

Показательные неравенства
ИХ ТИПЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

1. Область определения функции	$(-\infty; \infty)$	
2. Область значений функции	$(0; \infty)$	
3. Промежутки сравнения значений функции с единицей	$y = a^x, a > 1$	$y = a^x, 0 < a < 1$
	при $x > 0, a^x > 1$	при $x > 0, 0 < a^x < 1$
	при $x < 0, 0 < a^x < 1$	при $x < 0, a^x > 1$
4. Четность, нечетность	Функция не является ни чётной, ни нечётной (функция общего вида).	
5. Монотонность	монотонно возрастает на $\mathbf{R}$	монотонно убывает на $\mathbf{R}$
6. Экстремумы	Показательная функция экстремумов не имеет	
7. Асимптота	Ось O_x является горизонтальной асимптотой	
8. При любых действительных значениях x и y ; $a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1$.	1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y};$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y};$ 3) $(ab)^x = a^x b^x;$ 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$ 5) $(a^x)^y = a^{xy};$ 6) $r \in \mathbf{Q}$ и $a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$ $a^r > b^r$ при $r < 0$; 7) $r, s \in \mathbf{Q}$ и $r > s$, то $a^r > a^s$ при $a > 1$ $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.	

ОПРЕДЕЛЕНИЕ простейших показательных неравенств:

Пусть **a** – данное положительное, не равное единице число и **b** – данное действительное число. Тогда неравенства

$$\mathbf{a^x > b \ (a^x \geq b) \text{ и } a^x < b \ (a^x \leq b)}$$

называются простейшими показательными неравенствами.

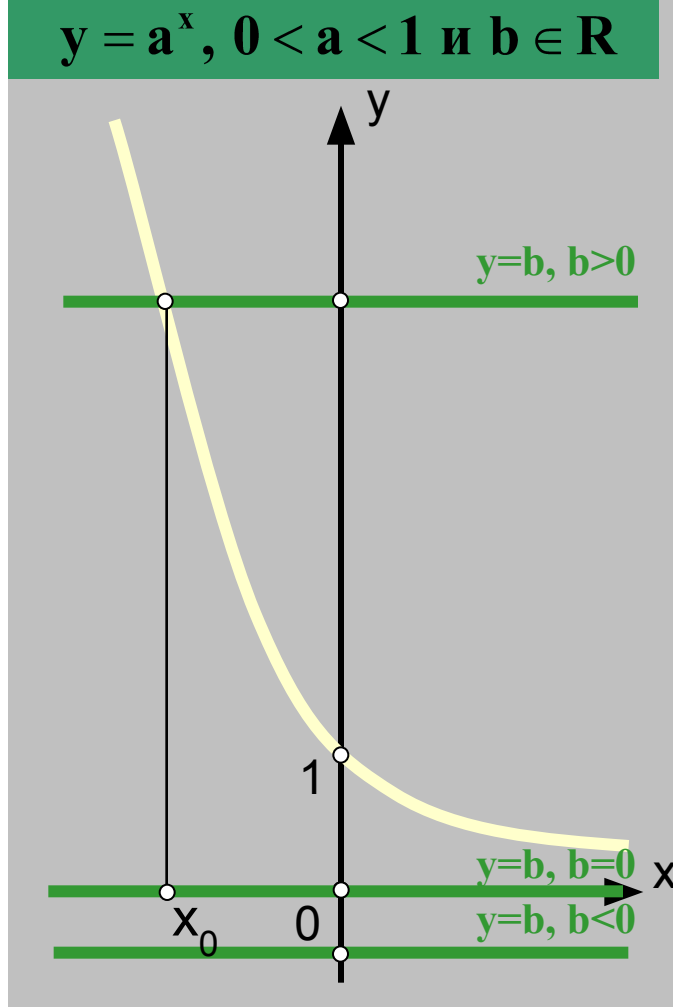
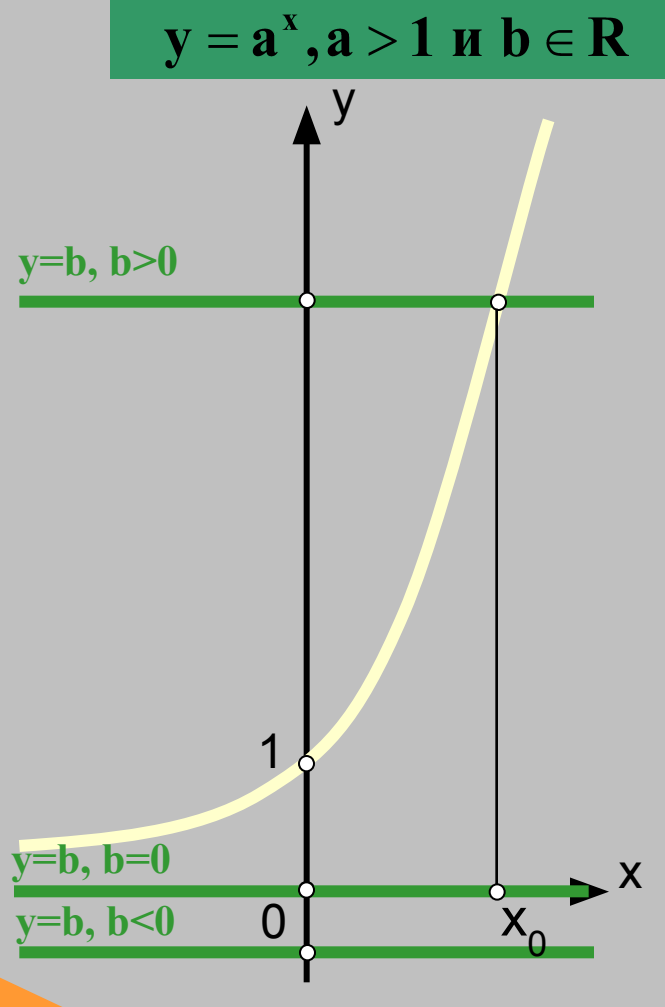
ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ решением неравенства?

