

# Разбор задач ЕГЭ

Логические уравнения. • • •

В1

5

# Задача 1.

Каково наибольшее целое число  $X$ , при котором истинно высказывание  $(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$ ?

Переведём следствие и раскроем скобки.

$$(X \cdot (X+1) \leq 10) \vee ((X+1) \cdot (X+2) < 10) = 1$$

$X$  должно быть целым и наибольшим, поэтому отрицательные числа даже не будем рассматривать.

Данное выражение истинно если хотя бы одна его часть истинна, очевидно  $X$  будет иметь большее значение в левой части выражения. Максимальный целый  $X$ , удовлетворяющий левому неравенству, находим методом научного тыка, предполагая что  $X=2$ .

Ответ 2

## Задача 2.

Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \vee (L \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что  $K=1$ ,  $L=1$ ,  $M=0$ ,  $N=1$ .

Это выражение ложно только если ложны 3 составляющие:

1.  $(K \rightarrow M)=0$ , здесь возможен только один случай:  $K=1$ ,  $M=0$
2.  $(L \wedge K)=0$ , так как  $K=1$  из предыдущего случая, то  $L=0$
3.  $\neg N=0$ ,  $N=1$

Запишем в нужном порядке K, L, M и N  $\Rightarrow$  1001

# Задача 3.

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \wedge Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee P) = 0$$

где  $X, Y, Z, P$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

А Чтобы данное уравнение принимало значение «Ложь», требуется выполнение 2-х равенств:

1.  $(X \wedge Y \vee Z)=1$  , если  $Z=1$ , то  $X$  и  $Y$  могут принимать любое значение и мы получим 4 решения. Если  $Z=0$ , то мы имеем только одно решение  $X=1, Y=1, Z=0$ .
2.  $(Z \vee P) = 0$ , Здесь возможно только одно решение –  $Z=0, P=0$ .

Из 2-х уравнений следует, что  $Z=0$ , а в этом случае существует только одно решение.

Ответ 1

## Задача 4.

Сколько различных решений имеет уравнение  $J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0$ , где  $J, K, L, M, N$  — логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $J, K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

А Данное выражение истинно, если все переменные истинны.

Для  $N=1$  мы имеем  $2^4=16$  возможных комбинаций (2 значения 1 и 0 – основание системы, а 4 переменных – 4 разряда) Лишь одна комбинация, где все переменные  $J, K, L, M$  равны 1, не подойдёт, т.е. нам подходит 15 комбинаций.

Для  $N=0$  мы тоже получим 15 подходящих комбинаций, итого у нас  $15+15=30$  различных решений.

# Задача 5.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \vee y_1 = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Эта задача отлична от предыдущих, удобнее всего решать её таблицей. Последнее уравнение будем называть исключающим. Рассмотрим первое уравнение и заметим, что оно будет истинным, только если все

# Задача 5.

$(x_1 \rightarrow x_2) = 1$ ,  $(x_2 \rightarrow x_3) = 1$  и т. д. связаны импликацией; она ложна, если первое выражение истинно, а второе ложно. Так же первые скобки связаны переменной  $x_2$ , а значит выражения являются **зависимыми**.

Предположим, что первая переменная истинна, тогда вторая может быть только истинной и истинными должны быть все. Заметьте, что если  $x_3 = 1$ , то все следующие за ней переменные должны быть также истинны.

| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
|----|----|----|----|----|
| 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 0  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 0  | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 0  | 0  | 0  | 1  | 1  |
| 0  | 0  | 0  | 0  | 1  |
| 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |

Таким образом мы получим таблицу решений для первого уравнения, из которой видно, что решений шесть. Точно такая же таблица получится и для 2-го уравнения. Попробуем их

**совместить.**

# Задача 5.

Таблица возможных комбинаций решений первых двух уравнений.

