# Объять необъятное…

Учитель информатики
МОАУ СОШ № 17
МО Кореновский район
Краснодарского края
Лобурь Ирина Анатольевна

Дорогой одиннадцатиклассник!
Я хочу познакомить тебя вот с чем...

Тебе, наверное, приходилось сталкиваться с такими фразами, как объять необъятное. А вычислить невычислимое? Вот это я и предлагаю тебе сейчас сделать. Будь внимательным, а для перемещения по страницам моего проекта используй клавиши PgDown (далее) и PgUp (назад). Если встретишь подчеркнутый текст жёлтого цвета, щелкни на нём левой кнопкой мыши.

# Введение

Тебе уже, наверное, знакомо понятие определенного интеграла? Тогда ты должен знать, что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Где F(x) – Первообразная функции f(x), для которой справедливо следующее равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Поэтому, чтобы вычислить $\int_a^b f(x)dx$ достаточно найти

первообразную F(x) и… задача решена!

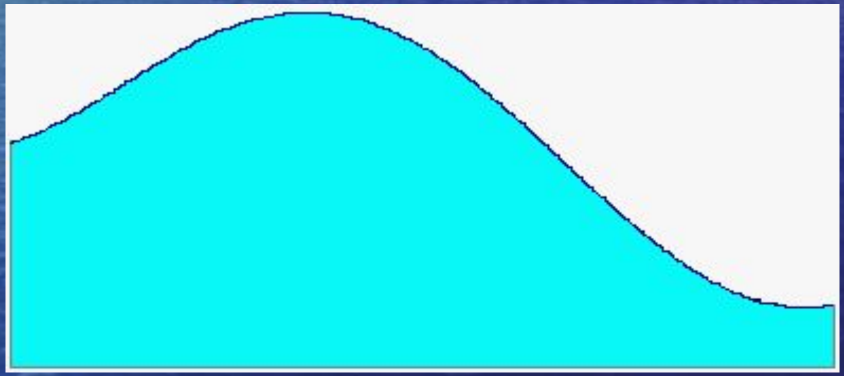
# А, только, вот вопрос:

А, если такой функции не существует?! В математике много примеров так называемых «неберущихся» интегралов, например:

$\int \sin x \cdot \ln x dx$ или $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

А если функция, как результат статистической обработки данных, задана таблично?

А вдруг ты - экономист какого-либо скупого миллиардера, и он велел тебе произвести следующий расчет: «Я желаю бассейн, имеющий форму

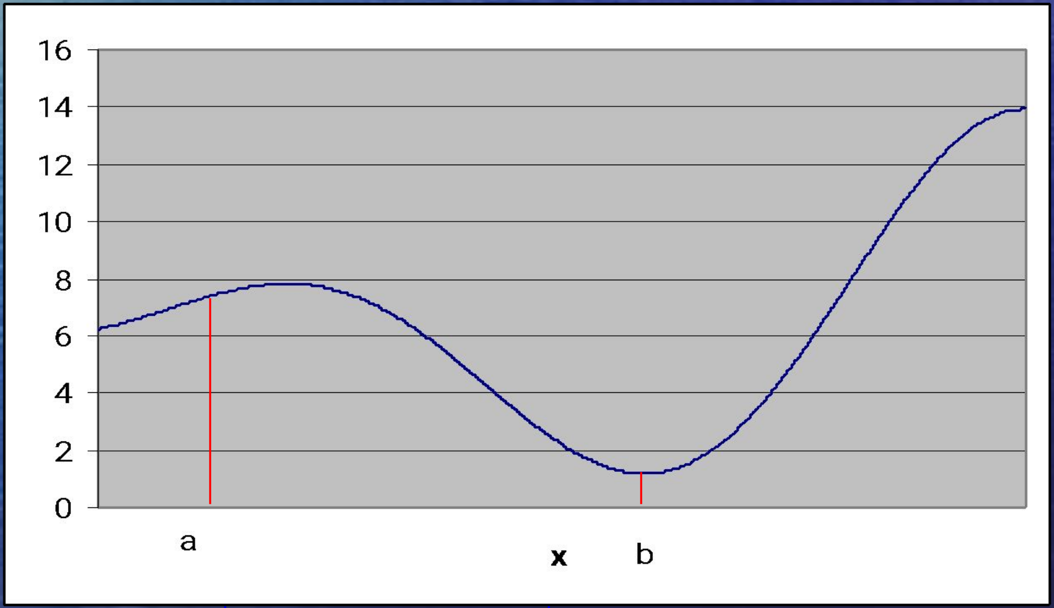


выложить дражайшими самоцветами. Но помни, расчет должен быть как можно более точным, т. к. от твоей экономности во многом будет зависеть твоё жалование.» И ты, великий математик, начинаешь решать эту задачу. Ты прекрасно знаешь, чтобы вычислить площадь криволинейной фигуры нужно вычислить интеграл.

