



Решение задания В15 (системы логических уравнений)

**Вишневская М.П., МАОУ «Гимназия №3»
18 ноября 2013 г., г. Саратов**

Задание В15 - одно из самых сложных в ЕГЭ по информатике!!!

Проверяются умения:

- преобразовывать выражения, содержащие логические переменные;
- **описывать на естественном языке множество значений логических переменных, при которых заданный набор логических переменных истинен;**
- подсчитывать число двоичных наборов, удовлетворяющих заданным условиям.

Самое **сложное**, т.к. нет формальных правил, как это сделать, требуется догадка.



Без чего не обойтись!

Свойства логических операций

Конъюнкция	Дизъюнкция	Инверсия
$A \wedge \bar{A} = 0$	$A \vee \bar{A} = 1$	$\overline{\bar{A}} = A$
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$	
$A \wedge 1 = A$	$A \vee 1 = 1$	
$A \wedge 0 = 0$	$A \vee 0 = A$	

Законы логики

Закон	Аналог в алгебре
Переместительный закон	
$A \vee B = B \vee A$	$A + B = B + A$
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Сочетательный закон	
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Распределительный закон	
$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	аналога нет

Без чего не обойтись!

Закон инверсии, или формулы де Моргана	
$A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$	аналога нет
$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$	аналога нет
Закон контрапозиции	
$A \rightarrow B = \overline{B} \rightarrow \overline{A}$	аналога нет

Формулы склеивания и поглощения

Склеивания	Поглощения
$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$
	$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$
	$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$

Запись импликации, эквиваленции и сложения по модулю «2»

с помощью инверсии, импликации и дизъюнкции

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A \rightarrow B = \overline{A} \vee B \\
 A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \\
 A \oplus B = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})
 \end{array} \right. \quad A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B}$$

Условные обозначения

- конъюнкция : $A \wedge B$, $A \bullet B$, AB , $A \& B$, A and B
- дизъюнкция: $A \vee B$, $A + B$, $A \mid B$, A or B
- отрицание: $\neg A$, $\overline{A}$, not A
- эквиваленция: $A \Leftrightarrow B$, $A \sim B$, $A \equiv B$
- исключающее «или»: $A \oplus B$, $A \text{ xor } B$



Метод замены переменных

Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям:

$$((x_1 \equiv x_2) \vee (x_3 \equiv x_4)) \wedge (\neg(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1$$

$$((x_3 \equiv x_4) \vee (x_5 \equiv x_6)) \wedge (\neg(x_3 \equiv x_4) \vee \neg(x_5 \equiv x_6)) = 1$$

$$((x_5 \equiv x_6) \vee (x_7 \equiv x_8)) \wedge (\neg(x_5 \equiv x_7) \vee \neg(x_7 \equiv x_8)) = 1$$

$$((x_7 \equiv x_8) \vee (x_9 \equiv x_{10})) \wedge (\neg(x_7 \equiv x_8) \vee \neg(x_9 \equiv x_{10})) = 1$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$, при которых выполняется данная система равенств. В качестве ответа необходимо указать **количество** таких наборов (демо-версия 2012 г.)



Решение

Шаг 1. Упрощаем, выполнив замену

переменных

$$t1 = x1 \equiv x2$$

$$t2 = x3 \equiv x4$$

$$t3 = x5 \equiv x6$$

$$t4 = x7 \equiv x8$$

$$t5 = x9 \equiv x10$$

После упрощения:

$$(t1 \vee t2) \wedge (\neg t1 \vee \neg t2) = 1$$

$$(t2 \vee t3) \wedge (\neg t2 \vee \neg t3) = 1$$

$$(t3 \vee t4) \wedge (\neg t3 \vee \neg t4) = 1$$

$$(t4 \vee t5) \wedge (\neg t4 \vee \neg t5) = 1$$

Рассмотрим одно из уравнений:

$$(t1 \vee t2) \wedge (\neg t1 \vee \neg t2) = 1$$

Очевидно, оно =1 только если одна из переменных равна 0, а другая – 1.