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0 , при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

ЧТО ЗНАЧИТ решить неравенство?

Решить неравенство —
значит, найти все его решения или
показать, что их нет.

Рассмотрим взаимное расположение графика функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ и прямой $y=b$



ВЫВОД №1:

При $b \leq 0$ прямая $y=b$ не пересекает график функции $y=a^x$, т.к. расположена ниже кривой $y=a^x$, поэтому неравенства $a^x > b$ ($a^x \geq b$) выполняются при $x \in \mathbb{R}$, а неравенства $a^x < b$ ($a^x \leq b$) не имеют решения.

$$2^x > -5 \text{ справедливо при любых } x$$

$$2^x > 0 \text{ и } -5 < 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -4 \text{ справедливо при любых } x$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0 \text{ и } -4 < 0$$

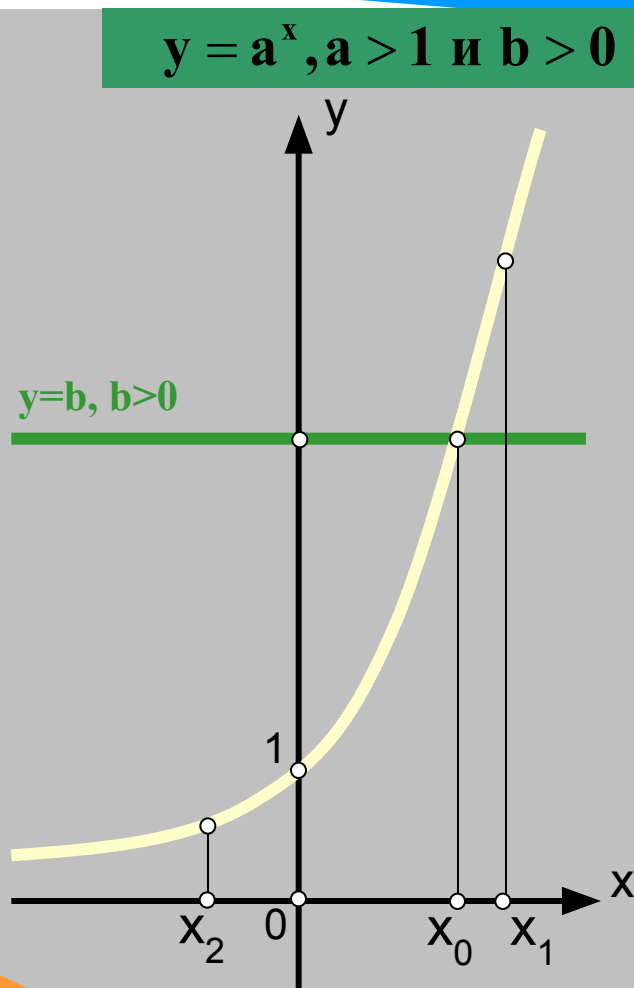
$$10^x < -3 \text{ решений нет}$$