Ты берешься за карандаш и исписываешь кипу листов, не находя решения! Интеграл не берется! Как же быть? И вот тут тебе на помощь придет твой верный помощник - компьютер!

# Урок 1

I. Ты совершенно прав, вспомнив, что геометрический смысл определенного интеграла на промежутке [a, b] есть площадь фигуры ограниченной осью Ох, прямыми x=a, x=b и графиком функции f(x).




Так давай её и вычислим, сведя к минимуму погрешность и вычеты из твоего жалованья!

I. Откроем наш любимый ”Excel “и на примере функции $y=x^2$ заполним следующим образом:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | y | $S_i$ | $S_j$ | Результат |
| 2 | 1 | 1 | 0,001 | | 2,331833 |
| 3 | 1,001 | 1,002001 | 0,001002 | 0,001002 | 2,334833 |
| 4 | 1,002 | 1,004004 | 0,001004 | 0,001004 | 2,333333 |
| 5 | 1,003 | 1,006009 | 0,001006 | 0,001006 | |
| 6 | 1,004 | 1,008016 | 0,001008 | 0,001008 | |
| 7 | 1,005 | 1,010025 | 0,00101 | 0,00101 | |
| 995 | 1,993 | 3,972049 | 0,003972 | 0,003972 | |
| 996 | 1,994 | 3,976036 | 0,003976 | 0,003976 | |
| 997 | 1,995 | 3,980025 | 0,00398 | 0,00398 | |
| 998 | 1,996 | 3,984016 | 0,003984 | 0,003984 | |
| 999 | 1,997 | 3,988009 | 0,003988 | 0,003988 | |
| 1000 | 1,998 | 3,992004 | 0,003992 | 0,003992 | |
| 1001 | 1,999 | 3,996001 | 0,003996 | 0,003996 | |
| 1002 | 2 | 4 | | 0,004 | |
| 1003 | | | | | |

Вычислим интеграл $\int_1^2 x^2 dx$ поместим в ячейку А2 значение а - начало промежутка интегрирования, и заполним столбик А с шагом h=0.001 до значения b. В ячейку В2 введём формулу, задающую функцию *f(x)*:

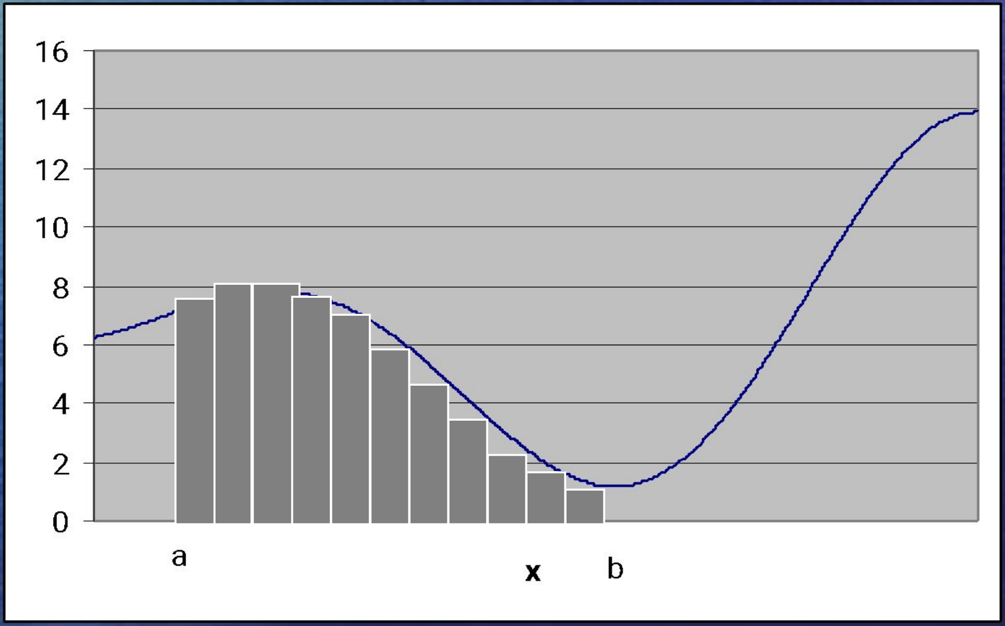
= A2^2

и скопируем её до ячейки В1002.