Воспользуемся формулой для выражения операции XOR через конъюнкцию и дизъюнкцию:

$$(t1 \vee t2) \wedge (\neg t1 \vee \neg t2) = t1 \oplus t2 = \neg(t1 \equiv t2) = 1$$

$$\neg(t1 \equiv t2) = 1$$

$$\neg(t2 \equiv t3) = 1$$

$$\neg(t3 \equiv t4) = 1$$

$$\neg(t4 \equiv t5) = 1$$



Шаг2. Анализ системы

$$\neg(t1 \equiv t2) = 1$$

$$\neg(t2 \equiv t3) = 1$$

$$\neg(t3 \equiv t4) = 1$$

$$\neg(t4 \equiv t5) = 1$$

t1	t2	t3	t4	t5
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Т.к. $t_k = x_{2k-1} \equiv x_{2k}$ ($t1 = x1 \equiv x2, \dots$), то каждому значению t_k соответствует две пары значений x_{2k-1} и x_{2k} ,

например:

$t_k=0$ соответствуют две пары - (0,1) и (1,0),

а $t_k=1$ – пары (0,0) и (1,1).



Шаг3. Подсчет числа решений.

Каждое t имеет 2 решения, количество $t - 5$. Т.о. для переменных t существует $2^5 = 32$ решения.

Но каждому t соответствует пара решений x , т.е. исходная система имеет $2 * 32 = 64$ решения.

Ответ: 64



Метод исключения части решений

Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям:

$$\begin{aligned}(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) &= 1; \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) &= 1; \\ y_5 \rightarrow x_5 &= 1.\end{aligned}$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$, при которых выполняется данная система равенств. В качестве ответа необходимо указать **количество** таких наборов.



Решение.

Шаг1. Последовательное решение уравнений

Первое уравнение – конъюнкция нескольких операций импликации, равна 1, т.е. каждая из импликаций истинна. Импликация ложна только в одном случае, когда $1 \Rightarrow 0$, во всех других случаях ($0 \Rightarrow 0$, $0 \Rightarrow 1$, $1 \Rightarrow 1$) операция возвращает 1. Запишем это в виде таблицы:

x1	1	
x2	1	
x3	1	
x4	1	
x5	1	



Шаг1. Последовательное решение уравнений

Т.о. получено 6 наборов решений для x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :
(00000), (00001), (00011), (00111), (01111), (11111).

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что для y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 существует такой же набор решений.

Т.к. уравнения эти независимы, т.е. в них нет общих переменных, то решением этой системы уравнений (без учета третьего уравнения) будет $6*6=36$ пар «иксов» и «игреков».

Рассмотрим третье уравнение:

$$y_5 \rightarrow x_5 = 1$$

Решением являются пары:

0	0
0	1
1	1

Не является решением пара: 1 0



Сопоставим полученные решения

(y1y2y3y4y5)	(x1x2x3x4x5)						Кол-во вариантов (пар)
	(0000 <u>0</u>)	(0000 <u>1</u>)	(0001 <u>1</u>)	(0011 <u>1</u>)	(0111 <u>1</u>)	(1111 <u>1</u>)	
(0000 <u>0</u>)	+	+	+	+	+	+	6
(0000 <u>1</u>)	-	+	+	+	+	+	5
(0001 <u>1</u>)	-	+	+	+	+	+	5
(0011 <u>1</u>)	-	+	+	+	+	+	5
(0111 <u>1</u>)	-	+	+	+	+	+	5
(1111 <u>1</u>)	-	+	+	+	+	+	5
Всего возможных вариантов (пар) наборов значений (x1x2x3x4x5) и (y1y2y3y4y5) :							31

Там, где $y_5=1$, не подходят $x_5=0$. таких пар 5.

Количество решений системы : $36-5=31$.

Ответ: 31

Понадобилась комбинаторика!!!

