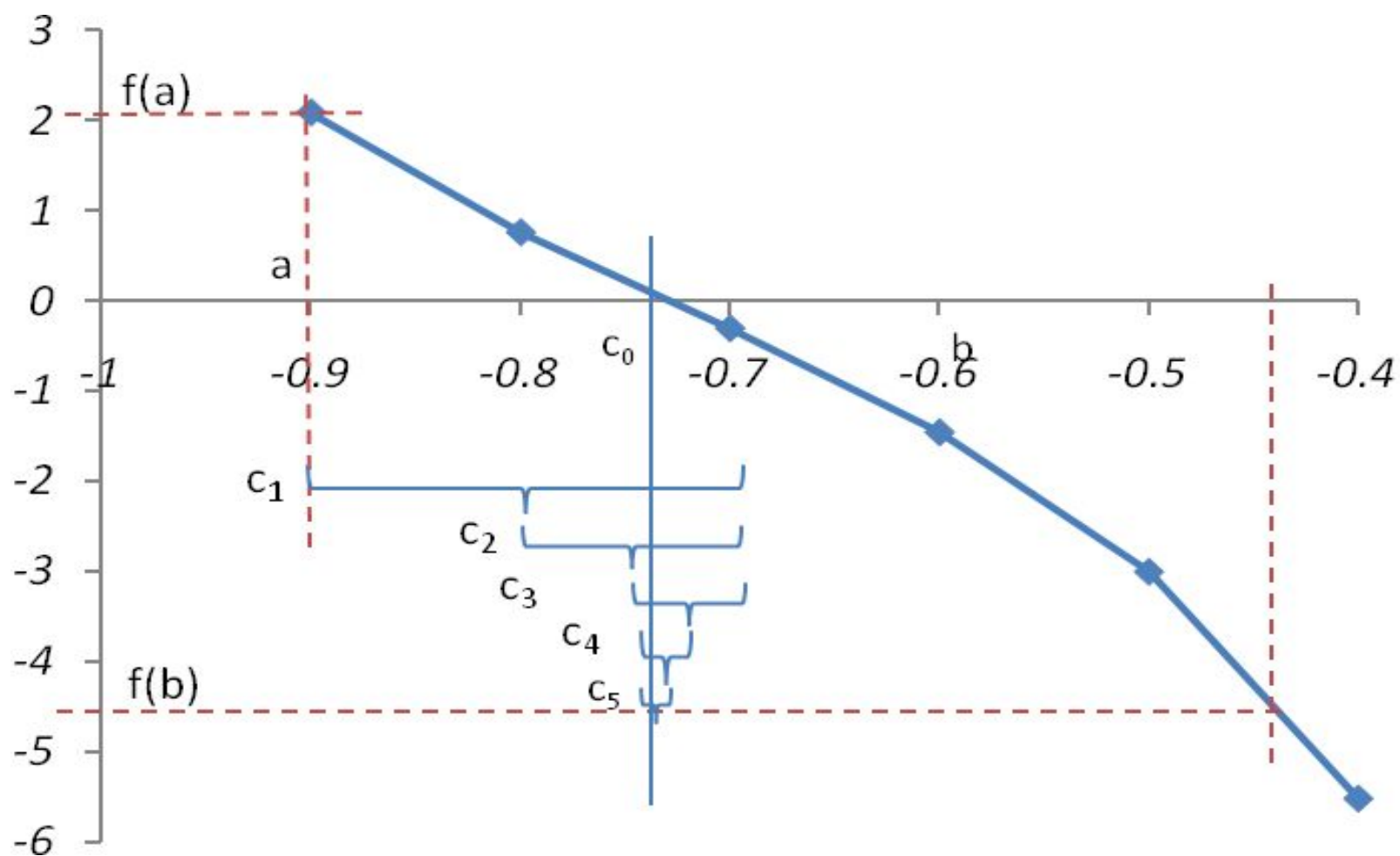
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ - среднее квадратичное отклонение, $f(x)$ - функция плотности вероятности, показывающая вероятность того, что величина x примет значение μ

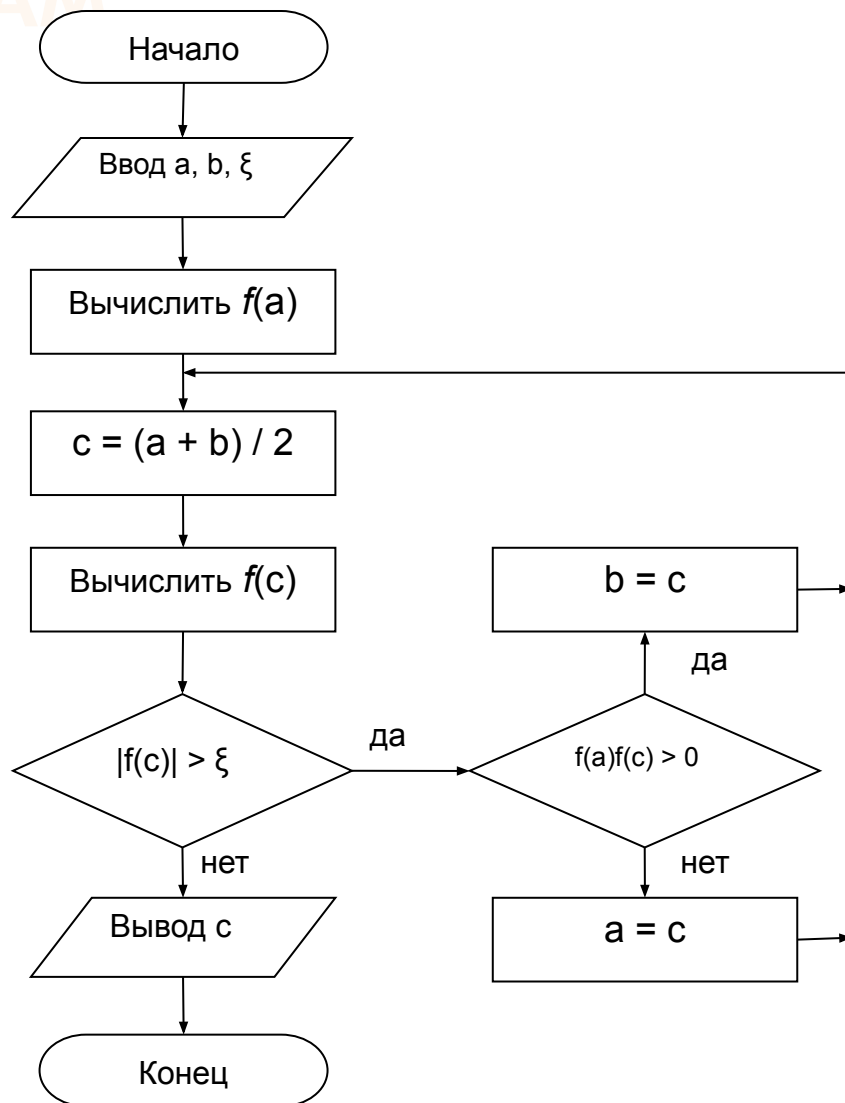
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

методы уточнения приближенных
значений уравнений

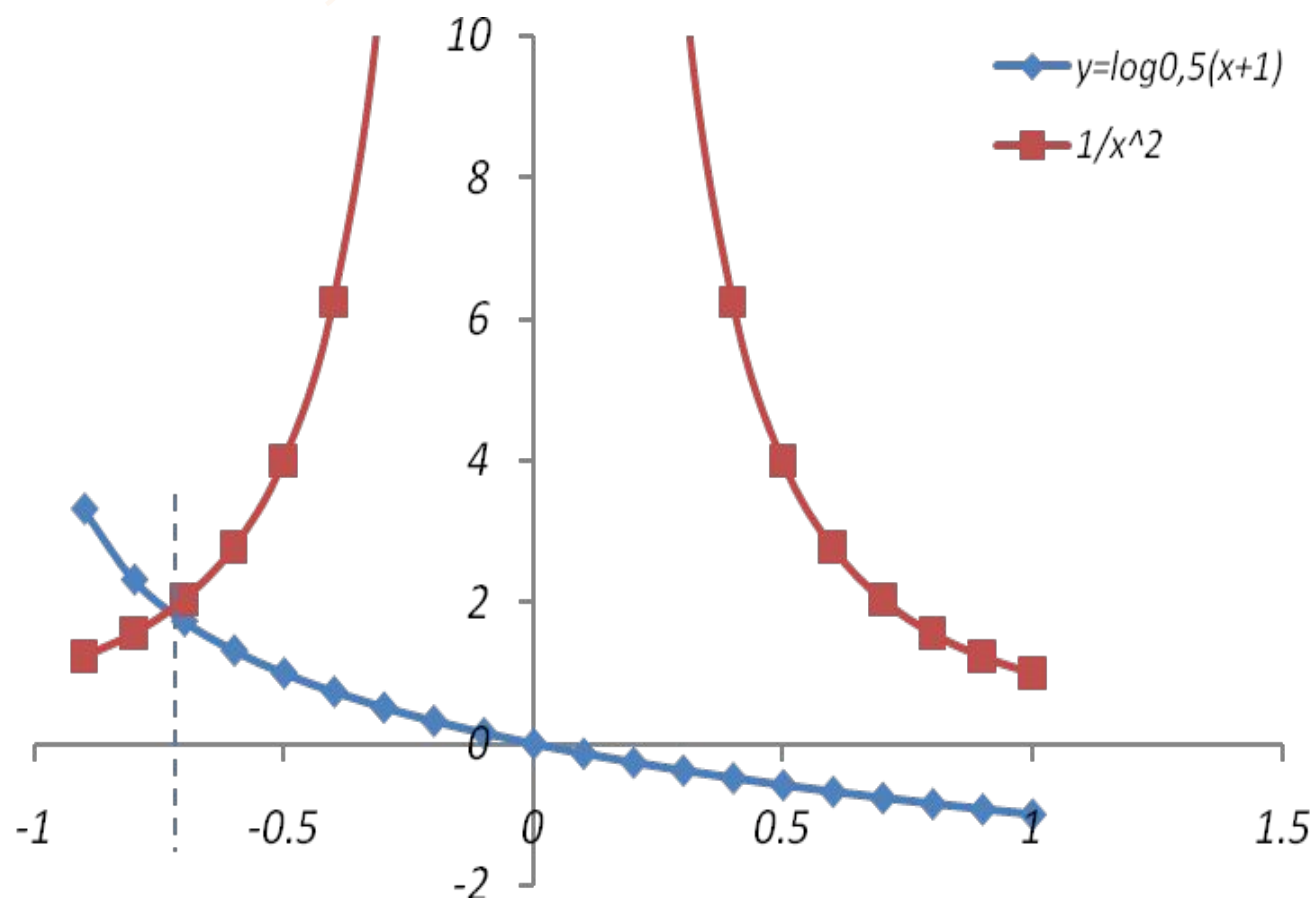
МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ



МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ



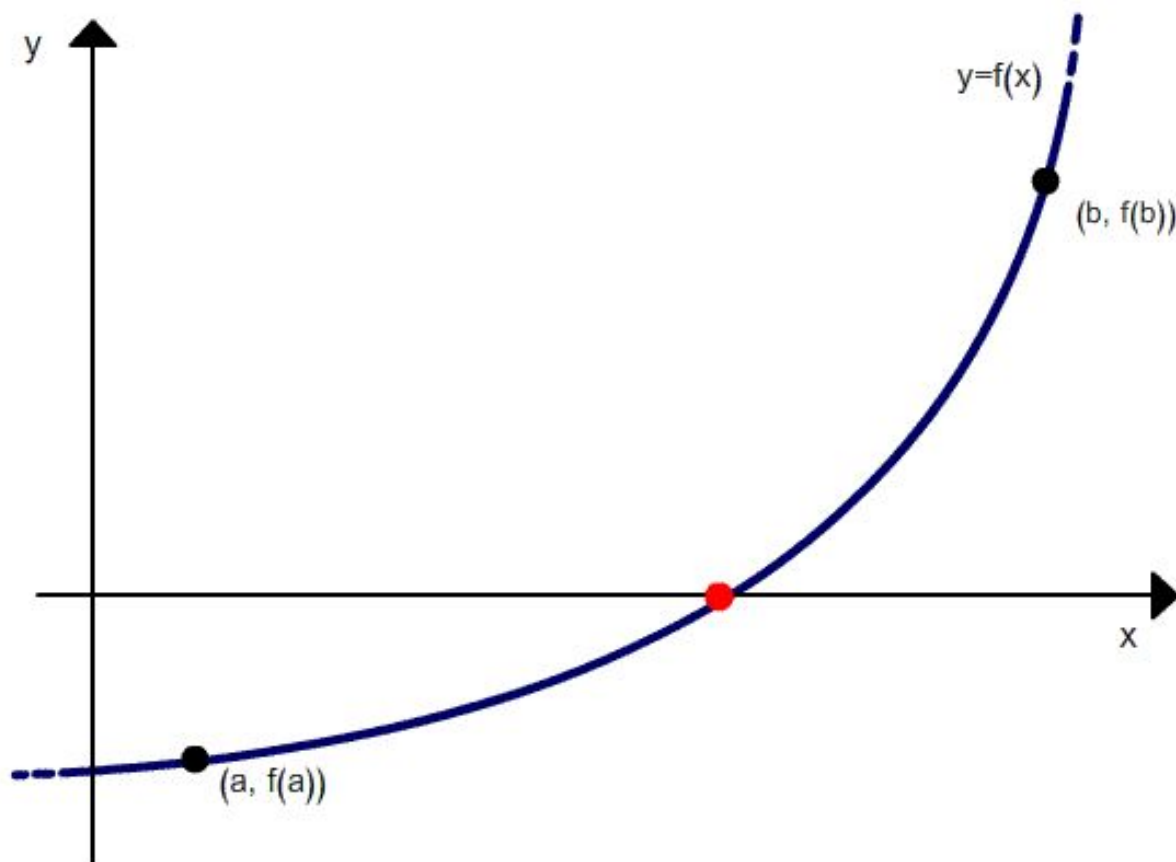
$$x^2 \cdot \log_{0,5}(x+1) = 1.$$



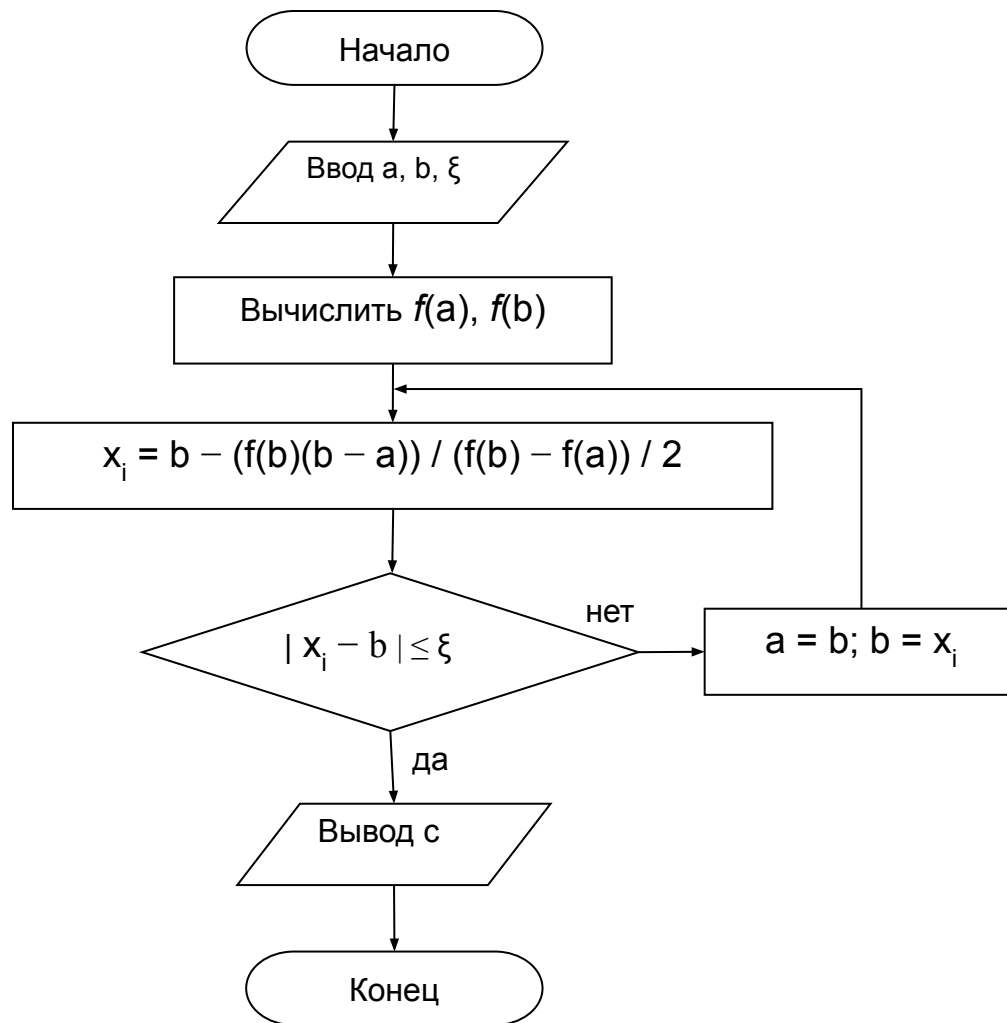
МЕТОД ХОРД

$$\frac{f(b) \cdot f''(b)}{0} > \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i)$$

$$\frac{f(a) \cdot f''(a)}{0} > \quad x_{i+1} = a + \frac{f(a)}{f(a) - f(x_i)}(x_i - a)$$