А далее воспользуемся одним из трёх способов.

# 1. Метод прямоугольников

Этот метод тебе хорошо известен. Разобьём нашу фигуру на прямоугольники:

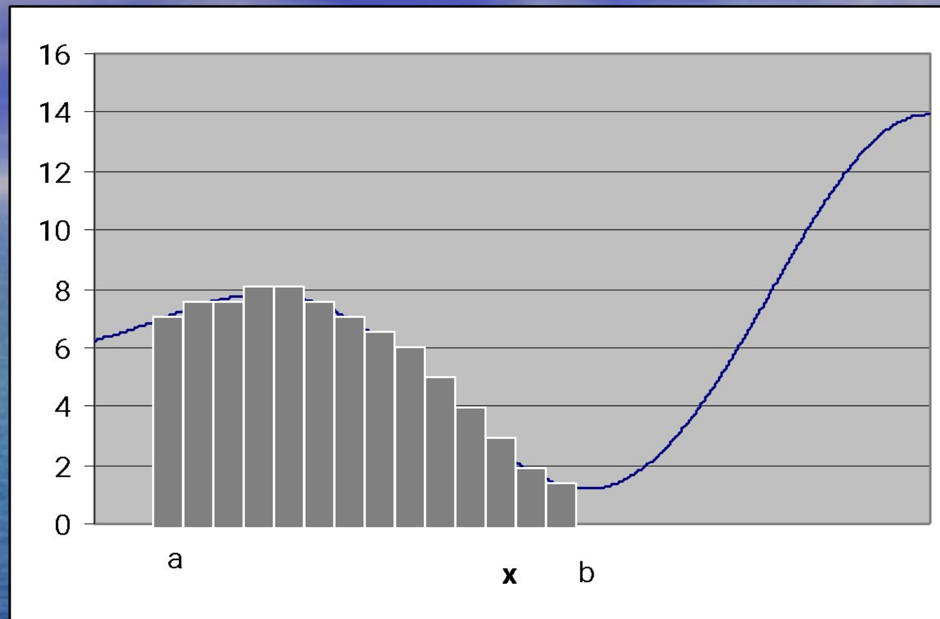



$$S_i = f(x_i) \cdot h$$

И вычислим площадь каждого получившегося прямоугольника:

.

Для этого в ячейку C2 запишем B2*0.001 и скопируем её до значения b-h (ячейка B1001)! Теперь сделаем то же самое, но только в качестве $f(x_i)$ будем брать левые стороны прямоугольников.




Но, внимание! Заполнение начнём с ячейки D3! В неё поместим =a3^2*0.001 и скопируем эту формулу до значения b включительно (ячейка D1002)!

Сумму получившихся в столбце D результатов поместим в ячейку E3.

Учитывая, что при совмещении этих двух рисунков, наш график функции окажется между получившимися ступенчатыми фигурами, заключаем: значение площади нашей фигуры также заключено между площадями ступенчатых фигур. Поэтому в E4 поместим =(E2+E3)/2.

Нажмём Enter и приблизительное значение нашего интеграла готово!