| решенияХ<br>/<br>решенияУ | 11111      | 01111      | 00111      | 00011      | 00001      | 00000      |
|---------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                           | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 |
| y1y2y3y4y5                | 11111      | 11111      | 11111      | 11111      | 11111      | 11111      |
| y1y2y3y4y5                | 01111      | 01111      | 01111      | 01111      | 01111      | 01111      |
| y1y2y3y4y5                | 00111      | 00111      | 00111      | 00111      | 00111      | 00111      |
| y1y2y3y4y5                | 00011      | 00011      | 00011      | 00011      | 00011      | 00011      |
| y1y2y3y4y5                | 00001      | 00001      | 00001      | 00001      | 00001      | 00001      |
| y1y2y3y4y5                | 00000      | 00000      | 00000      | 00000      | 00000      | 00000      |

Рассмотрим условие:  $x_1 \vee y_1 = 1$ , исключим из таблицы все неподходящие под это уравнение решения, т.е. такие, где  $x_1$  и  $y_1$  одновременно принимают ложное значение. Отметим их оранжевым.

# Задача 5.

Таблица возможных комбинаций решений первых двух уравнений.

| решенияХ<br>/<br>решенияУ | 11111      | 01111      | 00111      | 00011      | 00001      | 00000      |
|---------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                           | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 | x1x2x3x4x5 |
| y1y2y3y4y5                | 11111      | 11111      | 11111      | 11111      | 11111      | 11111      |
| y1y2y3y4y5                | 01111      | 01111      | 01111      | 01111      | 01111      | 01111      |
| y1y2y3y4y5                | 00111      | 00111      | 00111      | 00111      | 00111      | 00111      |
| y1y2y3y4y5                | 00011      | 00011      | 00011      | 00011      | 00011      | 00011      |
| y1y2y3y4y5                | 00001      | 00001      | 00001      | 00001      | 00001      | 00001      |
| y1y2y3y4y5                | 00000      | 00000      | 00000      | 00000      | 00000      | 00000      |

Всего у нас  $6^6 = 36$  решений в таблице, из них, после исключающего уравнения, у нас остаётся  $36 - 25 = 11$  решений.

Ответ 11

# Задача 6.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_3 \vee x_4) = 1$$

$$(x_3 \vee x_4) \rightarrow (x_5 \vee x_6) = 1$$

$$(x_5 \vee x_6) \rightarrow (x_7 \vee x_8) = 1$$

Так как нам надо найти все наборы переменных, при которых выполняются все условия, то мы можем объединить условия с помощью функции «и»:

$$((x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_3 \vee x_4)) \wedge ((x_3 \vee x_4) \rightarrow (x_5 \vee x_6)) \wedge ((x_5 \vee x_6) \rightarrow (x_7 \vee x_8)) = 1$$

# Задача 6.

Далее нам следует заменить выражения в скобках буквенными переменными, чтобы упростить выражение:

$$x1 \vee x2 = A;$$

$$x3 \vee x4 = B;$$

$$x5 \vee x6 = C;$$

$$x7 \vee x8 = D.$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) = 1$$

Напомним, что решение этого уравнения мы уже знаем:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

A, B, C, D – независимы (не имеют общих переменных), в таком случае количество возможных решений = количество решений A \* количество решений B \* количество решений C \* количество решений D. Для A=1 существует 3 решения, для A=0 всего 1. Так же дела обстоят и с остальными переменными.