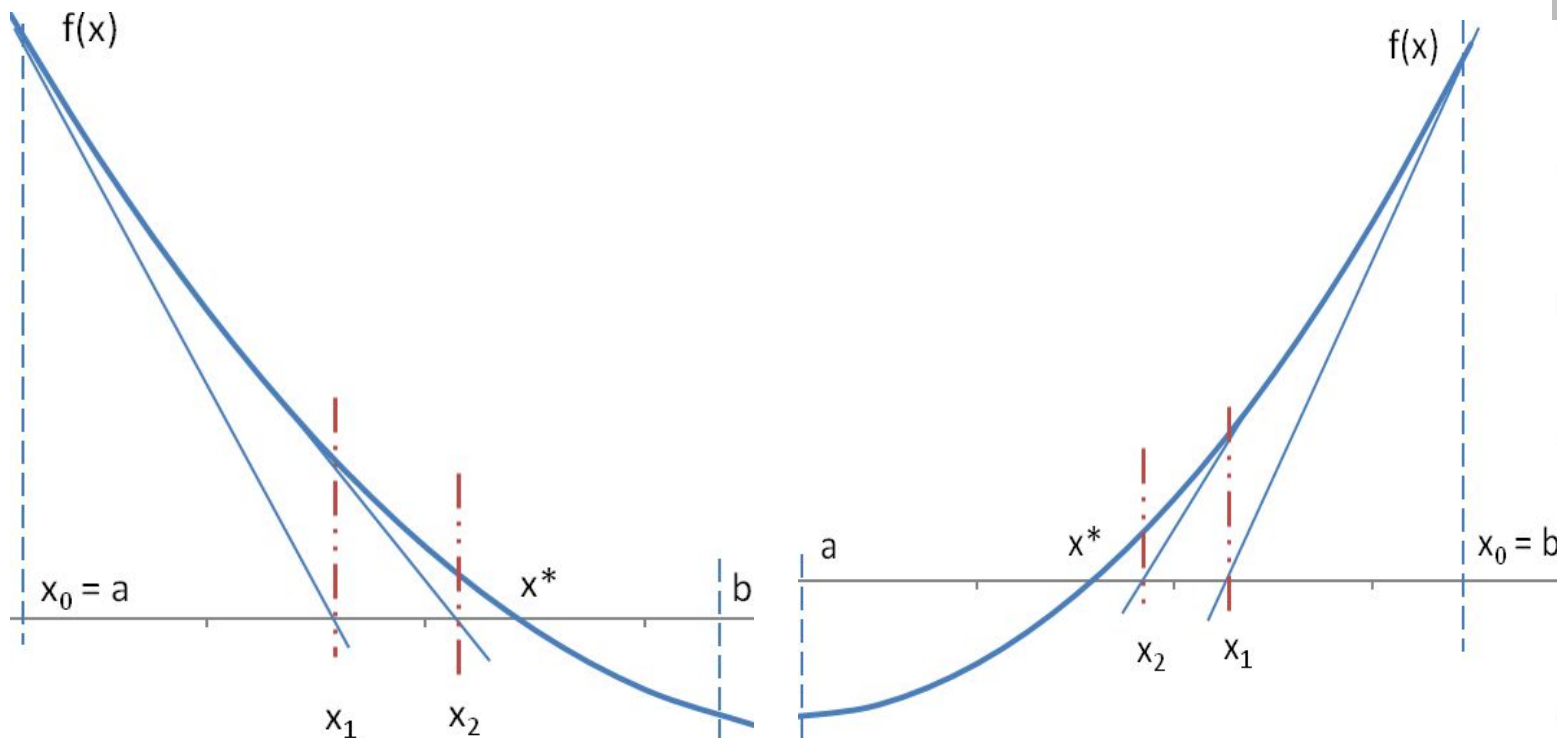


МЕТОД ХОРД

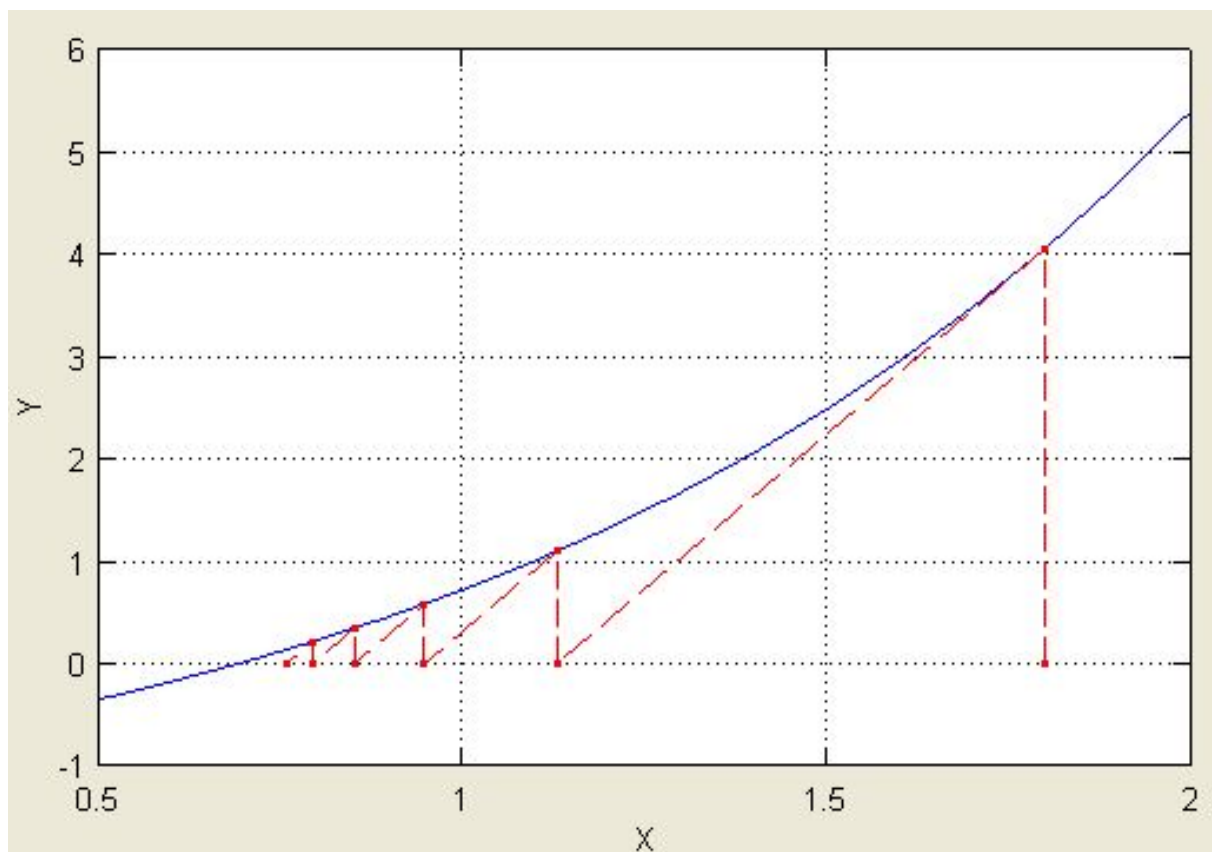


МЕТОД НЬЮТОНА (МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

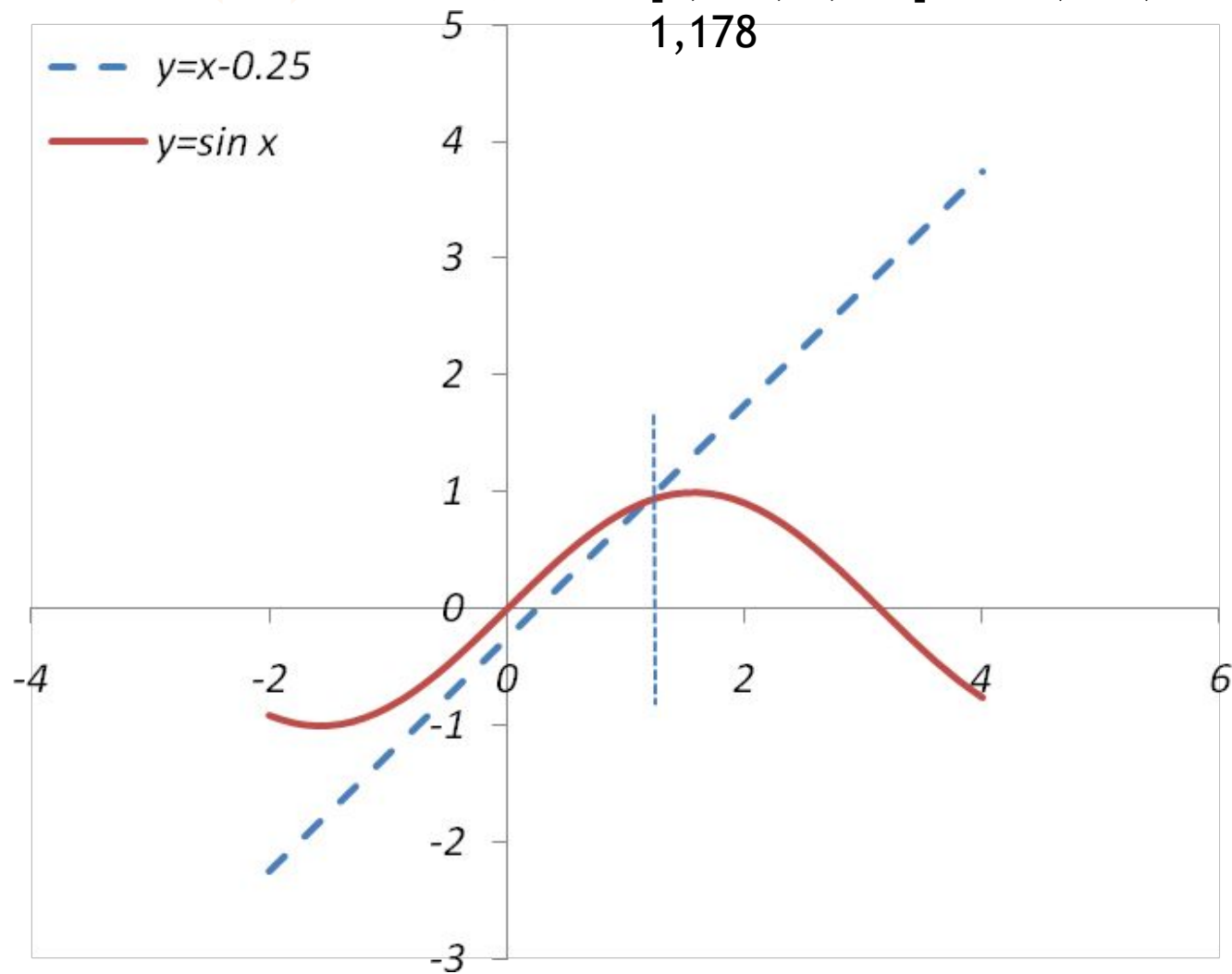


МЕТОД НЬЮТОНА (ВАРИАНТ С 1 ПРОИЗВОДНОЙ)

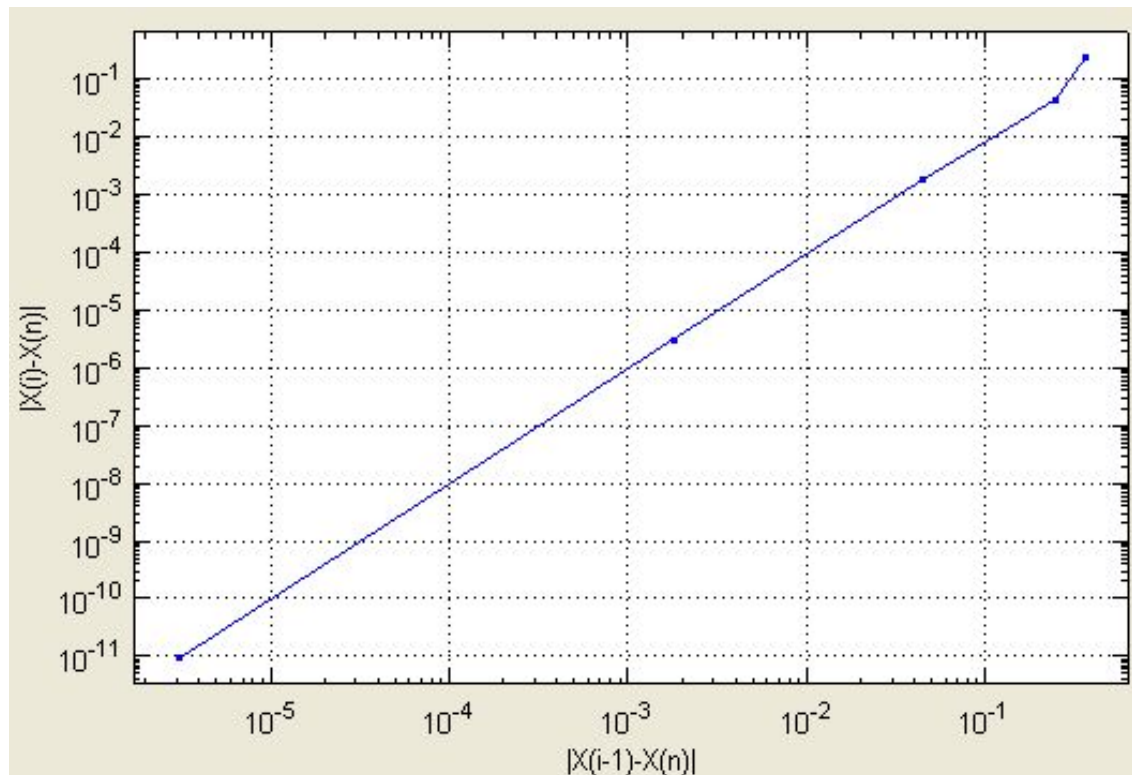


$$X - \sin(X) = 0,25$$

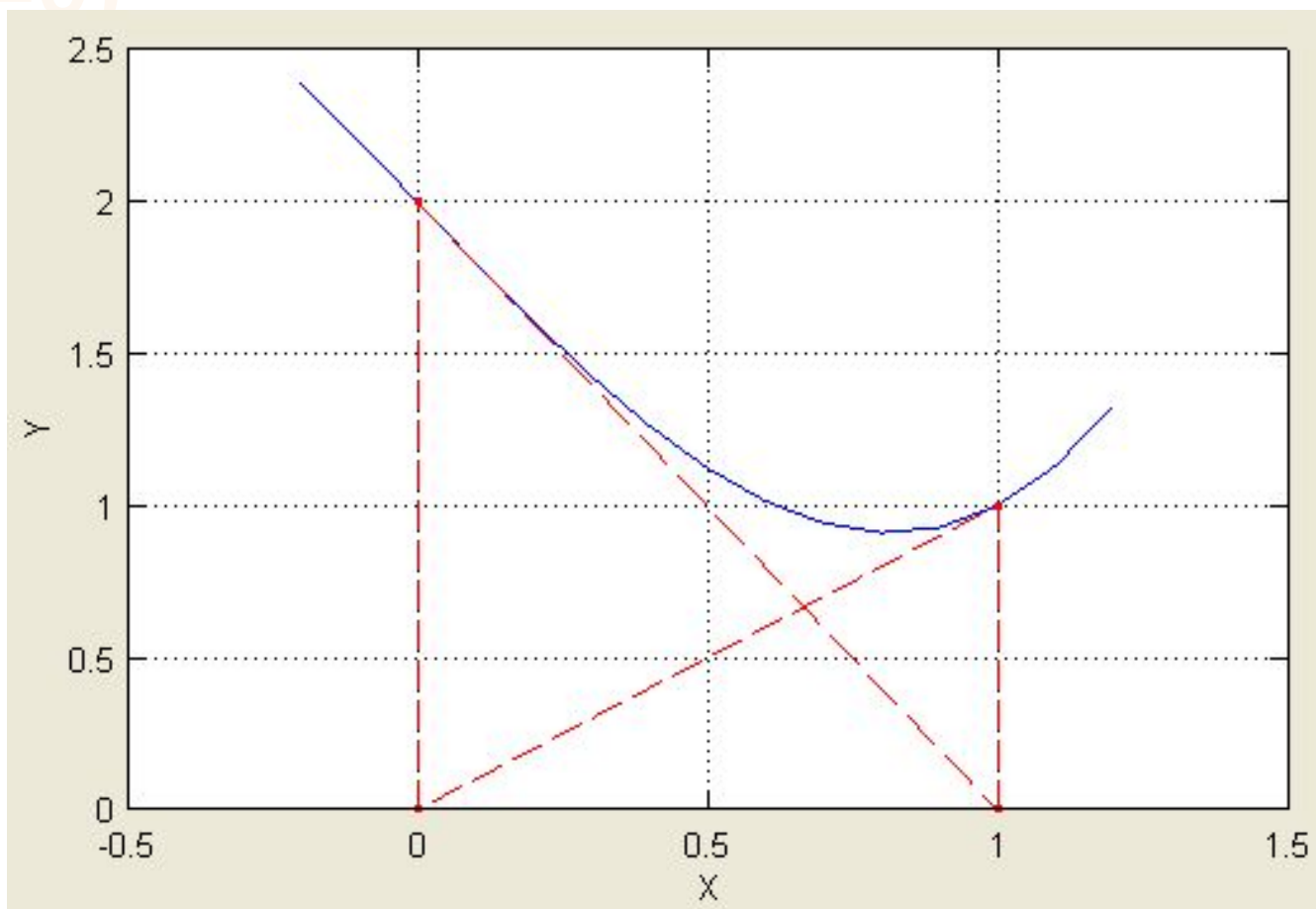
$[0,982; 1,178]$: $a = 0,982$, $b = 1,178$



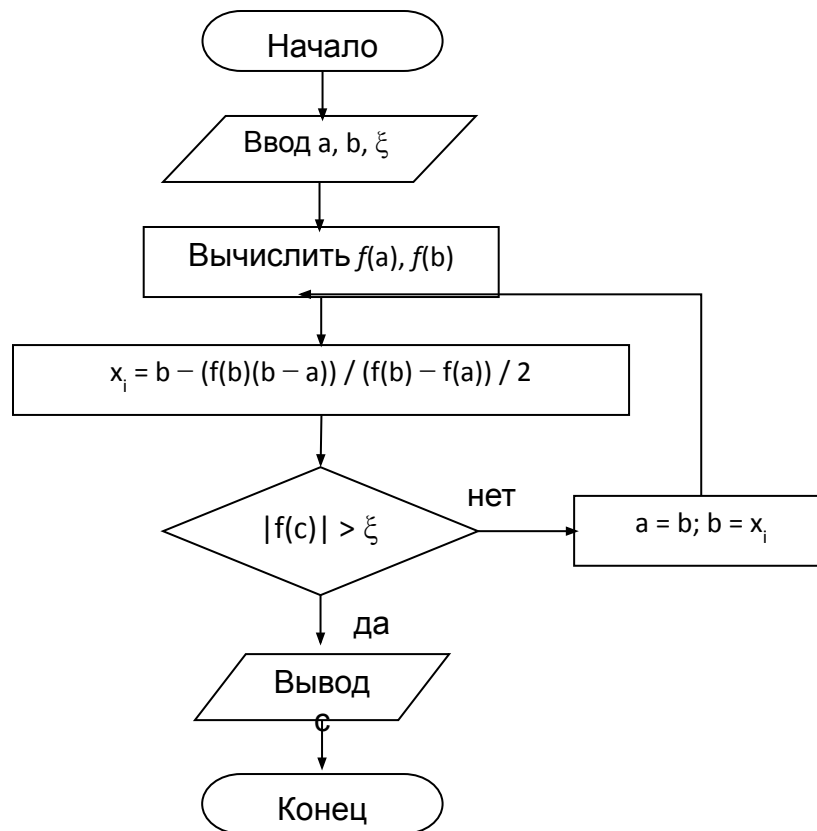
МЕТОД НЬЮТОНА (СХОДИМОСТЬ)



МЕТОД НЬЮТОНА $F(X)=X^3-2X+2$ ($X_0=0$)



БЛОК-СХЕМА МЕТОДА



РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системой линейных уравнений (л.у.) называется совокупность (набор) из нескольких уравнений от одного и того же набора переменных (неизвестных) $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad \begin{matrix} \{a_{jk}\}_{j=1,\dots,m} \\ \{b_j\}_{j=1,\dots,m} \end{matrix}$$

Здесь числа a и b называются коэффициентами системы. Первый индекс у коэффициента отвечает за номер уравнения, а второй — за номер переменной. Относительно число уравнений больше числа переменных, то система называется переопределенной.

Решением системы уравнений называется любой набор значений переменных, обращающий каждое из уравнений в истинное равенство. Система называется совместной если она имеет хотя бы одно решение и несовместной в противном случае.

МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СЛАУ

Матрицей системы л.у. называется форма

$$AX = B \text{ , где}$$

:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \text{ - матрица коэффициентов}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — столбец правых частей системы}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ - столбец неизвестных}$$

Любое решение системы $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ можно также записать в виде столбца:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^n \text{ .}$$

МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СЛАУ

Матрица, составленная из всех коэффициентов системы уравнений, т.е. конкатенацией матрицы A и столбца правых частей B называется расширенной матрицей системы л.у.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m \times (n+1)},$$

ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -8 \end{cases}$$

ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Решение. Выразим из первого уравнения

x_1

$$x_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}$$

и подставим в оставшиеся
уравнения

$$4\left(\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}\right) - 3x_2 - 5x_3 = 6 \iff 3x_2 - 3x_3 = 0 \iff x_2 - x_3 = 0;$$

$$3\left(\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}\right) + 5x_2 + 9x_3 = -8 \iff \frac{19}{2}x_2 + \frac{21}{2}x_3 = -\frac{25}{2} \iff 19x_2 + 21x_3 = -25.$$

Два получившихся уравнения не зависят от неизвестной x_1 — она оказалась *исключенной* из этих уравнений.

ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Иными словами, мы получили новую подсистему уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 19x_2 + 21x_3 = -25, \end{cases}$$

которой должны удовлетворять неизвестные x_2 и x_3
Продолжаем действовать по аналогии: выразим из первого уравнения x_2 через x_3

$$x_2 = x_3$$

$$40x_3 = -25 \iff x_3 = -\frac{5}{8}.$$

через

x_2
 x_3
 x_2
 x_3

ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Итак, значение одной компоненты решения получено. Для нахождения оставшихся подставим значение x_3 в полученные по ходу решения соотношения:

$$x_2 = x_3 = -\frac{5}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$x_1 = 1/4, x_2 = -5/8, x_3 = -5/8$$

ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Элементарными преобразованиями системы л.у. называются преобразования следующих трех типов:

1. перестановка двух уравнений;
2. умножение обеих частей уравнения на любое отличное от нуля число;
3. прибавление к одному уравнению любого другого, умноженного на произвольное число:
пара уравнений

$$\begin{aligned}a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n &= b_j, \\a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k\end{aligned}$$

заменяется парой

$$\begin{array}{ccccccc}(a_{j1} + \lambda a_{k1})x_1 & + & (a_{j2} + \lambda a_{k2})x_2 & + \dots & + & (a_{jn} + \lambda a_{kn})x_n & = & b_j + \lambda b_k, \\a_{k1}x_1 & & + a_{k2}x_2 & + \dots & & + a_{kn}x_n & = & b_k.\end{array}$$

Любое элементарное преобразование системы л.у. переводит эту систему в ей эквивалентную, т.е. имеющую то же множество решений, что и исходная.

МЕТОД ГАУССА

Предположим, что первое уравнение системы содержит явно неизвестную x_1 , т.е. $a_{11} \neq 0$. Исключим эту неизвестную из всех оставшихся уравнений. С этой целью вычтем из второго уравнения первое, домноженное на a_{21} / a_{11} . Получим

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1,$$

Аналогичное преобразование — вычитание из третьего уравнения системы первого, умноженного на a_{31} / a_{11} , позволяет исключить x_1 из этого уравнения, т.е. заменить его на

$$\left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \dots + \left(a_{3n} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1.$$

МЕТОД ГАУССА

В конечном итоге исключаем x_1 из всех уравнений кроме первого:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{[1]}x_2 + \dots + a_{2n}^{[1]}x_n = b_2^{[1]}, \\ \dots \\ a_{m2}^{[1]}x_2 + \dots + a_{mn}^{[1]}x_n = b_m^{[1]}. \end{array} \right. \quad \text{при} \quad \begin{array}{l} a_{jk}^{[1]} = a_{jk} - a_{j1}a_{1k}/a_{11}, \\ b_j^{[1]} = b_j - a_{j1}b_1/a_{11}. \end{array}$$

Полученная система эквивалентна исходной системе, однако она имеет более простой вид: в ней выделилась *подсистема*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{22}^{[1]}x_2 + \dots + a_{2n}^{[1]}x_n = b_2^{[1]}, \\ \dots \\ a_{m2}^{[1]}x_2 + \dots + a_{mn}^{[1]}x_n = b_m^{[1]}, \end{array} \right.$$

которая не зависит от переменной x_1

.

МЕТОД ГАУССА

К этой новой подсистеме можно применить те же рассуждения, что и к исходной системе, поставив теперь целью исключение переменной x_2

Окончательная система должна иметь

вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{[1]}x_2 + \dots + a_{2r}^{[1]}x_r + a_{2,r+1}^{[1]}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{[1]}x_n = b_2^{[1]}, \\ \dots \\ a_{rr}^{[r-1]}x_r + a_{r,r+1}^{[r-1]}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{[r-1]}x_n = b_r^{[r-1]}, \\ 0 = b_{r+1}^{[r-1]}, \\ \dots \\ 0 = b_m^{[r-1]}, \end{array} \right.$$

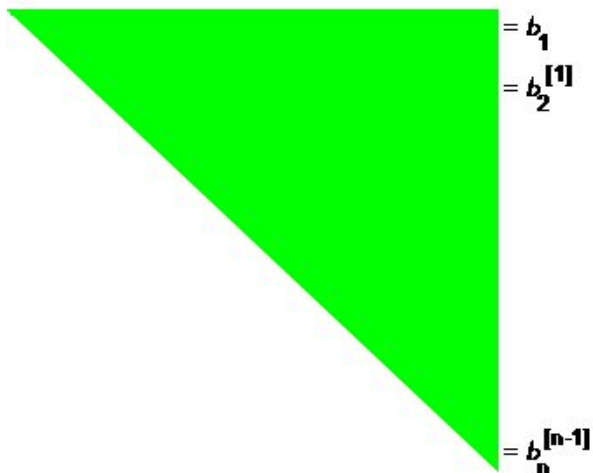
Процесс получения системы такого вида из исходной системы уравнений называется **прямым ходом метода Гаусса**.

МЕТОД ГАУССА (УСТАНОВЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ)

Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{[r-1]}, \dots, b_m^{[r-1]}$ отлично от нуля, то исходная система линейных уравнений будет несовместной.

Если прямой ход метода Гаусса заканчивается треугольной системой, т.е. $r = n$ и $b_{r+1}^{[r-1]} = 0, \dots, b_m^{[r-1]} = 0$, то исходная система линейных уравнений имеет единственное решение.

Если прямой ход метода Гаусса заканчивается трапециевидной системой, т.е. $r < n$ и $b_{r+1}^{[r-1]} = 0, \dots, b_m^{[r-1]} = 0$, то исходная система л.у. имеет бесконечное множество решений.



ПРИМЕР

Экспериментально установлено, что при определенной постоянной температуре суммарное давление смесей паров бензола (1), дихлорэтана (2) и хлорбензола (3) в однофазной системе равно значениям, представленным в табл. Найти значения давления пара чистых компонентов.

Состав смеси, мол. доли			Давление P , Па
N_1	N_2	N_3	
0,80	0,10	0,10	1840
0,20	0,70	0,10	1860
0,05	0,05	0,90	236

РЕШЕНИЕ

По закону Дальтона $P = \sum_{i=1}^3 p_i N_i$. Обозначим: $x_1 = p_1$; $x_2 = p_2$; $x_3 = p_3$

Получим систему
уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 0,80x_1 + 0,10x_2 + 0,10x_3 &= 1840, \\ 0,20x_1 + 0,70x_2 + 0,10x_3 &= 1860, \\ 0,05x_1 + 0,05x_2 + 0,90x_3 &= 236. \end{aligned} \right\}$$

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ГАУССА

Ход	Этапы	Коэффициенты при			Свободные члены	Контрольные суммы
		x_1	x_2	x_3		
Прямой	I	0,80	0,10	0,10	1840	1841
		0,20	0,70	0,10	1860	1861
		0,05	0,05	0,90	236	237
	II	1	0,125	0,125	2300	2301,250
			0,675	0,075	1400	1400,750
			0,0438	0,894	121	121,938
Обратный	III		1	0,111	2074,074	2075,185
				0,889	30,156	31,045
	IV			1	33,921	34,921
		1	1		$x_3=33,921$ $x_2=2070,309$ $x_1=2036,971$	$\bar{x}_3=34,921$ $\bar{x}_2=2071,309$ $\bar{x}_1=2037,971$

$p_1 \simeq 2037$ Па; $p_2 \simeq 2070$ Па; $p_3 \simeq 34$ Па.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ГАУССА — ЗЕЙДЕЛЯ

Требуется решить систему уравнений в виде

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ГАУССА – ЗЕЙДЕЛЯ

Перепишем
уравнение

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = -a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \dots & \\ a_{(n-1)1}x_1 + a_{(n-1)2}x_2 + \dots + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & = -a_{(n-1)n}x_n + b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Здесь в j -м уравнении мы перенесли в правую часть все члены, содержащие x_i , для $i > j$. Эта запись может быть представлена:

$$(L + D)\vec{x} = -U\vec{x} + \vec{b},$$

где D означает матрицу, у которой на главной диагонали стоят соответствующие элементы матрицы A , а все остальные нули; тогда как матрицы U и L содержат верхнюю и нижнюю треугольные части A , на главной диагонали которых нули.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ГАУССА – ЗЕЙДЕЛЯ

после выбора соответствующего начального

$\vec{x}^{(0)}$

приближения

итерационный процесс строится по формуле:

$$(L + D)\vec{x}^{(k+1)} = -U\vec{x}^{(k)} + \vec{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Значения x последовательно вычисляются преобразованием

системы:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{23}x_3^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + c_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)} + d_n \end{cases},$$

где $c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n$

Таким образом, i -тая компонента k -го приближения вычисляется по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n c_{ij}x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ГАУССА – ЗЕЙДЕЛЯ

Условие окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности ε в упрощённой форме имеет вид:

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \varepsilon$$

Условие
сходимости:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ПРИМЕР

$$\left. \begin{aligned} 0,80x_1 + 0,10x_2 + 0,10x_3 &= 1840, \\ 0,20x_1 + 0,70x_2 + 0,10x_3 &= 1860, \\ 0,05x_1 + 0,05x_2 + 0,90x_3 &= 236. \end{aligned} \right\}$$

Условие сходимости
выполняется:

$$|0,80| > |0,10| + |0,10|;$$

$$|0,70| > |0,20| + |0,10|;$$

$$|0,90| > |0,05| + |0,05|.$$

РЕШЕНИЕ

$$x_1 = \frac{1}{0,80} (1840 - 0,10x_2 - 0,10x_3);$$

$$x_2 = \frac{1}{0,70} (1860 - 0,20x_1 - 0,10x_3);$$

$$x_3 = \frac{1}{0,90} (236 - 0,05x_1 - 0,05x_2)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2300,0000 - 0,1250x_2 - 0,1250x_3, \\ x_2 &= 2657,1429 - 0,2857x_1 - 0,1429x_3, \\ x_3 &= 262,2222 - 0,0556x_1 - 0,0556x_2. \end{aligned} \right\}$$

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Моделирование многомерных
нелинейных систем

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В задачах проектирования и исследования поведения реальных объектов, процессов и систем (ОПС) математические модели должны отображать реальные физические нелинейные процессы. При этом эти процессы зависят, как правило, от многих переменных. В результате математические модели реальных ОПС описываются *системами нелинейных уравнений*.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дана система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

или

$$\bar{X} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$$

Необходимо решить эту систему, т.е. найти вектор

$$f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1 \dots n}.$$

удовлетворяющий системе с точностью ε

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В отличие от систем линейных уравнений для *систем нелинейных уравнений* неизвестны прямые методы решения.

При решении *систем нелинейных уравнений* используются итерационные методы. Их эффективность зависит от выбора начального приближения (начальной точки), т.е. вектора

$$\overline{X^0} = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$$

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

К виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \end{cases}$$

или:

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), i = \overline{1, n}.$$

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

выбираем начальное приближение

$$\overline{X^0} = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$$

Находим приближенные значения корней:

$$x_i^k = x_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, x_3^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}),$$

используя значения переменных, полученных на шаге $(k-1)$

Итерационный процесс поиска прекращается как только выполнится условие (по всем переменным):

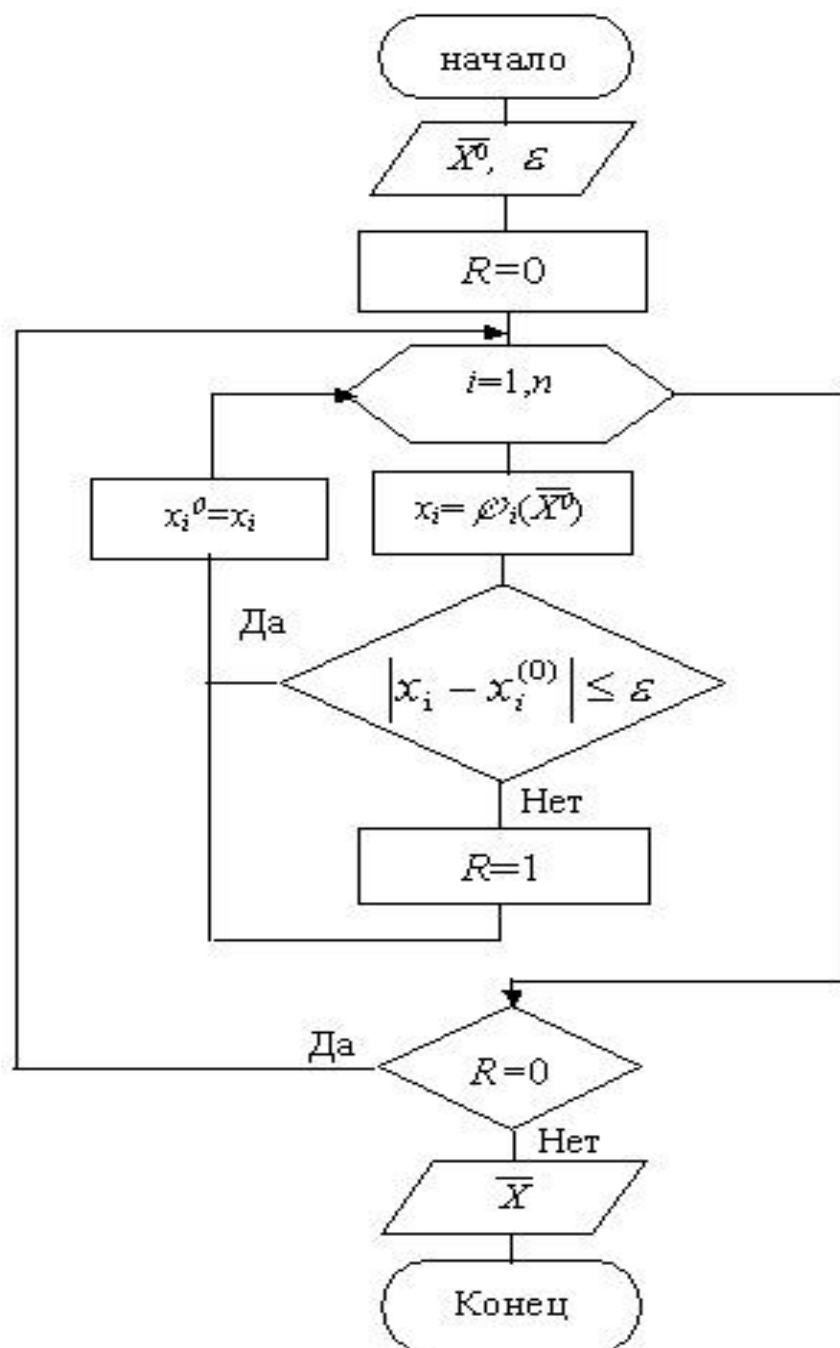
$$|x_j^k - x_j^{k-1}| \leq \varepsilon, j = \overline{1, n}.$$

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Метод простых итераций используется для решения таких систем нелинейных уравнений, в которых выполняется условие сходимости итерационного процесса поиска, а именно:

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_j} \right| < 1, j = \overline{1, n}.$$

АЛГОРИТМ



ПРИМЕР

Дана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ \ln x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

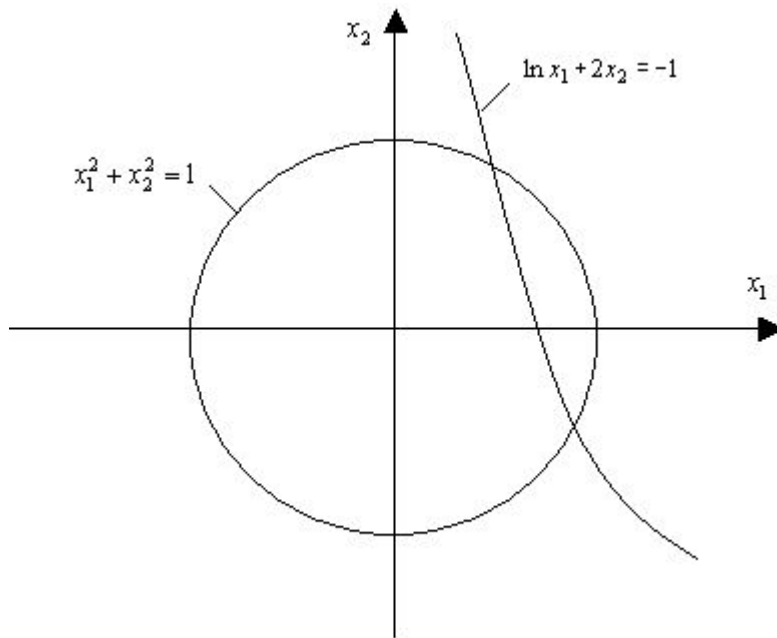
Необходимо определить область сходимости системы, выбрать начальную точку и найти одно из решений системы.

1. Преобразуем систему для решения методом итераций

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1 - x_2^2} \rightarrow \varphi_1(x_1, x_2), \\ x_2 = -0,5 - 0,5 \ln x_1 \rightarrow \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

2. Проверяем условие сходимости

$$\begin{aligned} |\delta\varphi_1/\delta x_1| + |\delta\varphi_2/\delta x_1| &< 1 \\ |\delta\varphi_1/\delta x_2| + |\delta\varphi_2/\delta x_2| &< 1 \end{aligned}$$

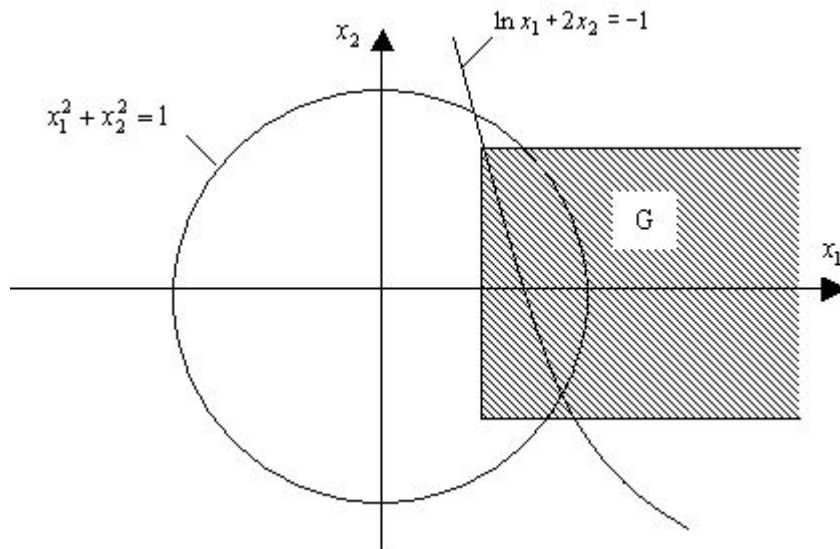


ПРИМЕР

$$\begin{array}{lll} |\delta\varphi_1/\delta x_1| + |\delta\varphi_2/\delta x_1| < 1 & \delta\varphi_1/\delta x_1 = 0; & |0| + |1/2x_1| < 1, \\ |\delta\varphi_1/\delta x_2| + |\delta\varphi_2/\delta x_1| < 1 & \delta\varphi_1/\delta x_2 = -x/\sqrt{1-x_2}; & |x_2/\sqrt{1-x_2}| + |0| < 1. \\ |\delta\varphi_1/\delta x_2| + |\delta\varphi_2/\delta x_2| < 1 & \delta\varphi_2/\delta x_1 = -1/2x_1; & \\ & \delta\varphi_2/\delta x_2 = 0 & \end{array}$$