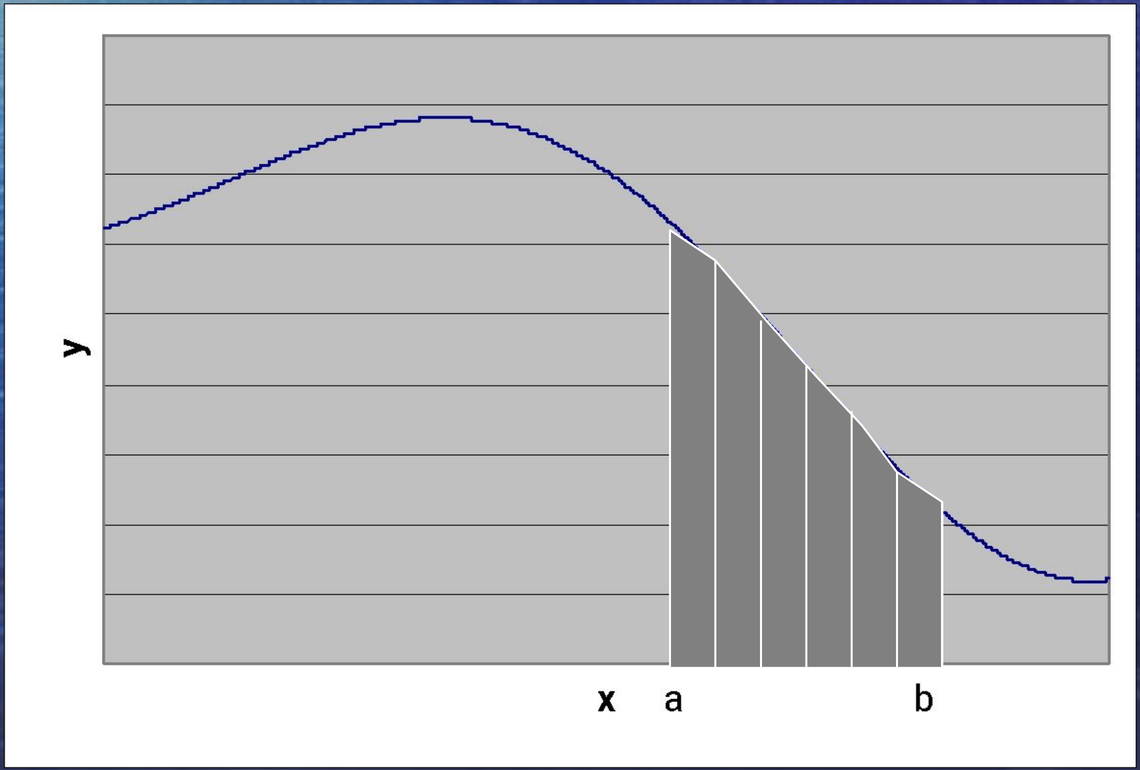
Хотите большей точности – уменьшите шаг!

# 1. Метод трапеций.

Попробуем теперь нашу фигуру разбить не на прямоугольники, а на трапеции!

Ведь если кривизна линии графика большая, то разница между площадями криволинейной трапеции и полученной ступенчатой фигуры будет очень большая!

И так…



Согласись, это гораздо ближе к делу! Итак, как и в предыдущем случае открываем Excel и заполняем линейки столбцов А и В. Найдем теперь площадь одной маленькой трапеции:

$$S_i = (f(x_i) + f(x_i + h)) \cdot h / 2$$

В ячейку С2 запишем для нашей функции $y=x^2$:

= (a2^2 + (a^2 + 0,001)^2)*0,001/2

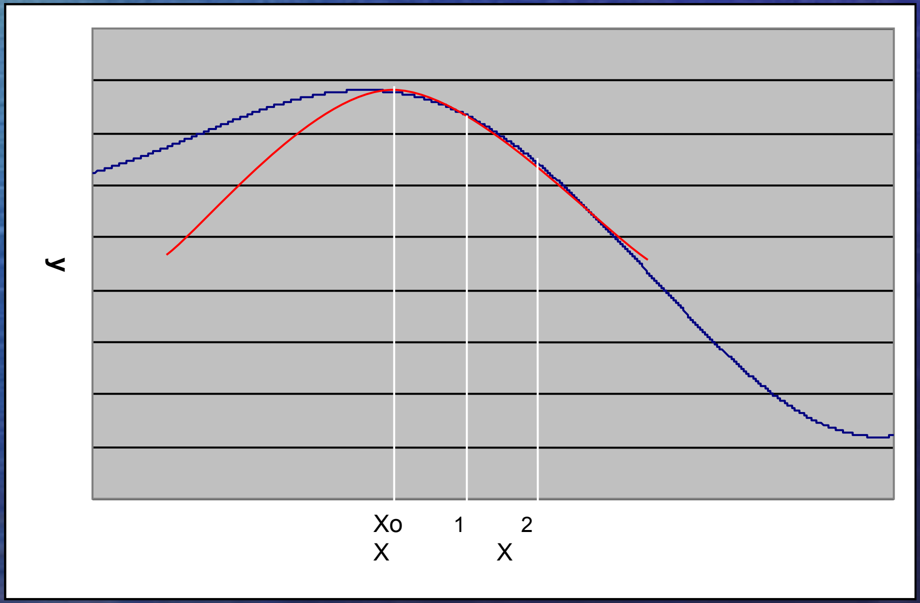
и скопируем эту формулу до значения b-h (ячейка B1001), и в ячейку D2 поместим сумму получившихся значений.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | y | S | Результат |
| 2 | 1 | 1 | 0,001001 | 2,333333 |
| 3 | 1,001 | 1,002001 | 0,001003 | |
| 4 | 1,002 | 1,004004 | 0,001005 | |
| 5 | 1,003 | 1,006009 | 0,001007 | |
| 6 | 1,004 | 1,008016 | 0,001009 | |
| 7 | 1,005 | 1,010025 | 0,001011 | |
| 996 | 1,994 | 3,976036 | 0,003978 | |
| 997 | 1,995 | 3,980025 | 0,003982 | |
| 998 | 1,996 | 3,984016 | 0,003986 | |
| 999 | 1,997 | 3,988009 | 0,00399 | |
| 1000 | 1,998 | 3,992004 | 0,003994 | |
| 1001 | 1,999 | 3,996001 | 0,003998 | |
| 1002 | 2 | 4 | | |

Это и есть наш результат!