# Задача 6.

Отметим рядом с каждым решением количество комбинаций, которое ему соответствует:

| A     | B     | C     | D     | Подсчёт комбинаций |
|-------|-------|-------|-------|--------------------|
| $1_3$ | $1_3$ | $1_3$ | $1_3$ | $3*3*3*3=81$       |
| $0_1$ | $1_3$ | $1_3$ | $1_3$ | $1*3*3*3=27$       |
| $0_1$ | $0_1$ | $1_3$ | $1_3$ | $1*1*3*3=9$        |
| $0_1$ | $0_1$ | $0_1$ | $1_3$ | $1*1*1*3=3$        |
| $0_1$ | $0_1$ | $0_1$ | $0_1$ | $1*1*1*1=1$        |

значения:

$$81+27+9+3+1=121.$$

Ответ 121

# Задача 7.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_3 \wedge \neg x_4) = 1$$

$$(x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_5 \wedge x_6) \vee (\neg x_5 \wedge \neg x_6) = 1$$

...

$$(x_7 \wedge \neg x_8) \vee (\neg x_7 \wedge x_8) \vee (x_9 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Сначала сделаем преобразование:

$$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) = \neg (x_1 \equiv x_2)$$

$$(x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_3 \wedge \neg x_4) = (x_3 \equiv x_4)$$

$$\neg (x_1 \equiv x_2) \vee (x_3 \equiv x_4) = (x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \equiv x_4)$$

# Задача 7.

$$(x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \equiv x_4) = 1$$

$$(x_3 \equiv x_4) \rightarrow (x_5 \equiv x_6) = 1$$

$$(x_5 \equiv x_6) \rightarrow (x_7 \equiv x_8) = 1$$

$$(x_7 \equiv x_8) \rightarrow (x_9 \equiv x_{10}) = 1$$

Сделаем, как в предыдущей задаче:

$$((x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \equiv x_4)) \wedge ((x_3 \equiv x_4) \rightarrow (x_5 \equiv x_6)) \wedge ((x_5 \equiv x_6) \rightarrow (x_7 \equiv x_8)) \wedge ((x_7 \equiv x_8) \rightarrow (x_9 \equiv x_{10})) = 1$$

Теперь замена:

$$A = (x_1 \equiv x_2)$$

$$B = (x_3 \equiv x_4)$$

$$C = (x_5 \equiv x_6)$$

$$D = (x_7 \equiv x_8)$$

$$E = (x_9 \equiv x_{10})$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow E) = 1$$

# Задача 7.

Теперь составим таблицу решений. А, В, С, D, Е тоже независимы, но у А  $x_1$  и  $x_2$  теперь соединены тождеством, а не дизъюнкцией, поэтому будет 2 случая ложного исхода и 2 случая истинного исхода. Это распространяется и на оставшиеся 4 переменные В, С, D,

| А     | В     | С     | D     | Е     | Подсчёт комбинаций |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|
| $1_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $2*2*2*2*2=32$     |
| $0_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $2*2*2*2*2=32$     |
| $0_2$ | $0_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $2*2*2*2*2=32$     |
| $0_2$ | $0_2$ | $0_2$ | $1_2$ | $1_2$ | $2*2*2*2*2=32$     |
| $0_2$ | $0_2$ | $0_2$ | $0_2$ | $1_2$ | $2*2*2*2*2=32$     |
| $0_2$ | $0_2$ | $0_2$ | $0_2$ | $0_2$ | $2*2*2*2*2=32$     |

Далее находим сумму  $32*6=192$  решения.

Ответ 192

# Задача 8.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = 1$$

$$(x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_3 \wedge x_4) = 1$$

...

$$(x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_8 \wedge \neg x_9) \vee (x_9 \wedge \neg x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge x_{10}) = 1$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Казалось бы задача похожа на предыдущую, но! в правой и левой части есть одинаковые переменные, а значит они зависимы и решать придётся графом, а не таблицей.