3. Определяем область сходимости G

$$|x_1| \geq 0.5 \quad -0.707 \leq x_2 \leq 0.707$$

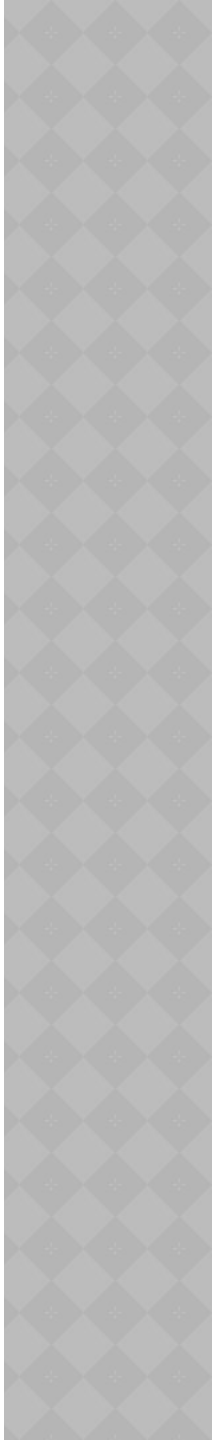


4. Выбираем начальную точку

$$\overline{X^0} = [0.8; -0.6]$$

5. Используя выбранную начальную точку решаем заданную систему нелинейных уравнений.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА



ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

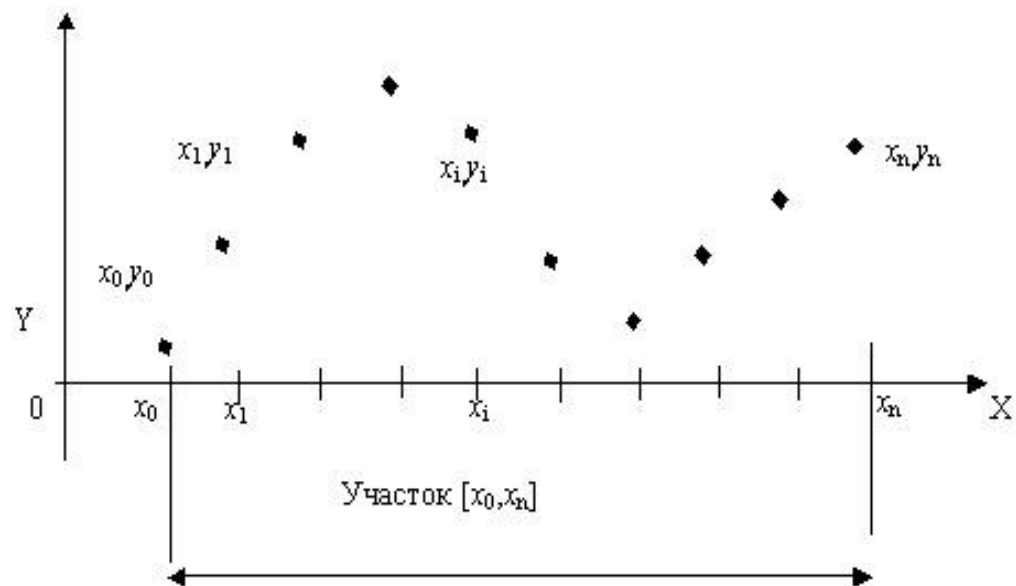
Обработка экспериментальных
данных

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

$$y_i = f(x), i = \overline{0, n}.$$

Табличная форма

i	x	y
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
i	x_i	y_i
...	...	...
n	x_n	y_n



(x_i, y_i) - узловые точки

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

- ⦿ интерполяция - нахождение значения таблично заданной функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана.
- ⦿ Экстраполяция - восстановление функции в точках за пределами заданного интервала (прогноз).

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

- ⦿ выбор интерполяционной функции $\phi(x)$;
- ⦿ оценка погрешности $R(x)$;
- ⦿ размещение узлов интерполяции для обеспечения возможной наивысшей точности восстановления функции.

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Задача решается при помощи нахождения аналитического выражения некоторой вспомогательной функции $F(x)$, которая приближала бы заданную табличную функцию, т.е. в *узловых* точках принимала бы значение табличных функций

$$F(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Наиболее часто в качестве интерполирующей функции используются различные алгебраические многочлены типа

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0.$$

Этот *многочлен* должен пройти через все *узловые* точки, т.е.

$$P_n(x_i) = y_i.$$

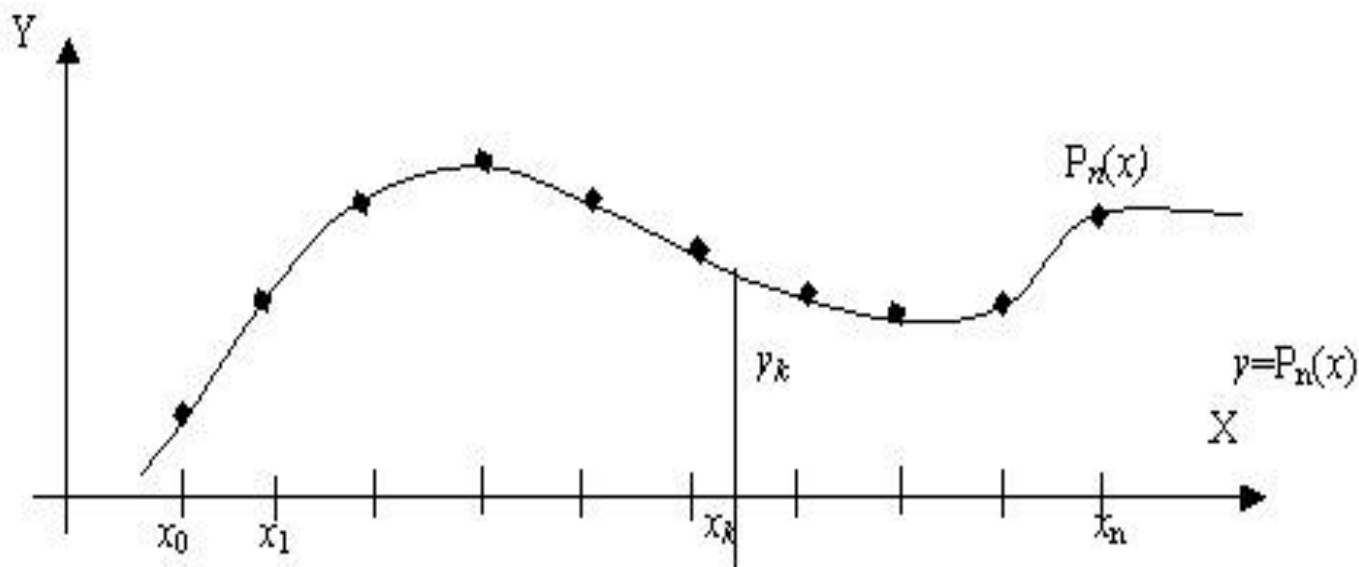
Степень многочлена n зависит от количества *узловых* точек N и равна $N-1$.

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

- Задача: для функции , заданной таблично, *построить интерполяционный многочлен* степени n , который проходит через все узловые точки таблицы:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0 + a_n,$$

- В результате, в любой другой промежуточной точке x_k , расположенной внутри отрезка $[x_0, x_n]$, выполняется приближенное равенство $P_n(x_k) = f(x_k) = y_k$



- Для построения интерполяционного многочлена необходимо определить его коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$, т.е. a_i $i=0,1,2,\dots,n$. Количество неизвестных коэффициентов равно $n+1=N$
- Поскольку интерполяционный многочлен должен пройти через каждую узловую точку (x_i, y_i) таблицы (11.1), т.е.,

$$a_0x_i^n + a_1x_i^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_i + a_n = y_i, i = 0, 1, \dots, n.$$

- Подставляя в уравнение каждую узловую точку таблицы получаем систему линейных уравнений:

[illegible]

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА В ЯВНОМ ВИДЕ

- Неизвестными системы уравнений являются $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ т.е. коэффициенты интерполяционного многочлена. Коэффициенты при неизвестных системы

$$x_i^n, x_i^{n-1}, \dots, x_i^0, i = 0, 1, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n$$

- легко могут быть определены на основании таблицы экспериментальных данных
- Интерполяционный *многочлен* может быть построен при помощи специальных интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, Стерлинга, Бесселя и др.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПО ЛАГРАНЖУ

Интерполяционный *многочлен* по формуле Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} L_n(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \cdot y_2 + \dots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n. \end{aligned}$$

- если $x=x_0$, то $L_n(x_0) = y_0$,
- если $x=x_1$, то $L_n(x_1) = y_1$,
- ::::
- если $x=x_n$, то $L_n(x_n) = y_n$.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПО ЛАГРАНЖУ

- интерполяционный *многочлен* Лагранжа приближает заданную табличную функцию, т.е. $L_n(x_i) = y_i$ и используется в качестве вспомогательной функции для решения задач интерполирования, т.е. $L_n(x_k) \approx y_k$

- Чем больше узлов интерполирования на отрезке $[x_0, x_n]$, тем точнее интерполяционный *многочлен* приближает заданную табличную функцию, т.е. тем точнее равенство:

$$f(x_k) \approx L_n(x_k).$$

- при большом числе узлов удобно находить значения функции в промежуточных точках, не получая *многочлен* в явном виде.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ЛАГРАНЖА

В общем виде формула Лагранжа имеет вид:

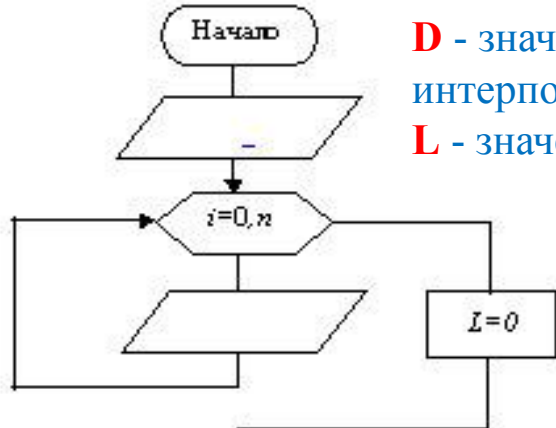
$$Ln(x) = \sum_{j=0}^n B_j \cdot y_j,$$

где

$$B_j = \prod_{i=0}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i},$$

при условии

$$i \neq j$$

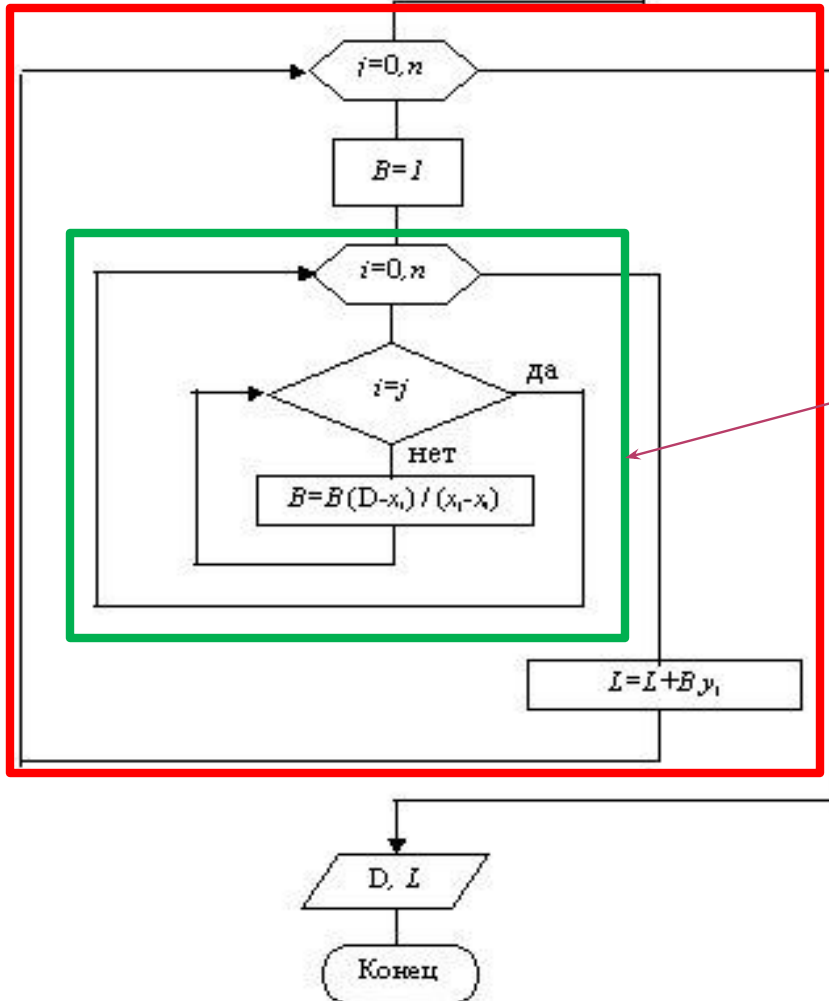


D - значение аргумента в точке, для которой решается задача интерполирования табличной функции.
L - значение многочлена Лагранжа.

$$L = \sum_{j=0}^n B_j \cdot y_j$$

$$B_j = \prod_{i=0}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, i \neq j$$

Алгоритм не предусматривает получение интерполяционного многочлена в явном виде, а сразу решает задачу интерполирования функции в заданной точке, $x=D$



ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПО НЬЮТОНУ

Дана табличная функция:

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
n	x_n	y_n

Или

$$y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}.$$

Необходимо найти значение этой функции в промежуточной точке, например, $x=D$, причем

$$D \in [x_0, x_n]$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПО НЬЮТОНУ

Интерполяционный *многочлен* по формуле Ньютона имеет вид:

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + \\ & + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + \\ & + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots + \\ & + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где $f(x_0), f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), f(x_0, x_1, \dots, x_n)$

- разделенные разности 0-го, 1-го, 2-го, ..., n-го порядка,
соответственно

РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

- Значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, т.е. значения табличной функции в узлах, называются *разделенными разностями нулевого порядка* ($k=0$)

- Отношение
$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

называется разделенной разностью первого порядка ($k=1$) на участке $[x_0, x_1]$

в общем виде
$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

- Для произвольного участка $[x_i, x_{i+2}]$ *разделенная разность второго порядка* ($k=2$) равна

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

- разделенная разность k -го порядка на участке $[x_i, x_{i+k}]$ может быть определена через *разделенные разности* $(k-1)$ -го порядка по рекуррентной формуле:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

- где $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{0, n-k}$,
- n - степень многочлена.
- интерполяция по Ньютону* имеет некоторые преимущества по сравнению с решением задачи *интерполяции по Лагранжу*. При изменении количества *узловых* точек N и степени многочлена n ($n=N-1$) интерполяционный *многочлен* Лагранжа требуется строить заново. В *многочлене* Ньютона при изменении количества *узловых* точек N и степени многочлена n требуется только добавить или отбросить соответствующее число стандартных слагаемых в формуле Ньютона .

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА

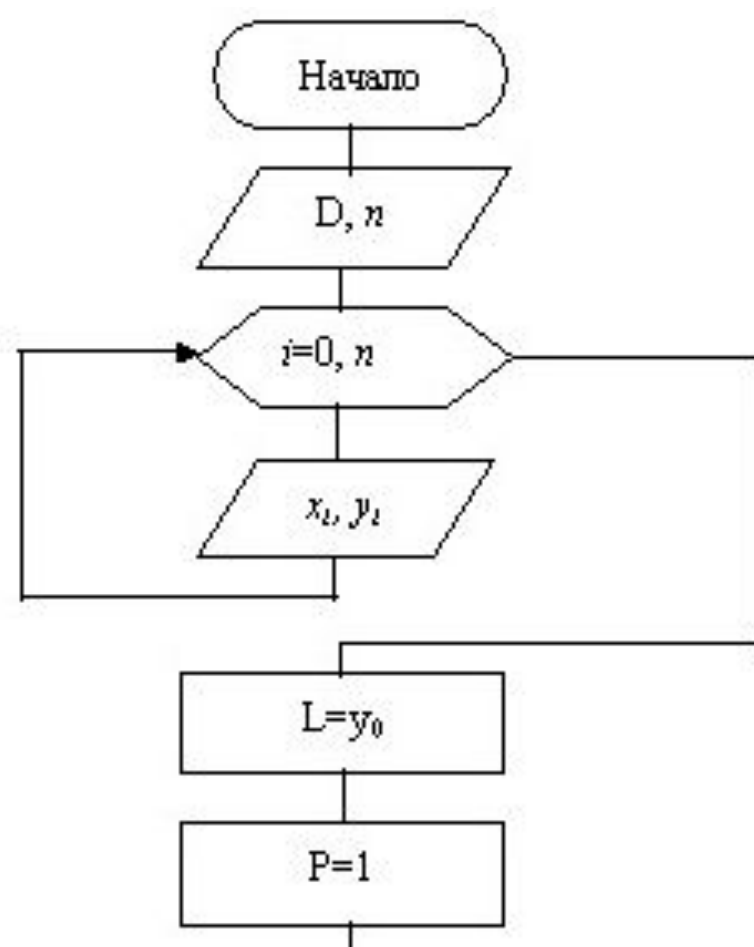
- Пусть нужно найти значение таблично заданной функции в точке D из интервала $[x_0, x_n]$.
- Значение функции в этой точке вычисляется по формуле

$$L_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n P \cdot y_0^*$$

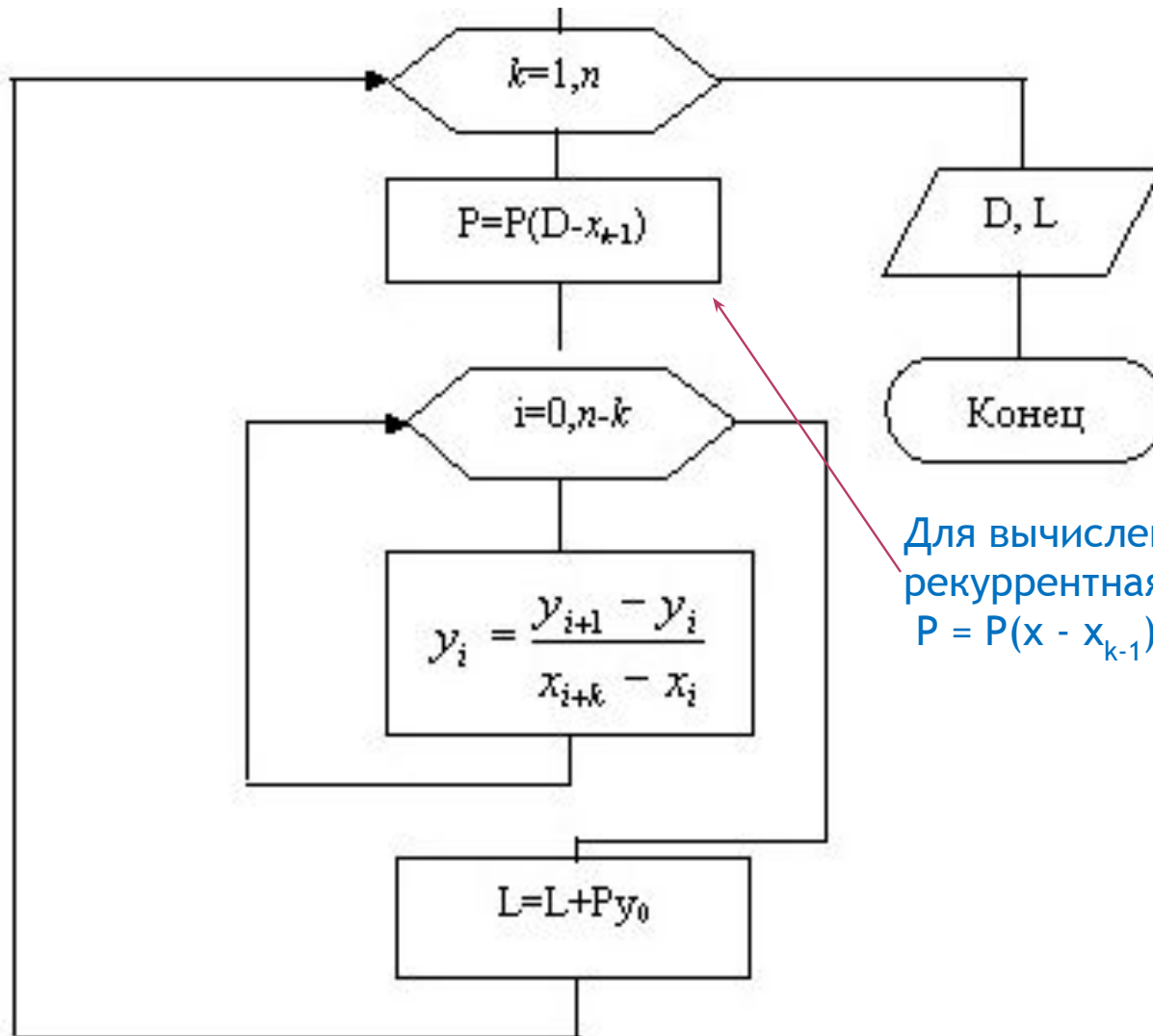
- где y_0 - значение табличной функции для $x=x_0$
- y_0^* *разделенная разность* k -го порядка для участка $[x_0, x_{0+k}]$

$$P = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА



ПРОГРАММИРОВАНИЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА



Для вычисления P используется
рекуррентная формула
 $P = P(x - x_{k-1})$ внутри цикла по k

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

- Сплаины (в черчении) - это лекала или гибкие линейки, деформация которых позволяет провести кривую через заданные точки (x_i, y_i)
- *сплайн* - это группа кубических *многочленов*, в местах сопряжения которых первая и вторая производные непрерывны.