# 1. Метод парабол (метод Симпсона)

Этот метод является одним из более совершенных и точных, так как в этом случае идет приближение подынтегральной кривой к другой кривой – параболе:



Для вычисления интеграла по формуле Симпсона заменим нашу функцию по формуле квадратичного интерполирования

$$f(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Тогда $$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0\right)dx.$$

Перейдём к новой переменной интегрирования, учитывая, что *$x=x_0+ ht$, $dx=hdt$, $t=0$ при $x=x_0$ и $t=2$ при $x=x_2$*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_0^2 \left(y_0 + ty_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0\right)dt = h\left(y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right)\Bigg|_0^2 = h\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right) = h\left(2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2)\right)$$

Или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Эта формула называется формулой Симпсона или формулой парабол.

При таком приближении криволинейная трапеция на участке $[x_i; x_{i+2}]$ заменяется параболой и производится интегрирование полученной параболы.

В разделе вычислительной математики используют формулу Симпсона для каждого отрезка интегрирования (заметим, их должно быть чётное число!) получим:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

. . . . .

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Суммируя эти равенства получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}))$$

Теперь разберёмся с Excelем:

Уже известным способом заполняем столбец А с шагом 0,002 от значения a (для нашего промежутка – 1) до значения b (у нас – 2). Столбец B – с тем же шагом, но от значения a+h до значения b-h (для нашего интеграла от 1,001 до 1,999). Столбцы C и D заполняем формулой =a2^2 и =b2^2 соответственно. Согласно формуле Симпсона в ячейку E1 помещаем

=c2+c502, в ячейку E2 =4*СУММ(d2:d501), а в ячейку E3 запишем

=2*СУММ(c3: c501). В ячейку E4 помещаем =0,001/3*(e1+e2+e3). Взгляните на полученный результат!

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_{2n}$ | $X_{2n+1}$ | $y_{2n}$ | $y_{2n+1}$ | Результат |
| 2 | 1 | 1,001 | 1 | 1,002001 | 5 |
| 3 | 1,002 | 1,003 | 1,004004 | 1,006009 | 1166,667 |
| 4 | 1,004 | 1,005 | 1,008016 | 1,010025 | 1164,167 |
| 5 | 1,006 | 1,007 | 1,012036 | 1,014049 | 2,333333 |
| 6 | 1,008 | 1,009 | 1,016064 | 1,018081 | |
| 7 | 1,01 | 1,011 | 1,0201 | 1,022121 | |
| 8 | 1,012 | 1,013 | 1,024144 | 1,026169 | |
| 9 | 1,014 | 1,015 | 1,028196 | 1,030225 | |
| 496 | 1,988 | 1,989 | 3,952144 | 3,956121 | |
| 497 | 1,99 | 1,991 | 3,9601 | 3,964081 | |
| 498 | 1,992 | 1,993 | 3,968064 | 3,972049 | |
| 499 | 1,994 | 1,995 | 3,976036 | 3,980025 | |
| 500 | 1,996 | 1,997 | 3,984016 | 3,988009 | |
| 501 | 1,998 | 1,999 | 3,992004 | 3,996001 | |
| 502 | 2 | | 4 | | |

Подведём итог. При вычислении интеграла $\int_1^2 x^2 dx$ четырьмя способами

у меня получились следующие результаты:

- По формуле Ньютона-Лейбница - $2\frac{1}{3}$ ;
- По формуле прямоугольников – 2,333333;
- По формуле трапеций – 2,333333;
- По формуле Симпсона – 2,333333.

Хочу заметить, что этот метод можно использовать также для оценки площадей фигур, ограниченных вертикальными асимптотами.

Например, для функции $y=\frac{1}{x}$ :

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 \quad !!!$$

# Упражнение

Теперь я предлагаю вам потренироваться вычислять невычислимое. Выберите любой интеграл, который вы можете вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, и попробуйте вычислить его одним из предложенных мною способов.

- Метод прямоугольников
- Метод трапеций
- Метод Симпсона

Желаю успеха!