# Задача 8.

Вначале преобразуем:

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) = (x_1 \equiv x_2)$$

$$(x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = \neg(x_2 \equiv x_3)$$

$$(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_2 \equiv x_3) = \neg(x_2 \equiv x_3) \vee (x_1 \equiv x_2) = (x_3 \equiv x_2) \rightarrow (x_2 \equiv x_1) = 1$$

$$(x_3 \equiv x_2) \rightarrow (x_2 \equiv x_1) = 1$$

$$(x_4 \equiv x_3) \rightarrow (x_3 \equiv x_2) = 1$$

$$(x_5 \equiv x_4) \rightarrow (x_4 \equiv x_3) = 1$$

$$(x_6 \equiv x_5) \rightarrow (x_5 \equiv x_4) = 1$$

$$(x_7 \equiv x_6) \rightarrow (x_6 \equiv x_5) = 1$$

$$(x_8 \equiv x_7) \rightarrow (x_7 \equiv x_6) = 1$$

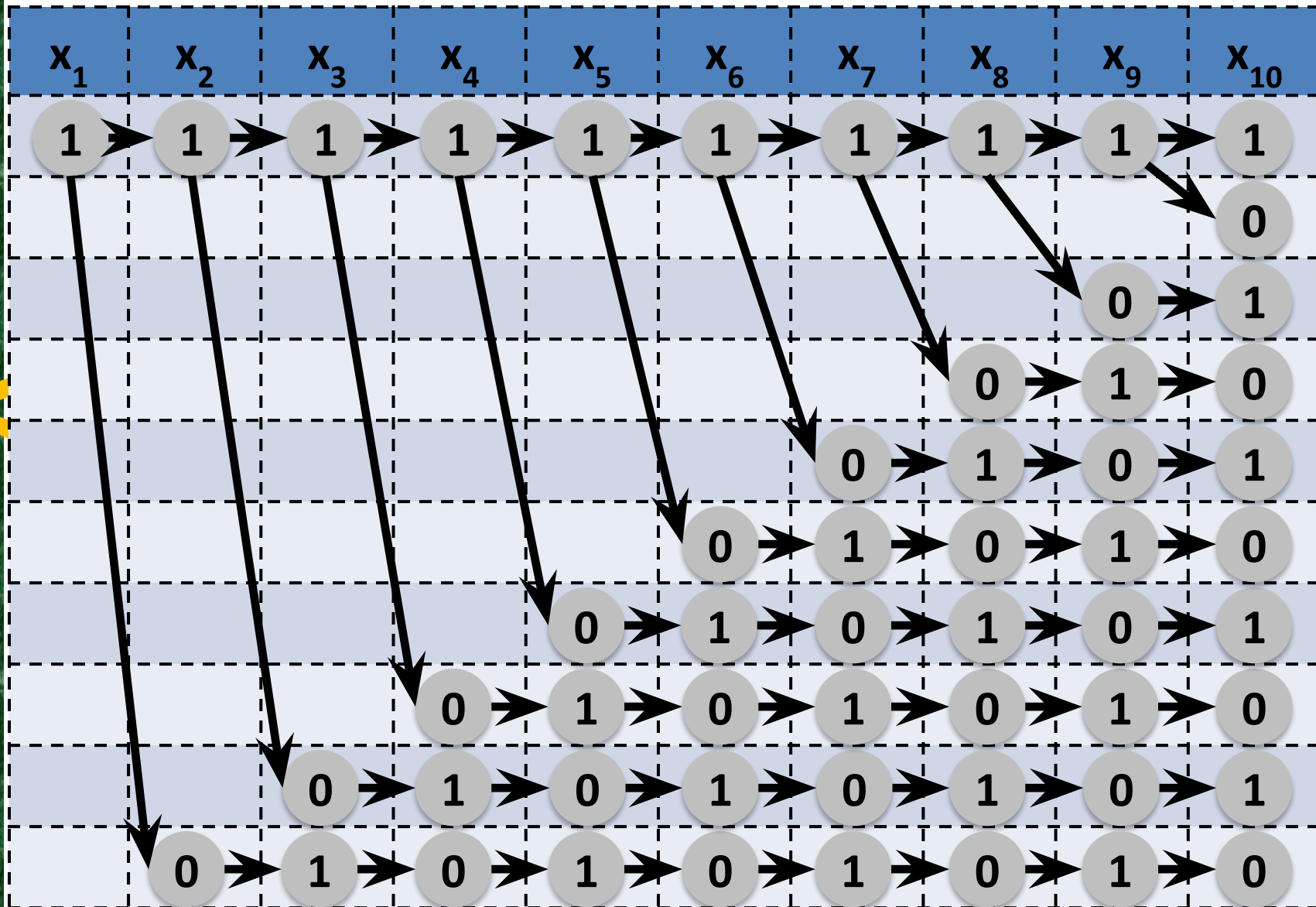
$$(x_9 \equiv x_8) \rightarrow (x_8 \equiv x_7) = 1$$