$$10^x > 0 \text{ и } -3 < 0$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x \leq -10 \text{ решений нет}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x > 0 \text{ и } -10 < 0$$

При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$

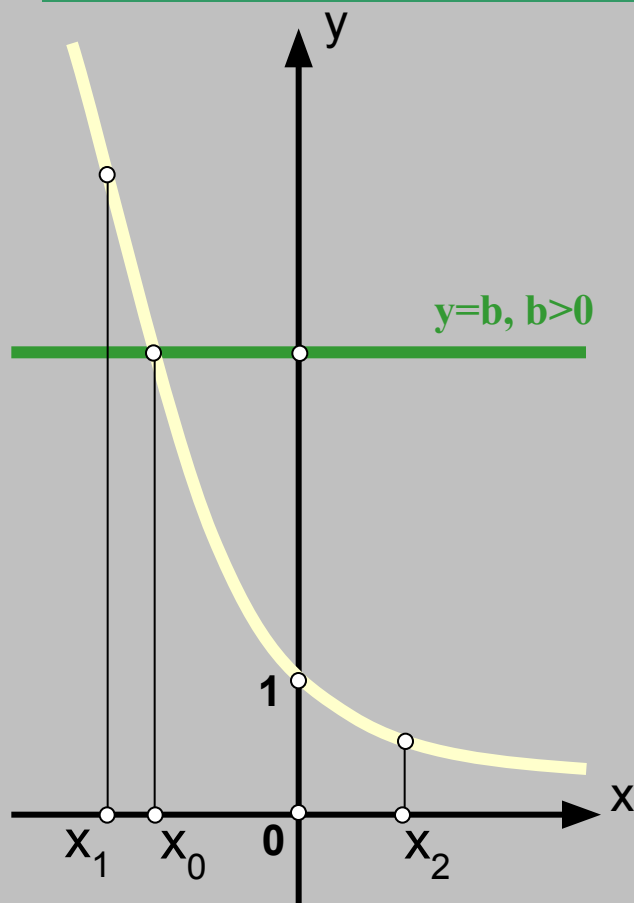


Если $a > 1$ и $b > 0$,
то для каждого $x_1 > x_0$
соответствующая
точка графика функции $y = a^x$
находится выше прямой $y = b$,
а для каждого $x_2 < x_0$ - ниже
прямой $y = b$.

ВЫВОД №2:

При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$

$$y = a^x, 0 < a < 1 \text{ и } b > 0$$



Если $a > 1$ и $b > 0$,
то для каждого $x_1 < x_0$
соответствующая
точка графика функции $y = a^x$
находится выше прямой $y = b$,
а для каждого $x_2 > x_0$ - ниже
прямой $y = b$.

Простейшие показательные неравенства

$$a > 1$$

$$a^x > b$$

$$a^x < b$$

$$a^x > a^{\log_a b}$$

$$a^x < a^{\log_a b}$$

$$x > \log_a b$$

$$x < \log_a b$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x > b$$

$$a^x < b$$

$$a^x > a^{\log_a b}$$

$$a^x < a^{\log_a b}$$

$$x < \log_a b$$

$$x > \log_a b$$