Метод динамического программирования

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 = 1,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_6$ – логические переменные? В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать **количество** таких наборов.



Решение

Шаг1. Анализ условия

1. Слева в уравнении последовательно записаны операции импликации, приоритет одинаков.
2. Перепишем:

$$((((X_1 \rightarrow X_2) \rightarrow X_3) \rightarrow X_4) \rightarrow X_5) \rightarrow X_6 = 1$$

NB! Каждая следующая переменная зависит не от предыдущей, а от результата предыдущей импликации!



Шаг2. Выявление закономерности

Рассмотрим первую импликацию, $X_1 \rightarrow X_2$. Таблица истинности:

X_1	X_2	$X_1 \rightarrow X_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Из одного 0 получили 2 единицы, а из 1 получили один 0 и одну 1. Всего один 0 и три 1, это результат первой операции.



Шаг2. Выявление закономерности

Подключив к результату первой операции x_3 , получим:

$F(x_1, x_2)$	x_3	$F(x_1, x_2) \rightarrow x_3$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
1	0	0
1	1	1
1	0	0
1	1	1

Из двух 0 – две
1, из каждой 1
(их 3) по
одному 0 и 1
(3+3)



Шаг 3. Вывод формулы

Т.о. можно составить формулы для вычисления количества нулей N_i и количества единиц E_i для уравнения с i переменными:

$$N_i = E_{i-1} \quad E_i = 2N_{i-1} + E_{i-1}$$

$$N_1 = E_1 = 1$$



Шаг 4. Заполнение таблицы

Заполним слева направо таблицу для $i=6$, вычисляя число нулей и единиц по приведенным выше формулам; в таблице показано, как строится следующий столбец по предыдущему:

число переменных	1	2	3	4	5	6
Число нулей N_i				5	11	21
Число единиц E_i				11	21	43

Ответ: 43

Метод с использованием упрощений логических выражений

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((M \wedge N \wedge L) \rightarrow (\neg J \vee K)) \wedge (M \rightarrow J) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать **количество** таких наборов.



Решение

1. Заметим, что $\mathbf{J \rightarrow K = \neg J \vee K}$

2. Введем замену переменных:

$$\mathbf{J \rightarrow K = A, \quad M \wedge N \wedge L = B}$$

3. Перепишем уравнение с учетом замены:

$$\underbrace{(\mathbf{A \rightarrow B}) \wedge (\mathbf{B \rightarrow A})}_{\mathbf{A \equiv B}} \wedge (\mathbf{M \rightarrow J}) = 1$$

$$4. \quad (\mathbf{A \equiv B}) \wedge (\mathbf{M \rightarrow J}) = 1$$

5. Очевидно, что $\mathbf{A \equiv B}$ при одинаковых значениях $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

6. Рассмотрим последнюю импликацию $\mathbf{M \rightarrow J = 1}$

Это возможно, если:

a) $\mathbf{M = J = 0}$

b) $\mathbf{M = 0, J = 1}$

c) $\mathbf{M = J = 1}$



Решение

7. Т.к. $A \equiv B$, то $\neg J \vee K = M \wedge N \wedge L$
8. При $M=J=0$ получаем $1 + K=0$. Нет решений.
9. При $M=0, J=1$ получаем $0 + K=0$, $K=0$, а N и L - любые ,
4 решения:

K	N	L
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1



Решение

10. При $M=J=1$ получаем $0+K=1*N*L$, или $K=N*L$,
4 решения:

K	N	L
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

11. Итого имеет $4+4=8$ решений

Ответ: 8



Источники информации:

- О.Б. Богомоллова, Д.Ю. Усенков. В15: новые задачи и новое решение // Информатика, № 6, 2012, с. 35 – 39.
- К.Ю. Поляков. Логические уравнения // Информатика, № 14, 2011, с. 30-35.
- <http://ege-go.ru/zadania/grb/b15/>, [Электронный ресурс].
- <http://kpolyakov.narod.ru/school/ege.htm>, [Электронный ресурс].