$$(x_{10} \equiv x_9) \rightarrow (x_9 \equiv x_8) = 1$$

Тождество – симметричная операция, поэтому существует 2 симметричных набора решений, для нуля и для единицы, построим граф решений, предположив что все переменные равны единице, а затем будем

# Задача 8.

Составим граф или таблицу решений:



## Задача 8.

Из таблицы видно, что существует 10 решений для единицы и, соответственно, будет еще 10 для нуля. Всего 20 решений.

Ответ 20

# Вопросы.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_2 \rightarrow y_1) \wedge (y_3 \rightarrow y_2) \wedge (y_4 \rightarrow y_3) \wedge (y_5 \rightarrow y_4) \wedge (y_6 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_5 \rightarrow y_6 = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Указание: переставьте скобки во 2-м выражении от  $(y_6 \rightarrow y_5)$  к  $(y_2 \rightarrow y_1)$ , из таблицы решений исключите все те, в которых одновременно  $x_5=1, y_6=0$ .

# Вопросы.

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg x_1 \vee x_2 = 1$$

$$\neg x_2 \vee x_3 = 1$$

...

$$\neg x_9 \vee x_{10} = 1,$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  — логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Указание: преобразуйте каждое выражение вот таким образом:  $\neg x_1 \vee x_2 = x_1 \rightarrow x_2$ , затем объедините все выражения конъюнкцией, и получится уравнение, такого же вида, как в задаче №5.

Ответ 11.

# Вопросы.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1) = 1$$

$$(\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2) \vee (x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2) \vee (x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2) = 1$$

$$(\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3) \vee (x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3) \vee (x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3) = 1$$

$$(\neg x_4 \wedge y_4 \wedge z_4) \vee (x_4 \wedge \neg y_4 \wedge z_4) \vee (x_4 \wedge y_4 \wedge \neg z_4) = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных

$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

# Вопросы.

Решение. Слева - решение первого уравнения.

Посередине - решение второго уравнения. Справа – подсчет комбинаций.

Решения третьего, четвертого и пятого уравнений рассматривать не будем, т.к. они совпадают со вторым, при этом они не содержат одинаковых переменных, т.е. независимы. Заметим, что для  $x_1=1$  существует 2

| x1 | x2 | x3 | x4 |
|----|----|----|----|
| 1  | 1  | 1  | 1  |
| 0  | 1  | 1  | 1  |
| 0  | 0  | 1  | 1  |
| 0  | 0  | 0  | 1  |
| 0  | 0  | 0  | 0  |

| x1 | y1 | z1 |
|----|----|----|
| 0  | 1  | 1  |
| 1  | 0  | 1  |
| 1  | 1  | 0  |

| x1             | x2             | x3             | x4             | Комбинации |
|----------------|----------------|----------------|----------------|------------|
| 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 2*2*2*2=16 |
| 0 <sub>1</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1*2*2*2=8  |
| 0 <sub>1</sub> | 0 <sub>1</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1*1*2*2=4  |
| 0 <sub>1</sub> | 0 <sub>1</sub> | 0 <sub>1</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1*1*1*2=2  |
| 0 <sub>1</sub> | 0 <sub>1</sub> | 0 <sub>1</sub> | 0 <sub>1</sub> | 1*1*1*1=1  |

Всего в сумме  $16+8+4+2+1=31$  комбинация.