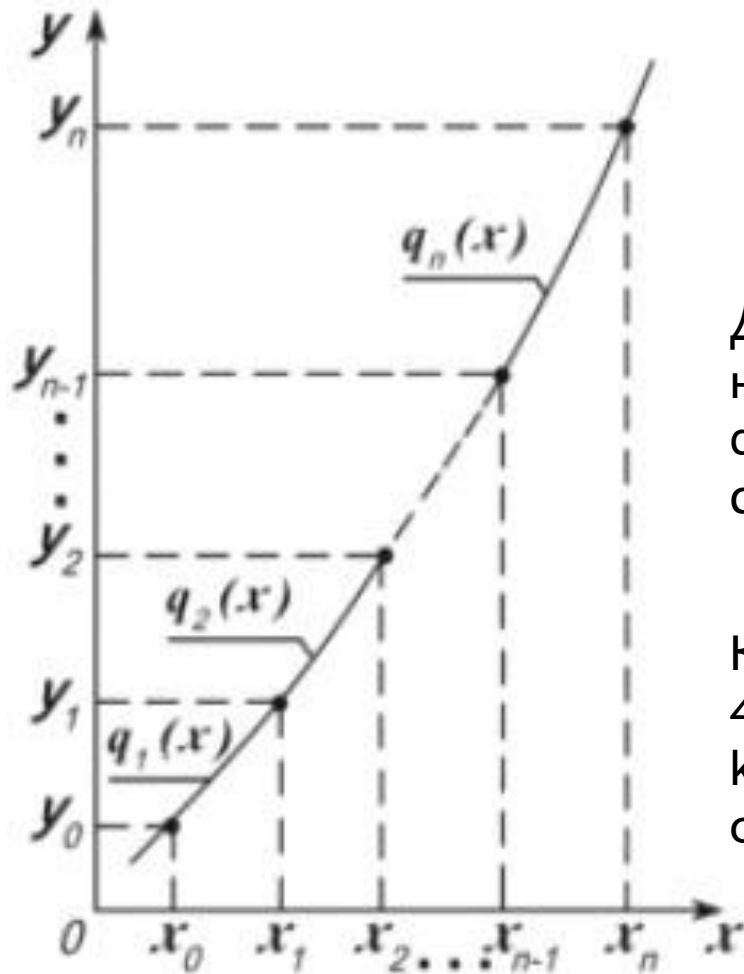
Такие функции называются кубическими сплайнами.

В общем виде они имеют вид:

$$q_i(x) = k_{1i} + k_{2i}x + k_{3i}x^2 + k_{4i}x^3, i = \overline{1, n},$$

Для их построения необходимо задать коэффициенты, которые единственным образом определяют *многочлен* в промежутке между данными точками.

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ



Для интерполяции данной функции необходимо задать все кубические функции $q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x)$.

Количество коэффициентов k_{ij} равно $4n$. Для определения коэффициентов k_{ij} необходимо построить и решить систему порядка $4n$.

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Система алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов

$$\begin{aligned} q_i(x_i) &= y_i, i = \overline{1, n}; \\ q_{i+1}(x_i) &= y_i, i = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

сплайны должны
соприкасаться в заданных
точках (2n уравнений)

$$\begin{aligned} q'_{i+1}(x_i) &= q'_i(x_i), i = \overline{1, n-1}; \\ q''_{i+1}(x_i) &= q''_i(x_i), i = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

в местах соприкосновения
сплайнов первые и вторые
производные должны быть
равны (2n-2 уравнений)

$$q''_1(x_0) = 0, \dots, q''_n(x_n) = 0.$$

дополнительные условия
(2 уравнения)

АППРОКСИМАЦИЯ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Дана табличная функция:

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
n	x_n	y_n

Задача аппроксимации заключается в отыскании аналитической зависимости **$y=f(x)$** полученной табличной функции.

СПОСОБЫ АППРОКСИМАЦИИ

1. Аппроксимирующая кривая $F(x)$, аналитический вид которой необходимо найти, проходила через все узловые точки таблицы. Эту задача решается с помощью *построения интерполяционного многочлена* степени n :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n.$$

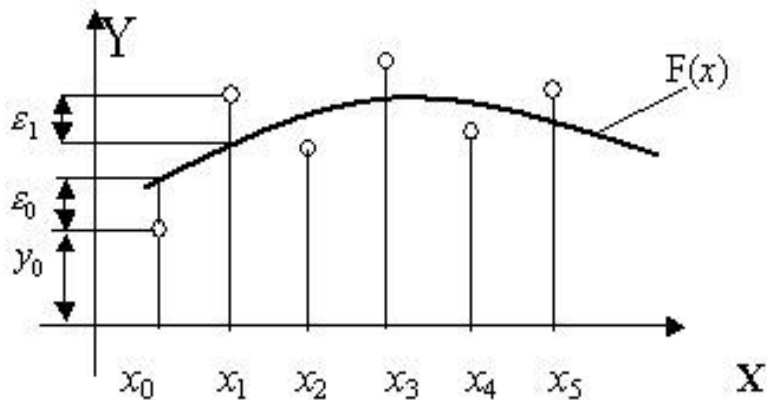
Недостатки:

- ⊙ Точность аппроксимации гарантируется в небольшом интервале $[x_0, x_n]$ при количестве *узловых* точек не более 7-8.
- ⊙ Значения табличной функции в *узловых* точках должны быть заданы с большой точностью.
- ⊙ В противном случае воспроизводятся не только закономерные изменения снимаемой функции, но и ее случайные помехи.

2. Табличные данные аппроксимируют кривой $F(x)$, которая не обязательно должна пройти через все узловые точки, а должна как бы сгладить все случайные помехи табличной функции.

СГЛАЖИВАНИЕ ДАННЫХ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Аппроксимирующая кривая $F(x)$ должна проходить так, чтобы ее отклонения от табличных данных ε_i (уклонения) по всем узловым точкам были минимальными, т.е.



$$\varepsilon_i = |F(x_i) - y_i| \rightarrow \min.$$

$$\varepsilon_i^2 = |(F(x_i) - y_i)|^2 \rightarrow \min.$$

Принцип метода наименьших квадратов: для табличных данных, полученных в результате эксперимента, отыскать аналитическую зависимость $F(x)$, сумма квадратов уклонений которой от табличных данных по всем узловым точкам была бы минимальной, т.е.

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (F(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть искомая функция $F(x)$ будет иметь вид :

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x^1 + a_m.$$

степень m не зависит от числа *узловых* точек. При этом всегда $m < n$. Степень m может меняться в пределах $1 \leq m \leq N - 2$

Если $m=1$ (прямая линия) - линейная регрессия.

Если $m=2$ (квадратичная *парабола*) - квадратичная аппроксимация.

Если $m=3$ (кубическая *парабола*) - кубическая аппроксимация.

Задача: для табличной функции, полученной в результате эксперимента, построить аппроксимирующий *многочлен* степени m , для которого сумма квадратов отклонений по всем узловым точкам минимальна, т.е.

$$S = \sum_0^n (P_m(x_i) - y_i) \rightarrow \min.$$

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

$$S = \sum_{i=0}^n (P_m(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

$$P_m(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

$$S = \sum_{i=0}^n (a_0x_i^0 + a_1x_i^1 + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i)^2 \rightarrow \min,$$

Необходимым условием существования минимума функции S является равенство нулю ее частных производных по каждой a_j

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = d_0, \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \dots + c_{m+1} a_m = d_1, \\ c_2 a_0 + c_3 a_1 + c_4 a_2 + \dots + c_{m+2} a_m = d_0, \\ \dots\dots\dots \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \dots + c_{2m} a_m = d_m, \end{cases}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, k = \overline{0, 2m} \quad d_j = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k, j = \overline{0, m}$$

Порядок системы равен $m+1$

ПРОГРАММИРОВАНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)

$$P_m(x) = a_1x^0 + a_2x^1 + a_3x^2 + \dots + a_{m+1}x^m.$$

Преобразуем систему индексации в системе уравнений:

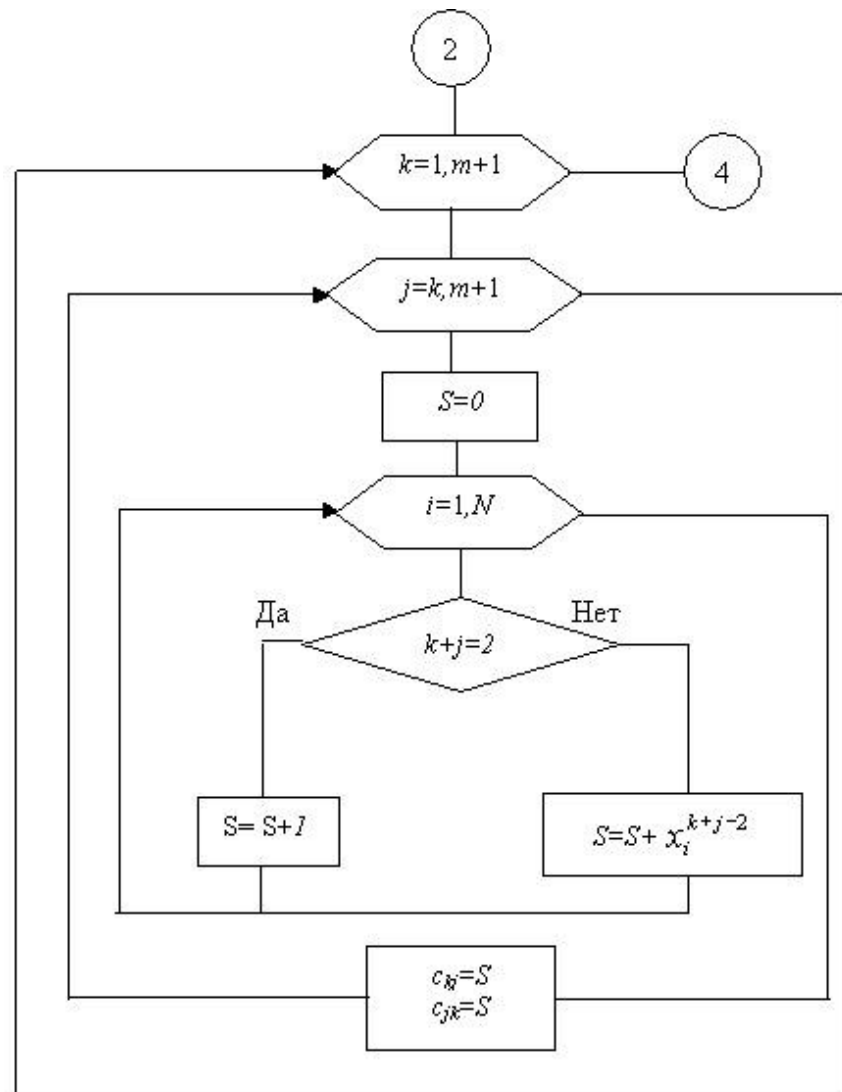
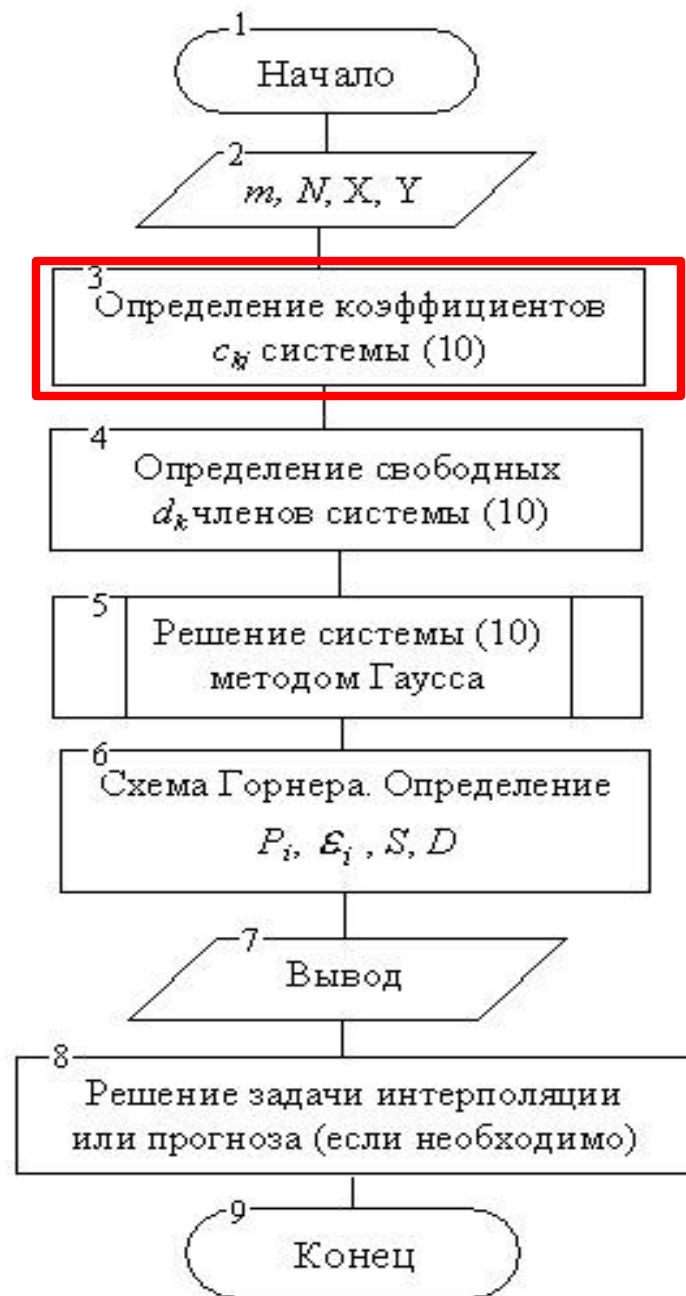
$$\begin{cases} c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 + \dots + c_{1(m+1)}a_{m+1} = d_1, \\ c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3 + \dots + c_{2(m+1)}a_{m+1} = d_2, \\ c_{31}a_1 + c_{32}a_2 + c_{33}a_3 + \dots + c_{3(m+1)}a_{m+1} = d_3, \\ \dots\dots\dots \\ c_{(m+1),1}a_1 + c_{(m+1),2}a_2 + \dots + c_{(m+1),(m+1)}a_{m+1} = d_{m+1} \end{cases}$$

$$a_j, j = \overline{1, (m+1)} \quad - \text{неизвестные системы линейных уравнений}$$

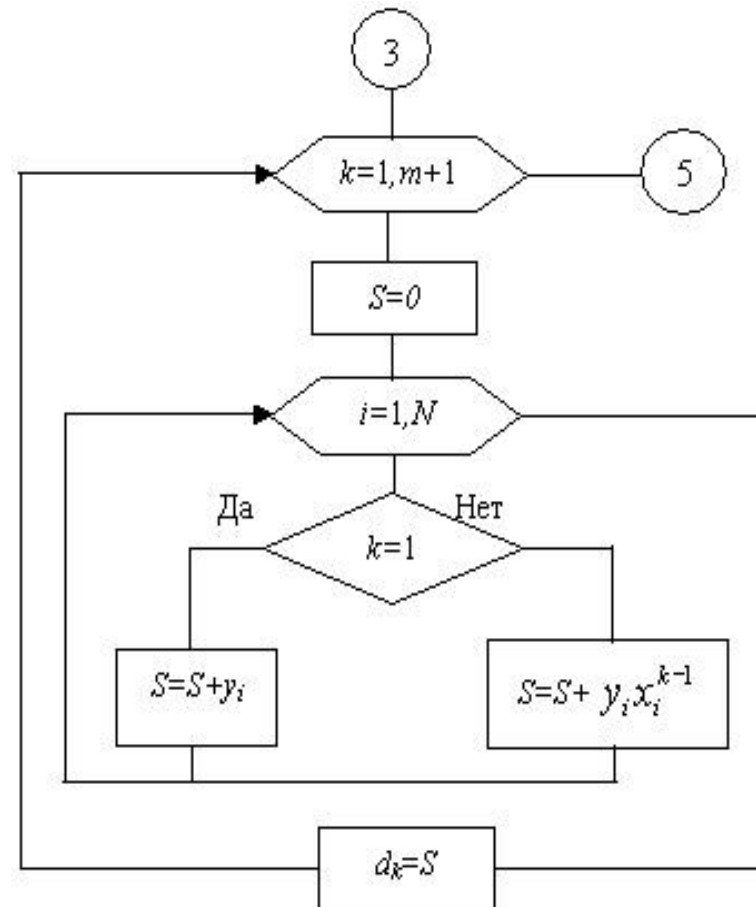
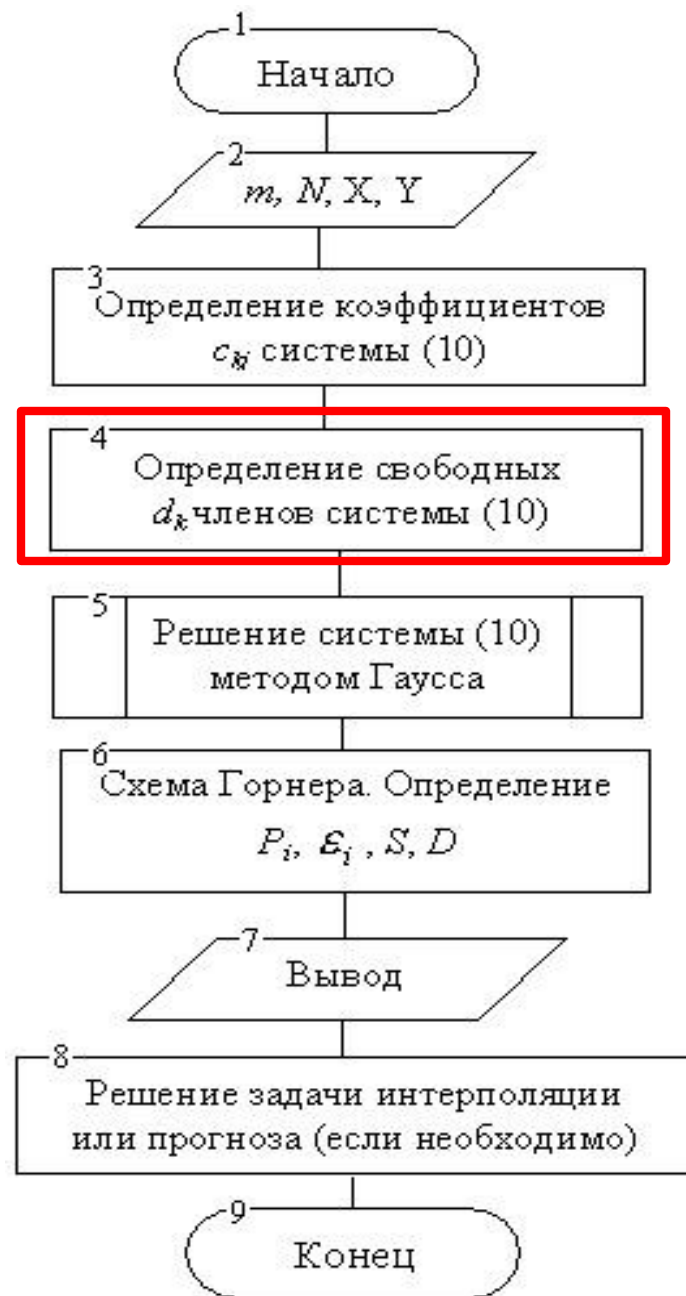
$$c_{k,j} = \sum_{i=1}^N x_i^{k+j-2}, k = \overline{1, (m+1)}, j = \overline{1, (m+1)} \quad - \text{свободные члены системы линейных уравнений}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^N y_i x_i^{j-1}, j = \overline{1, (m+1)} \quad - \text{коэффициенты системы линейных уравнений}$$

