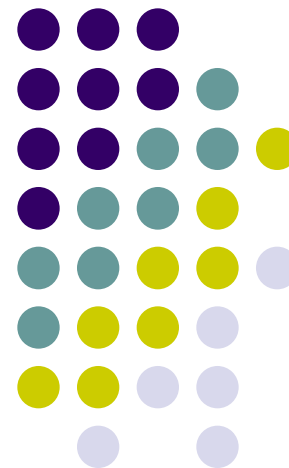


Гиперсфера

Работу выполнил:
ученик 11б класса
Мартыненко Александр

Учитель:
Черемисина Г. А.





✓ *Отражение в мозгу человека окружающего реального («объективного») мира есть **субъективное восприятие пространства** человеком. Нарушение субъективных характеристик приводит к иллюзиям.*

✓ Что такое *размерность пространства* и как узнать, какова размерность пространства, в котором мы живем?

✓ Согласно предложенной модели, наше пространство является четырехмерной сферой.

Отсюда следует **насуцная необходимость образного представления**, если уж не самой сферы, то **хотя бы ее свойств**.

Нижеследующие размышления имеют цель помочь читателю интуитивно приблизиться к пониманию этой геометрической формы.

Содержание



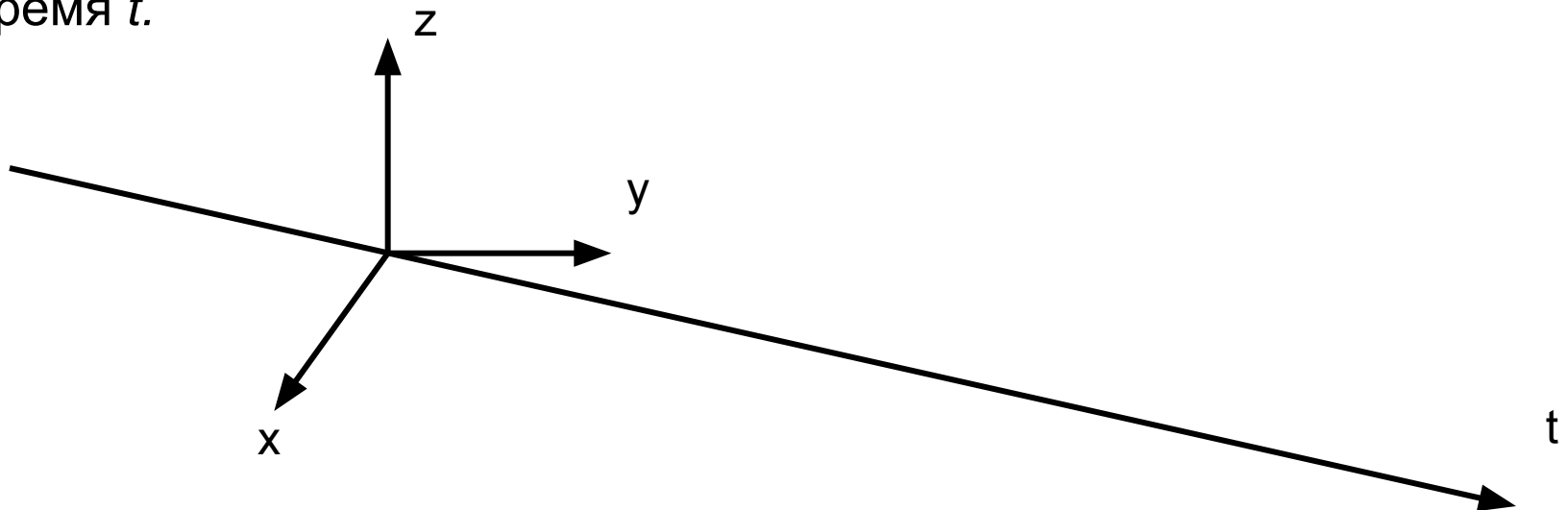
- Введение
- Основная часть
- Заключение
- Используемые ресурсы

Введение

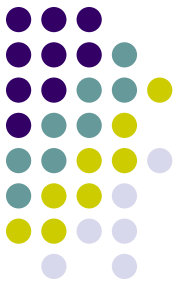
Четырёхмерное пространство



Минковский и Эйнштейн считали, что трёхмерное пространство и время в отдельности не существуют и что реальный мир является четырёхмерным. Для этого они объединили трёхмерное евклидово пространство со временем в четырёхмерное пространство, взяв в качестве четвёртой оси системы координат расстояние, которое свет проходит за время t .