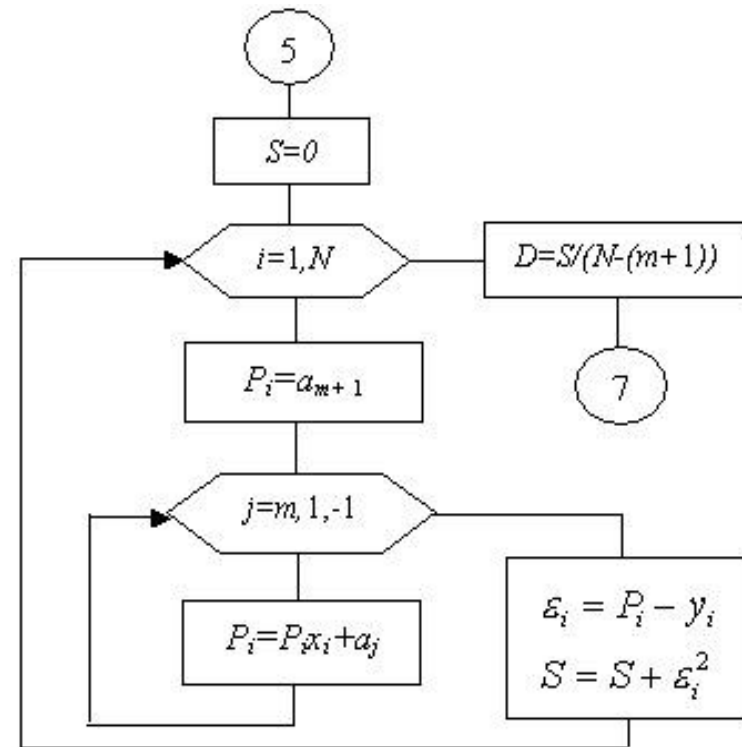
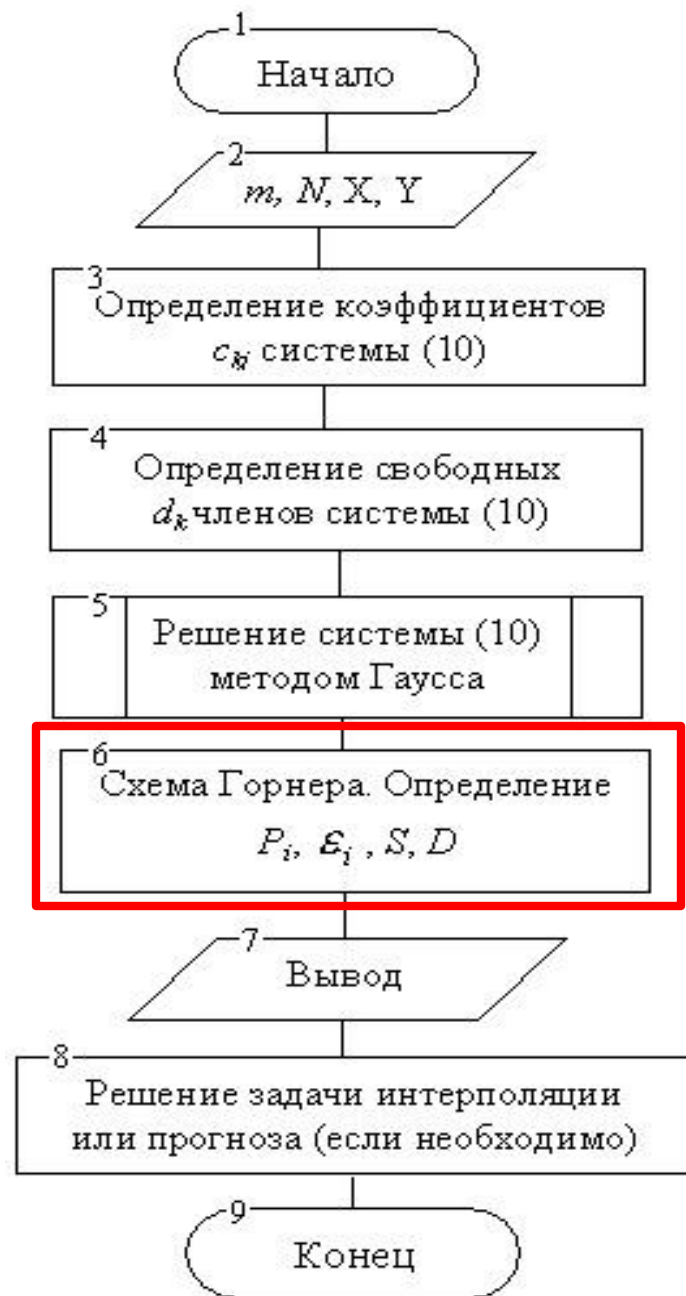
АЛГОРИТМ



АЛГОРИТМ



АЛГОРИТМ



$$\varepsilon_i = P_i - y_i \quad S = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$$

$$D = \frac{S}{N-(m+1)}$$

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Интегрирование

- ◉ *Динамические системы* - это системы, в которых входные переменные являются функциями от времени или каких-либо других параметров. Описываются эти системы дифференциальными и интегральными уравнениями.
- ◉ На практике лишь небольшое число дифференциальных уравнений допускает интегрирование в квадратурах. Еще реже удастся получить решение в элементарных функциях. Поэтому большое распространение при решении математических моделей с помощью ЭВМ получили численные методы *решения дифференциальных уравнений*.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

дана функция $y=f(x)$. Найти интеграл этой функции на участке $[a,b]$, т.е. найти

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Если подынтегральная функция $f(x)$ задана в аналитическом виде, непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна ее *первообразная*, т.е.

$$F'(x) = f(x), x \in [a, b],$$

то интеграл может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница как приращение первообразной на участке $[a,b]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

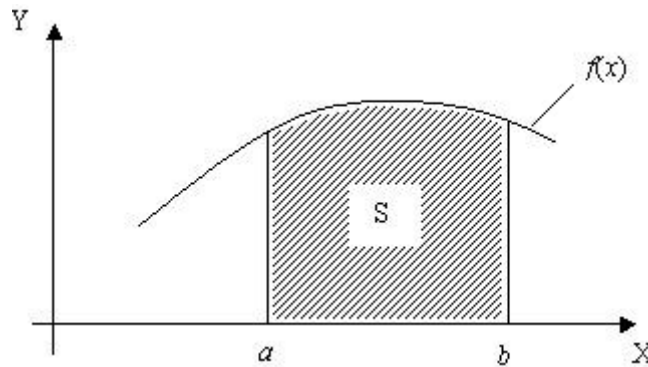
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Численные методы интегрирования применяются в следующих случаях:

- подынтегральная функция $f(x)$ задана таблично на участке $[a, b]$;
- подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически, но ее *первообразная* не выражается через элементарные функции;
- подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически, имеет *первообразную*, но ее определение слишком сложно.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Интеграл численно равен площади S криволинейной трапеции, расположенной под подынтегральной кривой $f(x)$ на участке $[a, b]$



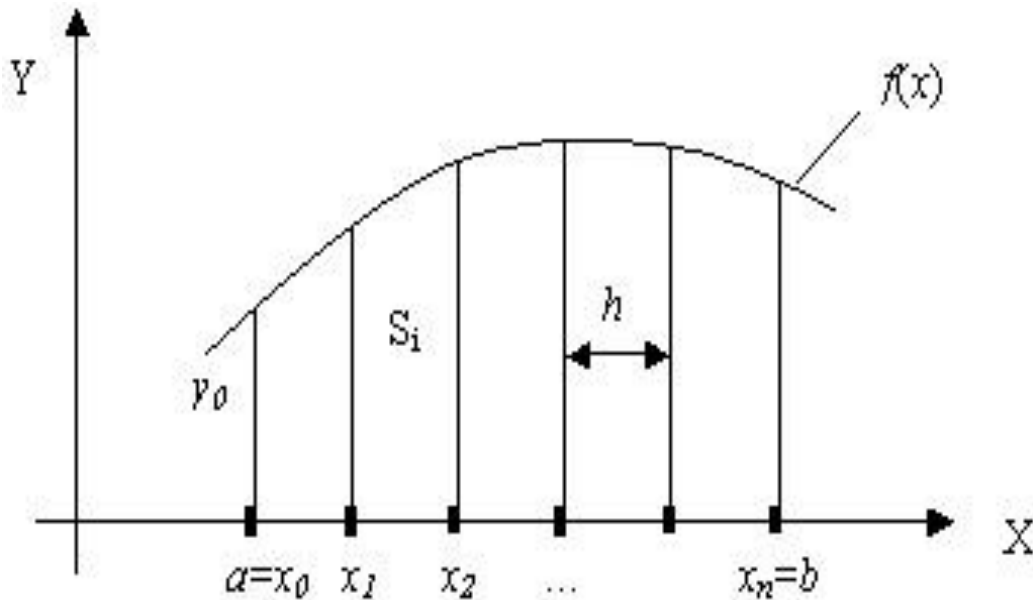
Смысл всех численных методов интегрирования состоит в приближенном вычислении указанной площади. Поэтому все численные методы являются приближенными.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

- При вычислении интеграла подынтегральная функция $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным *многочленом*.
- Порядок вычисления интеграла численными методами:
 1. Весь участок $[a, b]$ делим на n равных частей с шагом $h = (b-a) / n$.
 2. В каждой части деления подынтегральную функцию $f(x)$ аппроксимируем интерполяционным *многочленом*. Степень многочлена $n = 0, 1, 2$:
 3. Для каждой части деления определяем площадь частичной криволинейной трапеции.
 4. Суммируем эти площади. Приближенное значение интеграла I равно сумме площадей частичных трапеций

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} S_i$$

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ



Нахождение приближенного значения интеграла называется квадратурой, а формулы для приближенного вычисления интеграла - квадратурными формулами или квадратурными суммами.

Разность R между точным значением интеграла и приближенным значением называется остаточным членом или погрешностью квадратурной формулы, т.е.

$$R = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} S_i.$$

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если в каждой из частей деления интервала $[a, b]$ подынтегральная функция аппроксимируется многочленом нулевой степени, т.е. прямой, параллельной оси ОХ, то квадратурная формула называется формулой прямоугольников, а метод - **методом прямоугольников**.

Если в каждой из частей деления интервала $[a, b]$ подынтегральная функция аппроксимируется *многочленом* первой степени, т.е. прямой, соединяющей две соседние узловые точки, то квадратурная формула называется формулой трапеций, а метод - **методом трапеций**.

Если в каждой из частей деления интервала $[a, b]$ подынтегральная функция аппроксимируется *многочленом* второй степени, то квадратурная формула называется формулой Симпсона, а метод - **методом Симпсона**.

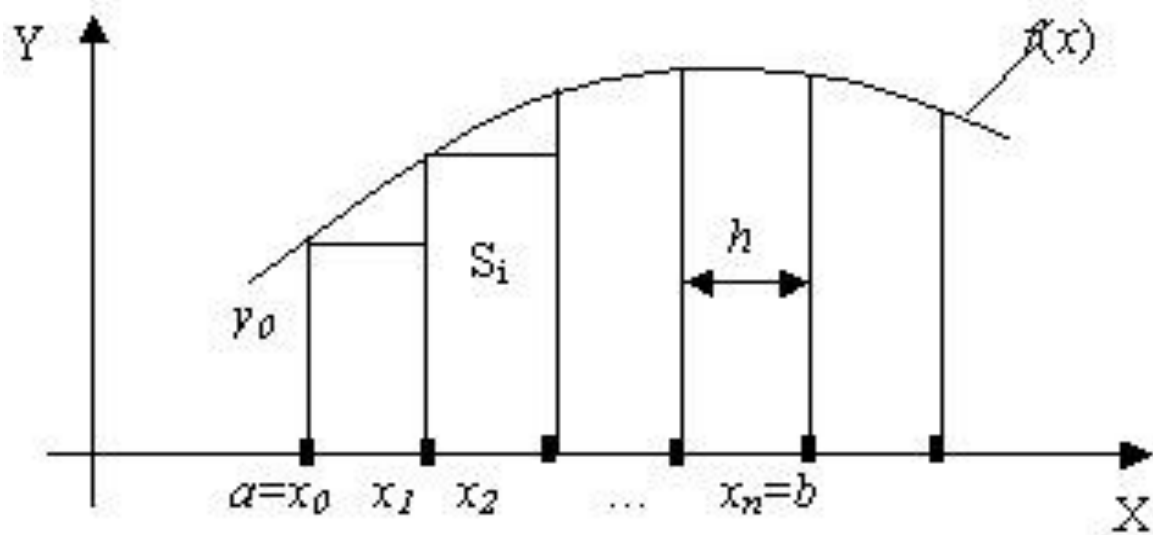
МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

1. Весь участок $[a, b]$ делим на n равных частей с шагом $h = (b - a) / n$.
2. Определяем значение y_i подынтегральной функции $f(x)$ в каждой части деления, т.е.
$$y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}.$$
3. В каждой части деления подынтегральную функцию $f(x)$ аппроксимируем интерполяционным *многочленом* степени $n = 0$, т.е. прямой, параллельной оси OX . В результате вся подынтегральная функция на участке $[a, b]$ аппроксимируется ломаной линией.
4. Для каждой части деления определяем площадь S_i частичного прямоугольника.
5. Суммируем эти площади. Приближенное значение интеграла I равно сумме площадей частичных прямоугольников.

МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Если высота каждого частичного прямоугольника равна значению подынтегральной функции в левых концах каждого шага, то метод называется методом левых прямоугольников. Тогда квадратурная формула имеет вид

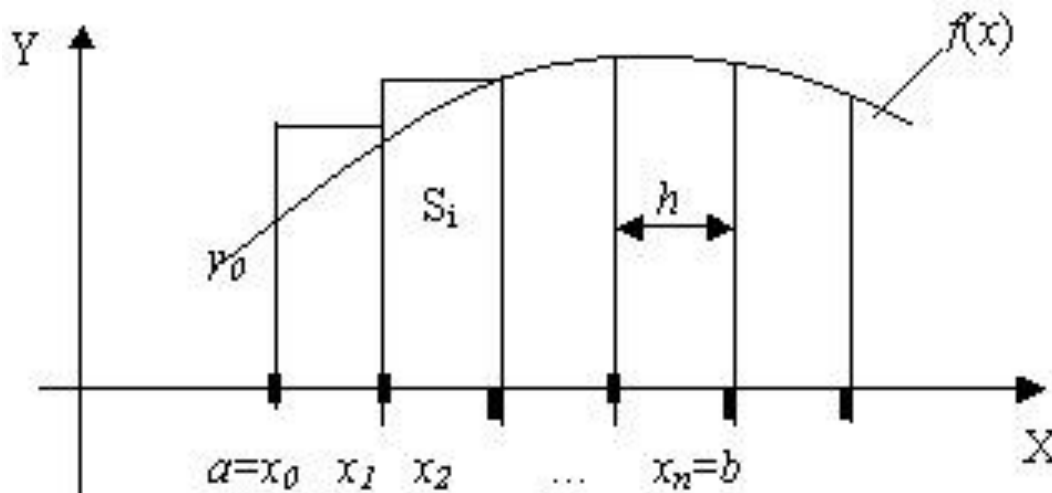
$$I = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot y_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i.$$



МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

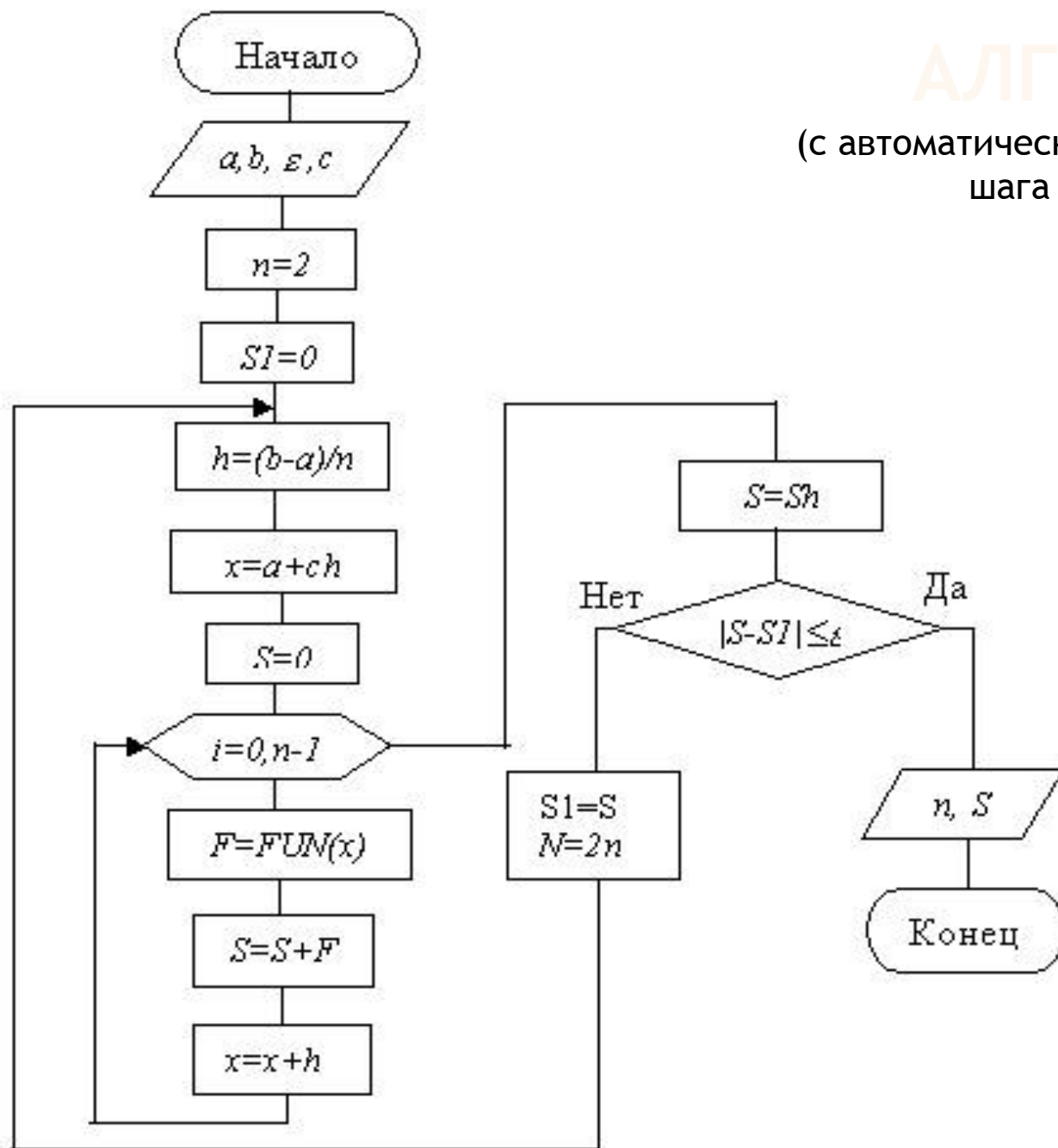
Если высота каждого частичного прямоугольника равна значению подынтегральной функции в правых концах каждого шага, то метод называется методом правых прямоугольников. Тогда квадратурная формула имеет вид

$$I = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n h \cdot y_i = h \cdot \sum_{i=1}^n y_i.$$



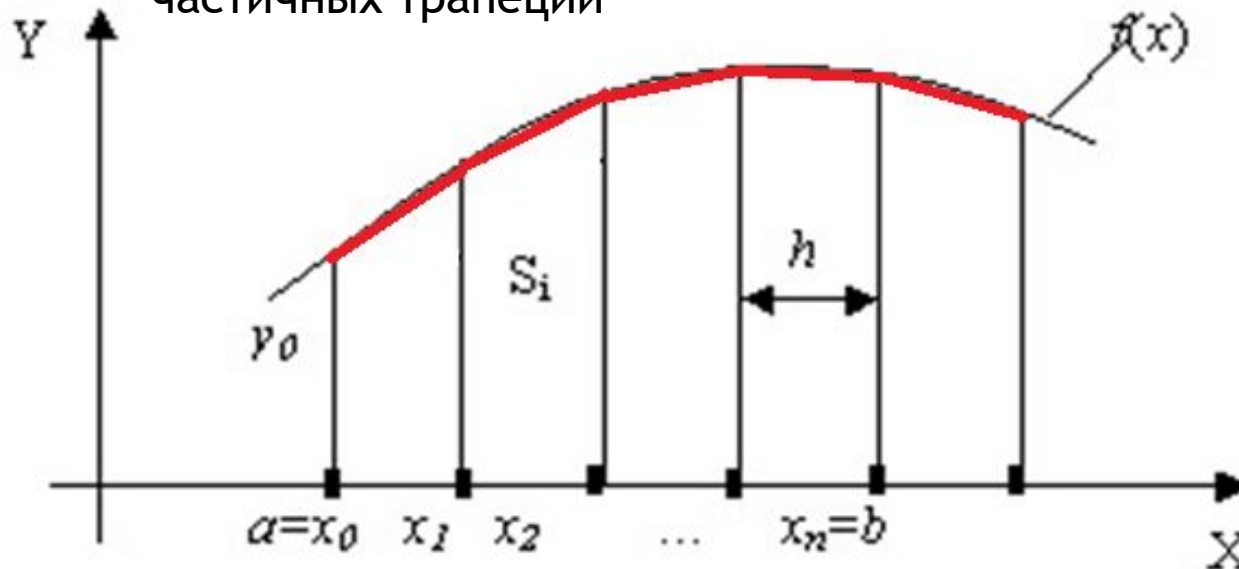
АЛГОРИТМ

(с автоматическим определением шага по оси x)



МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

- Интервал $[a, b]$ делим на n равных частей с шагом $h = (b - a) / n$.
- Вычисляем значение подынтегральной функции в каждой *узловой* точке
- На каждом шаге подынтегральную функцию $f(x)$ аппроксимируем прямой, соединяющей две соседние узловые точки. В результате вся подынтегральная функция на участке $[a, b]$ заменяется ломаной линией проходящей через все узловые точки.
- Вычисляем площадь каждой частичной трапеции.
- Приближенное значение интеграла равно сумме площадей частичных трапеций



МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

Найдем площади S_i частичных трапеций:

$$S_0 = \frac{1}{2}h(y_0 + y_1),$$

$$S_1 = \frac{1}{2}h(y_1 + y_2),$$

$$S_2 = \frac{1}{2}h(y_2 + y_3),$$

...

$$S_{n-1} = \frac{1}{2}h(y_{n-1} + y_n).$$

Приближенное значение интеграла равно

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} S_i = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} (y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i).$$

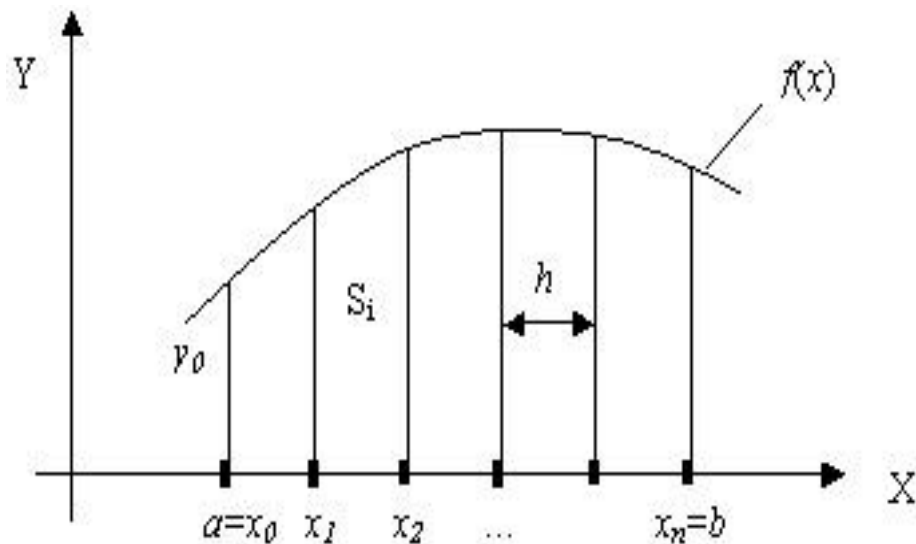
МЕТОД СИМПСОНА

- ◉ подынтегральная функция аппроксимируется квадратичной *параболой* $a_0x^2 + a_1x + a_2$.
- ◉ Для построения квадратичной *параболы* необходимо иметь три точки, поэтому каждая часть деления включает два шага, т.е. $L_k = 2h$.
- ◉ Таким образом, количество частей деления $N_2 = n/2$.
- ◉ площадь между точками S_1 равна определенному интегралу от квадратичной *параболы* на участке $[x_0, x_2]$:

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} (a_0x^2 + a_1x + a_2)dx = \frac{1}{3}a_0x^3 + \frac{1}{2}a_1x^2 + a_2x \Big|_{x_0}^{x_2} = \\ = \frac{x_2 - x_0}{6} (2a_0(x_0 + x_0x_2 + x_2^2) + 3a_1(x_0 + x_2 + 6a_2)).$$

- ◉ Известные коэффициенты квадратичной *параболы* a_0, a_1, a_2 определяются из условия прохождения *параболой* через три *узловых* точки с координатами $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

МЕТОД СИМПСОНА



На основании этого условия строим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0x_0^2 + a_1x_0 + a_2 = y_0, \\ a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 = y_1, \\ a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 = y_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем коэффициенты *параболы*.

МЕТОД СИМПСОНА

В результате имеем: $S_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Для участка $[x_2, x_4]$: $S_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$

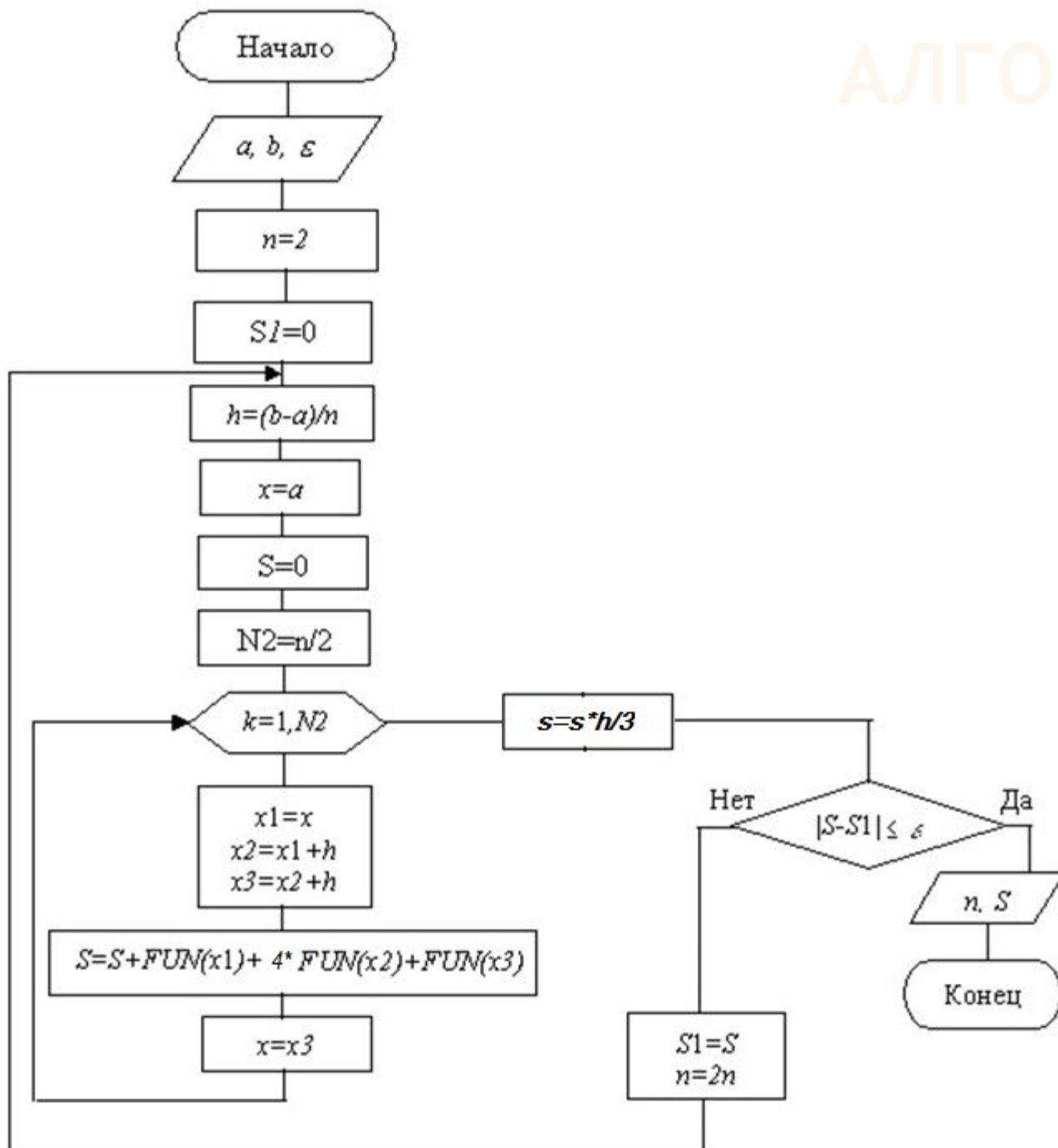
Суммируя все площади S_k под квадратичными *параболами*, получим квадратурную формулу по *методу Симпсона*:

$$S = \sum_{k=1}^{N/2} S_k = \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{N/2} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}),$$

$N/2$ - количество частей деления

Точность *метода Симпсона* имеет порядок (h^3/h^4)

АЛГОРИТМ



ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Дифференцирование

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общий вид дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0.$$

$$x \cdot y' - (x^2 - 1) \cdot y = 0$$

Нормальная форма дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y),$$

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x} \cdot y$$

$y=y(x)$ - неизвестная функция,
подлежащая определению

$f(x,y)$ - первая производная
функции $y(x)$

$y(x)$ - обыкновенное
дифференциальное
уравнение

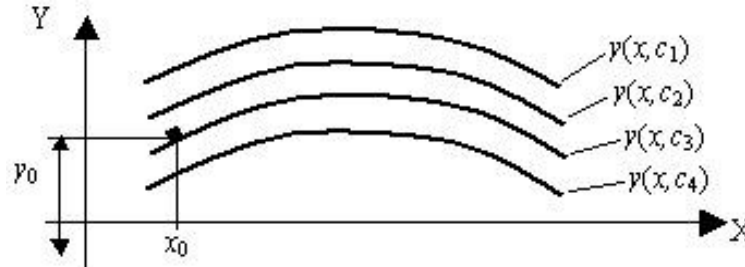
$y(x, z \dots)$ - уравнение в
частных производных

РЕШЕНИЕ ДИФФ. УРАВНЕНИЙ

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y),$$

является семейство функций $y = y(x, c)$



В прикладных задачах ищут **частные решения**
дифференциальных уравнений

Нахождение *частного решения* дифференциального уравнения,
удовлетворяющего начальному условию

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

называется **задачей Коши**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Методы Рунге - Кутты: основаны на аппроксимации искомой функции $y(x)$ в пределах каждого шага *многочленом*, который получен при помощи разложения функции $y(x)$ в окрестности шага h каждой i -ой точки в ряд Тейлора

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \\ + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x_i) + \dots$$

МЕТОД РУНГЕ - КУТТА 1-ГО ПОРЯДКА (МЕТОД ЭЙЛЕРА)

Используется только h^1

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i)$$

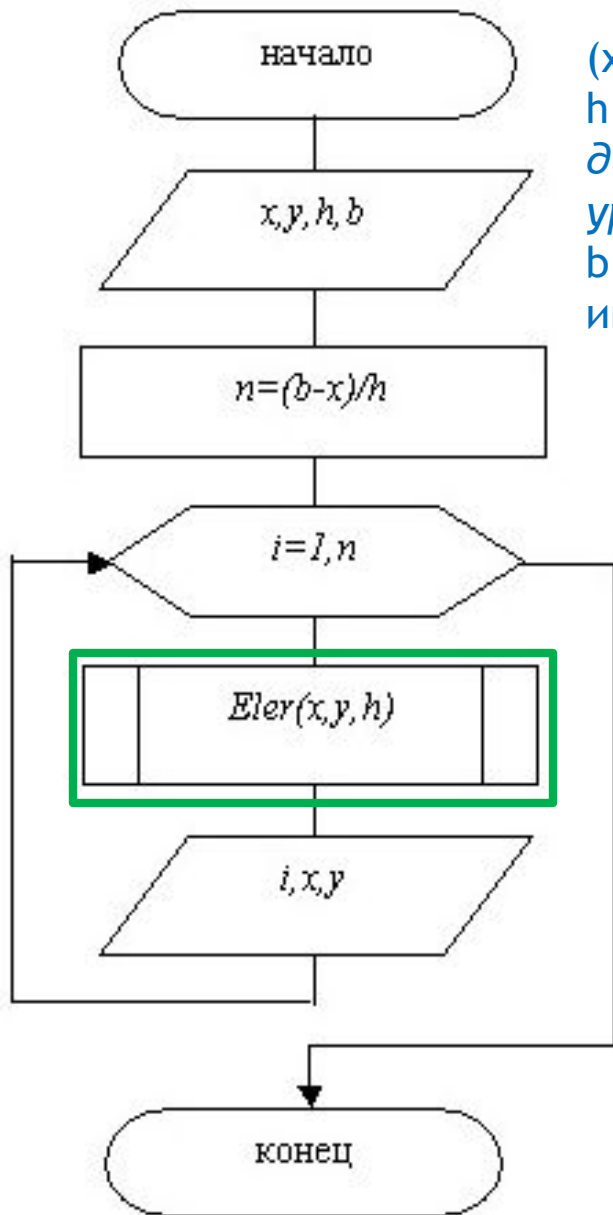
Так как $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

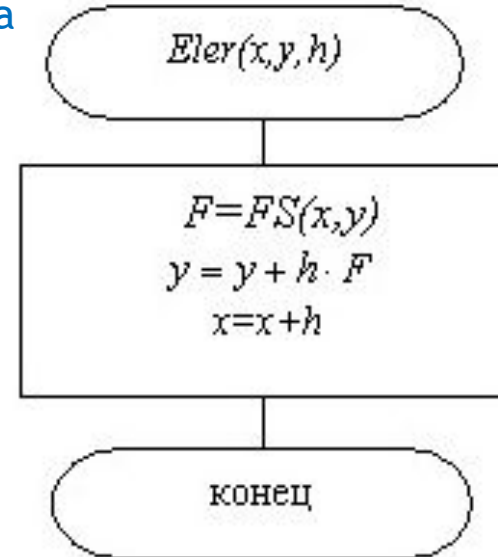
формула Эйлера

точность метода Эйлера на каждом шаге составляет $\sim h^2$

АЛГОРИТМ



(x, y) - начальная точка
 h - шаг интегрирования
дифференциального
уравнения,
 b - конец интервала
интегрирования



(x, y) - текущие значения
табличной функции

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА

Формула Эйлера: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$

$$f(x_i, y_i) = y'(x_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$$

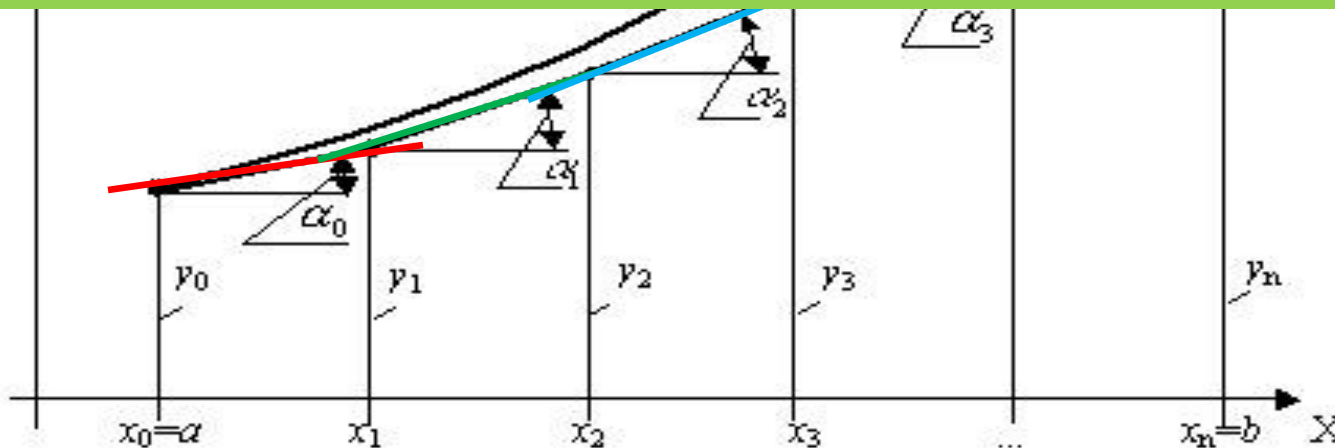
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \operatorname{tg} \alpha_i,$$

$\operatorname{tg} \alpha_i$ - тангенс угла наклона касательной к искомой функции $y(x)$
в начальной точке каждого шага

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА

Недостаток: наклон касательной в пределах каждого шага считается постоянным и равным значению производной в начальной точке шага x_i . На каждом шаге вносится погрешность, ошибки накапливаются.

метод Эйлера рекомендуется применять для решения дифференциальных уравнений при малых значениях шага интегрирования h .