Цель:



- Интуитивно приблизиться к пониманию этой геометрической формы гиперсферы
- Дать первоначальное знакомство с четырёхмерным пространством на примере гиперсферы (познакомится с определением гиперсферы, её уравнением и наглядным изображением).

Для создания моделей четырёхмерных фигур в работе были использованы аналогии и закономерности фигур низших размерностей: точка, отрезок, окружность.



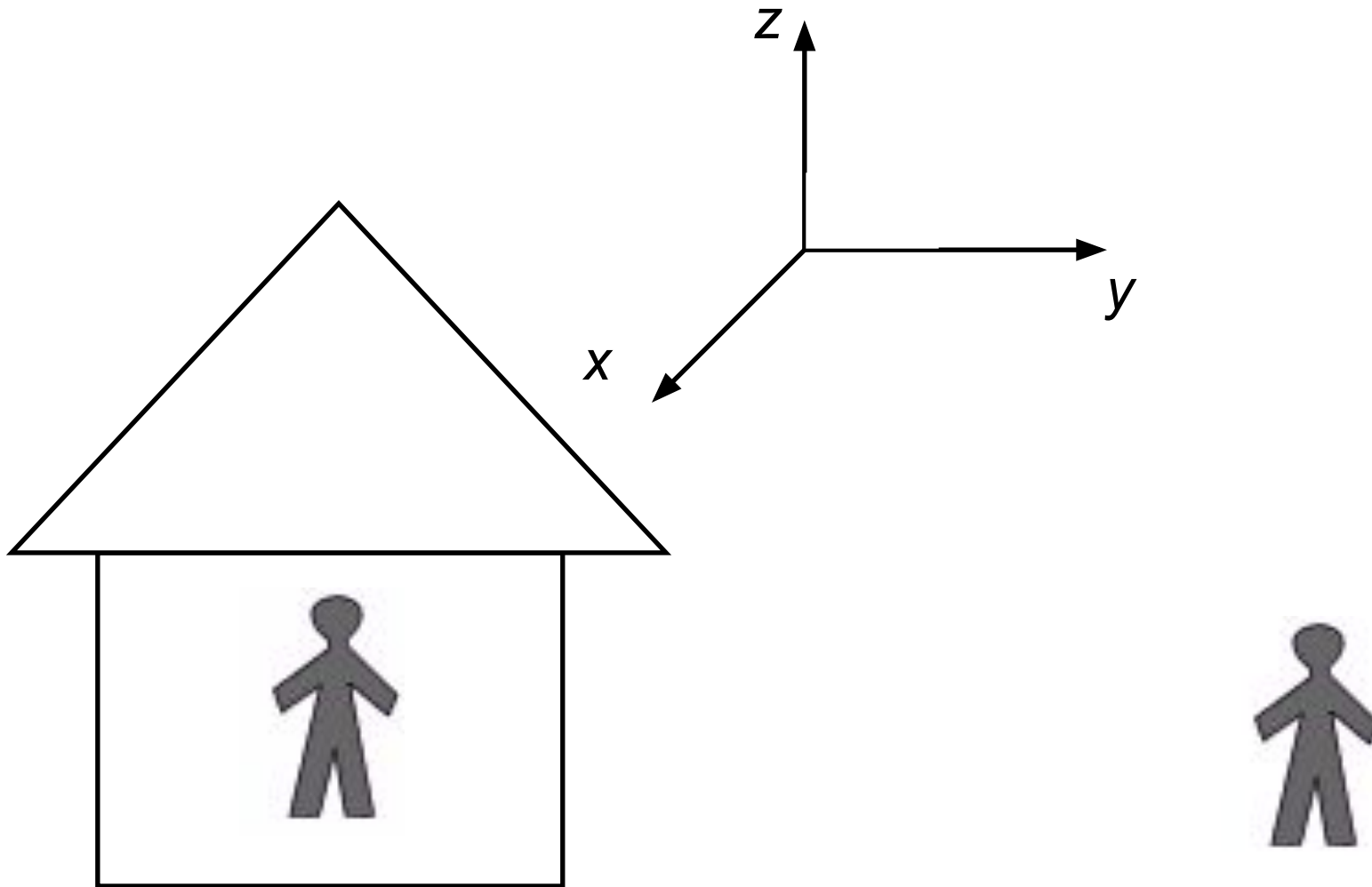
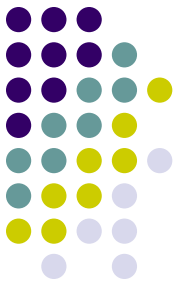
Основная часть