МЕТОД РУНГЕ - КУТТА 2-ГО ПОРЯДКА (МОД. МЕТОД ЭЙЛЕРА)

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x_i).$$

? нужно определить *вторую производную* $y''(x_i)$

! можно аппроксимировать *разделенной разностью* 2-го порядка

$$y''(x_i) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h}$$

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h}{2} \cdot \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h} = \\ &= y(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i + h). \end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + \boxed{\frac{h}{2} f(x_i, y_i)} + \boxed{\frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})}$$

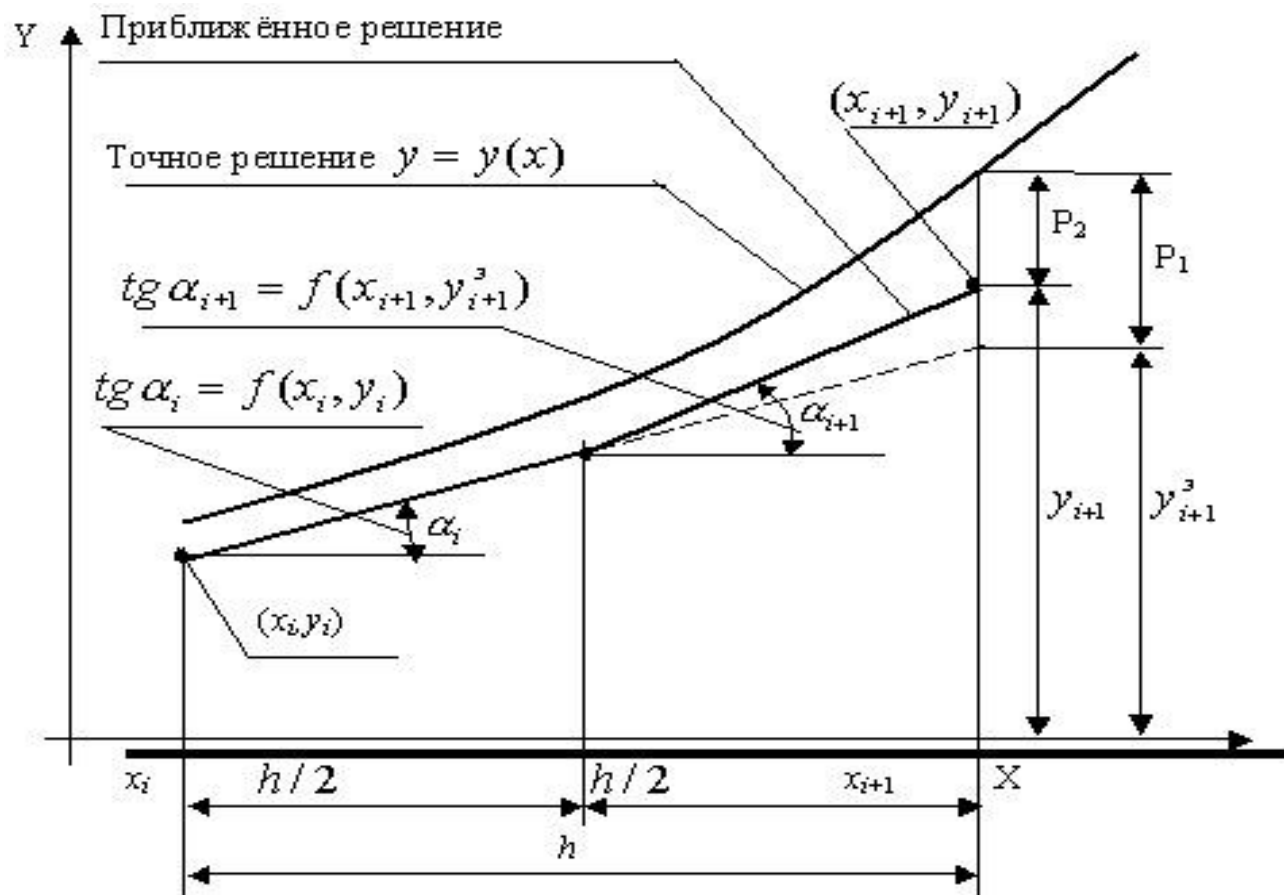
Точность *модифицированного метода Эйлера* на каждом шаге $\approx h^3$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА

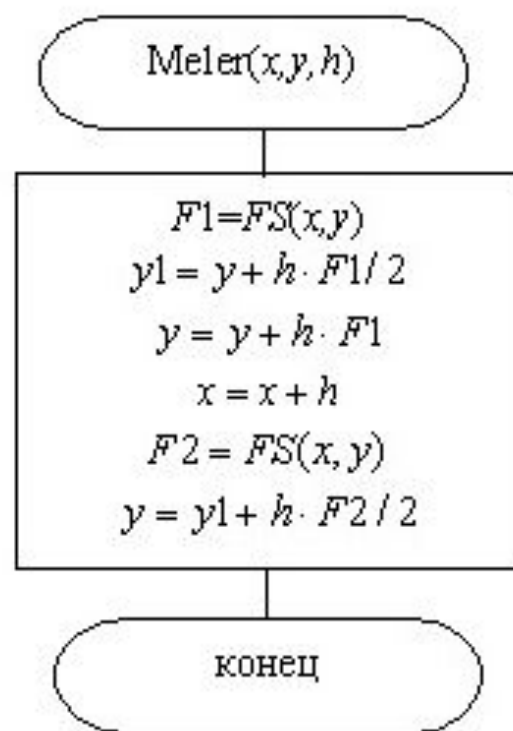
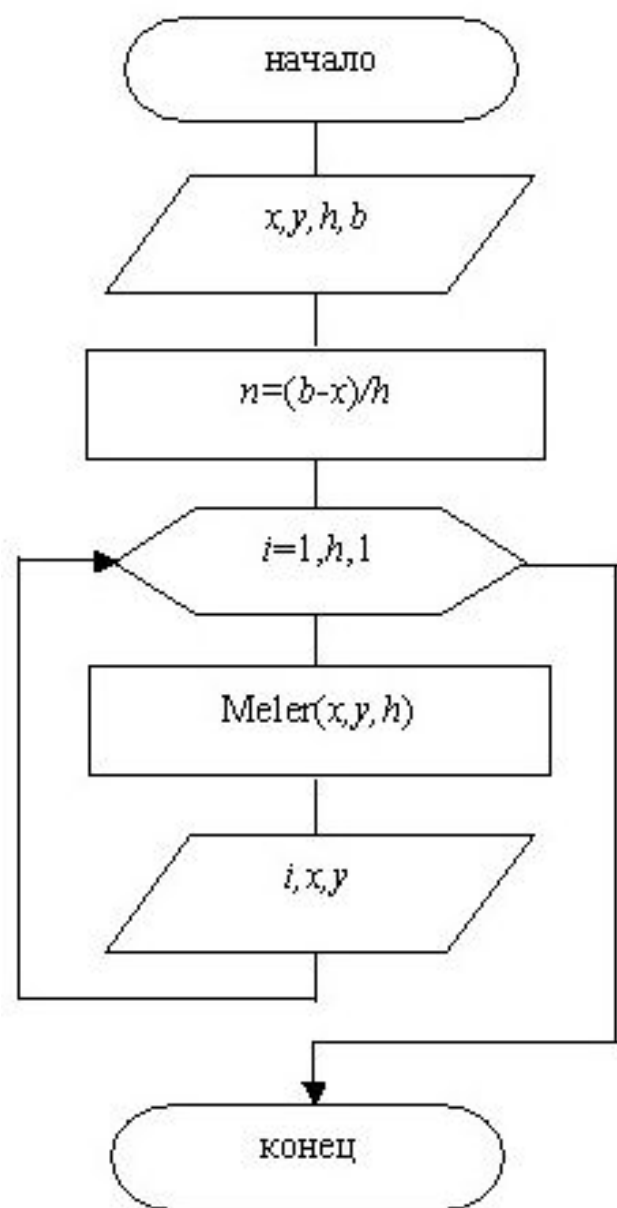
$$f(x_i, y_i) = y'(x) = \operatorname{tg} \alpha_i,$$

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = y'(x_{i+1}) = \operatorname{tg} \alpha_{i+1},$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha_i + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha_{i+1},$$



АЛГОРИТМ



МЕТОД РУНГЕ - КУТТА 4-ГО ПОРЯДКА (МЕТОД РУНГЕ - КУТТА)

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) \dots$$

ошибка на каждом шаге имеет порядок h^5

вторая y'' , третья y''' и четвертая $y^{(4)}$ производные функции $y(x)$ аппроксимируются *разделенными разностями* второго, третьего и четвертого порядков соответственно

$$T_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

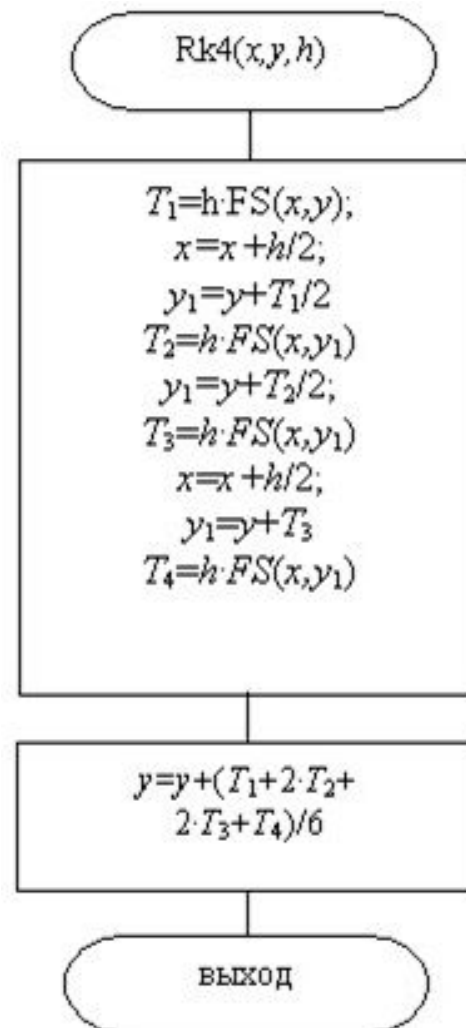
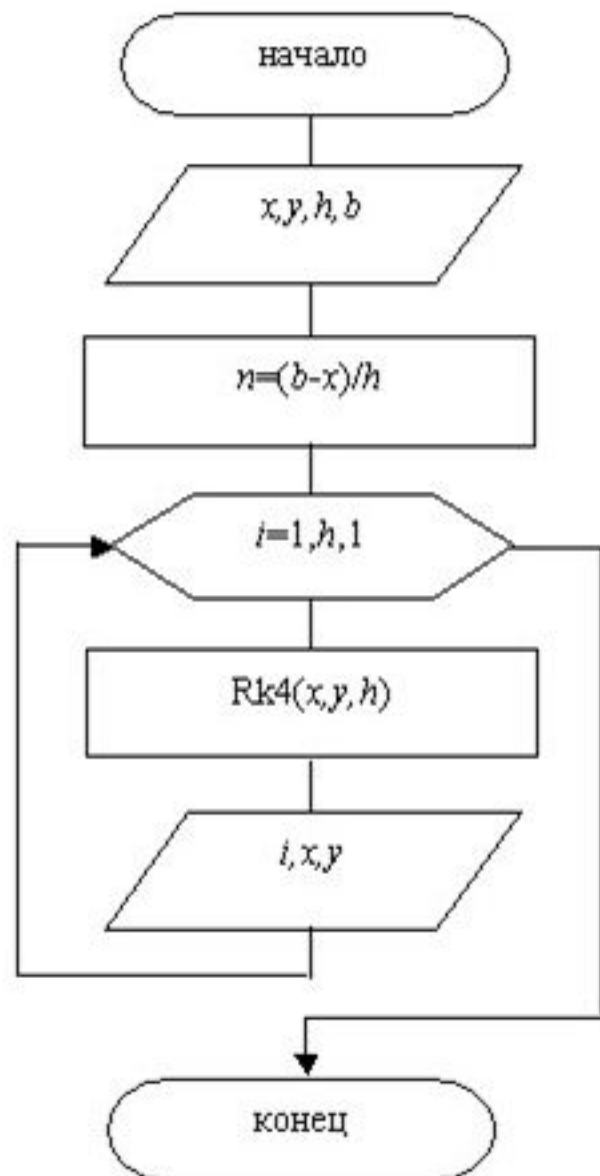
$$T_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_1/2),$$

$$T_3 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_2/2),$$

$$T_4 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + (T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 + T_4)/6.$$

АЛГОРИТМ



РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ М-ГО ПОРЯДКА

любое дифференциальное уравнение m -го порядка

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$$

сводится к системе, состоящей из m дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{(m-1)}' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{(m-1)}) \end{cases}$$

Численным решением системы является m табличных функций

$$y, y_1 = y', y_2 = y'', \dots, y_m = y^{(m-1)},$$

т.е. функция $y(x)$ и все ее производные, включая производную $(m-1)$ -го порядка.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ М-ГО ПОРЯДКА

каждая из табличных функций определяется на промежутке $[a, b]$ с шагом h и включает n узловых точек. Таким образом, численным решением уравнения является матрица порядка $(n \times m)$

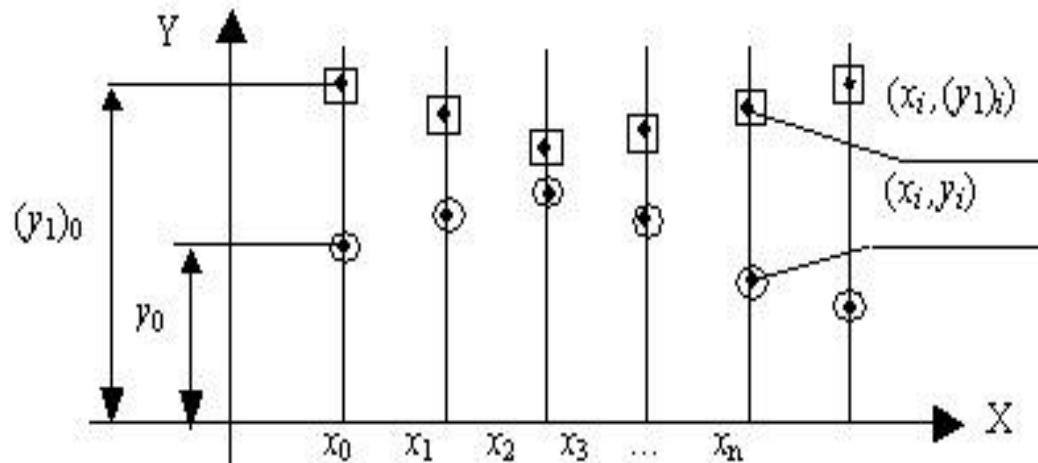
i	x	y	$y_1=y'$,	$y_1=y''_1$,	:	$y_{m-1}=y^{(m-1)}$
0	x_0	y_0	$(y_1)_0$	$(y_2)_0$	:	$(y_{m-1})_0$
1	x_1	y_1	$(y_1)_1$	$(y_2)_1$	:	$(y_{m-1})_1$
2	x_2	y_2	$(y_1)_2$	$(y_2)_2$	:	$(y_{m-1})_2$
3	x_3	y_3	$(y_1)_3$	$(y_2)_3$	:	$(y_{m-1})_3$
:	:	:	:	:	:	:
n	x_n	y_n	$(y_1)_n$	$(y_2)_n$	:	$(y_{m-1})_n$

m - порядок дифференциального уравнения

$n = (b-a)/h$ - количество шагов интегрирования

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ М-ГО ПОРЯДКА

На графике решением задачи Коши для системы, состоящей из m дифференциальных уравнений первого порядка, является совокупность $(n \times m)$ узловых точек



каждому шагу интегрирования, т.е. каждому значению x_i , соответствуют m узловых точек с координатами

$$(x_i, y_1), (x_i, (y_1)_i), (x_i, (y_2)_i), \dots, (x_i, (y_{m-1})_i).$$

ПРИМЕР

Дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \frac{1}{x}y' - \frac{x^2 - 1}{x^2}y$$

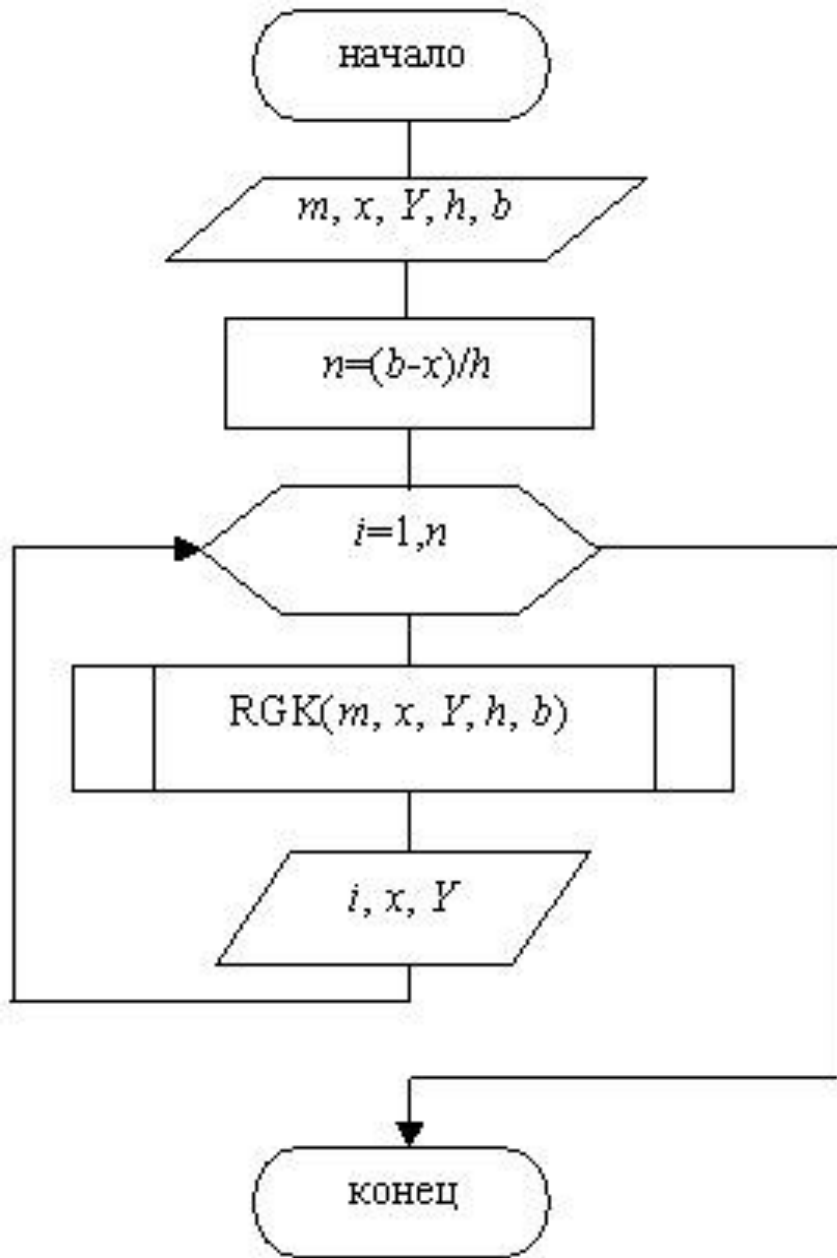


$$\begin{aligned} y(1) &= y(x), \\ y(2) &= y'(x) \end{aligned}$$



$$\begin{cases} y'(1) = y(2), \\ y'(2) = \frac{1}{x}y(2) - \frac{x^2-1}{x^2}y(1). \end{cases}$$

ОСНОВНАЯ ПРОГРАММА



m -порядок системы,
 h -шаг интегрирования,
 n -количество шагов интегрирования,
 x -начальное и далее - текущее значение x ,
 Y -массив длиной m , куда заносим начальные и далее - текущие значения решений системы на одном шаге интегрирования.