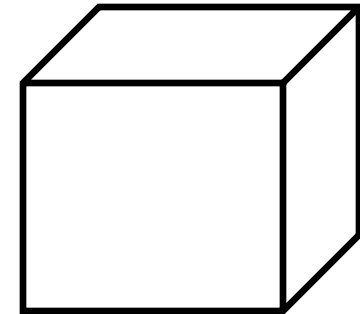
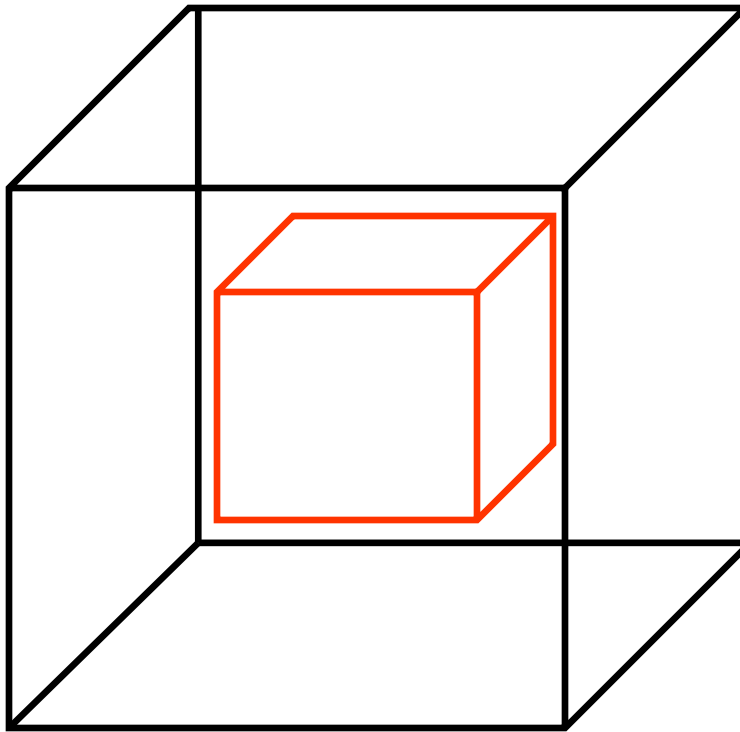
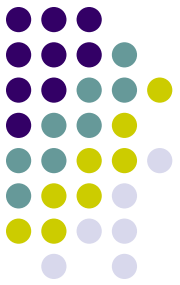


- Четырехмерное пространство
 - ✓ Физический способ измерения размерности
 - ✓ Изменение симметрии
 - ✓ Вместимость пространства
- Гиперсфера
 - ✓ Определение
 - ✓ Способы представления гиперсферы
 - Аналитическая модель гиперсферы
 - Динамическая модель гиперсферы
- Гипершар
 - ✓ Определение
 - ✓ Гиперобъем гипершара
 - ✓ Объем границы гипершара



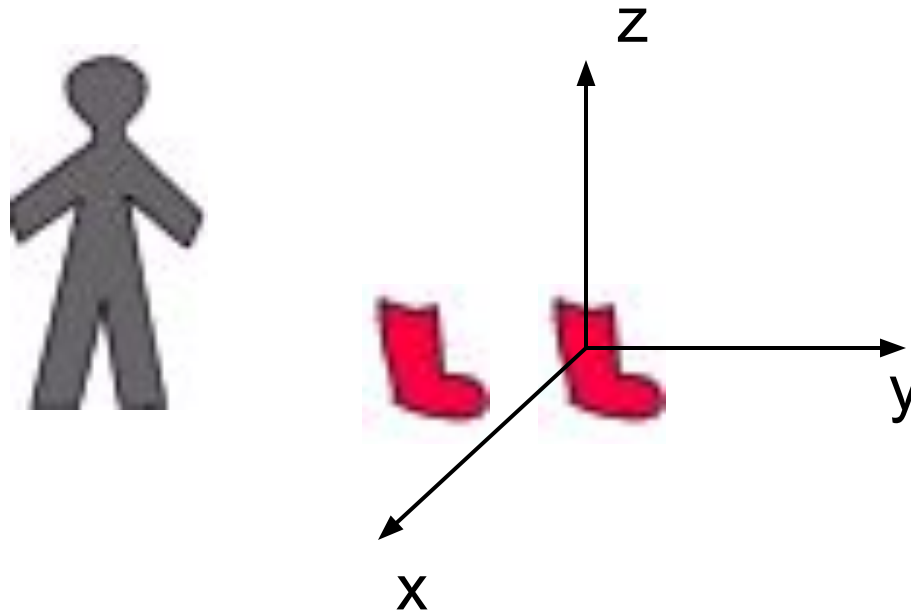
Физический способ измерения размерности



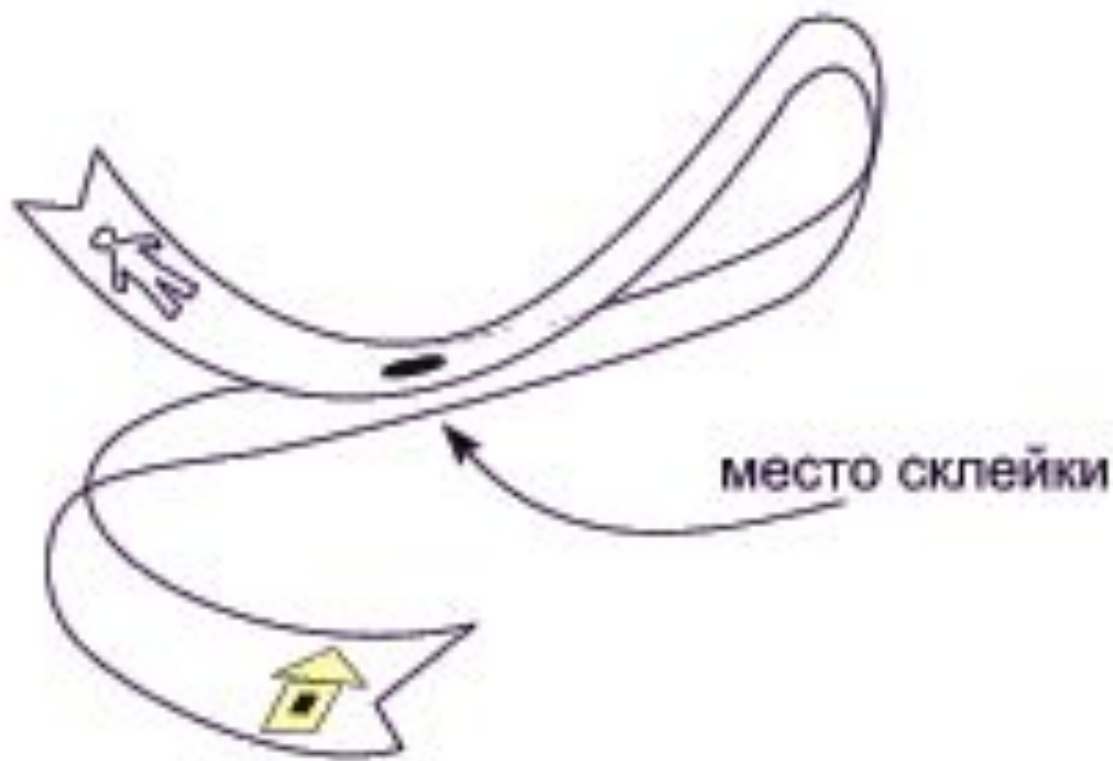
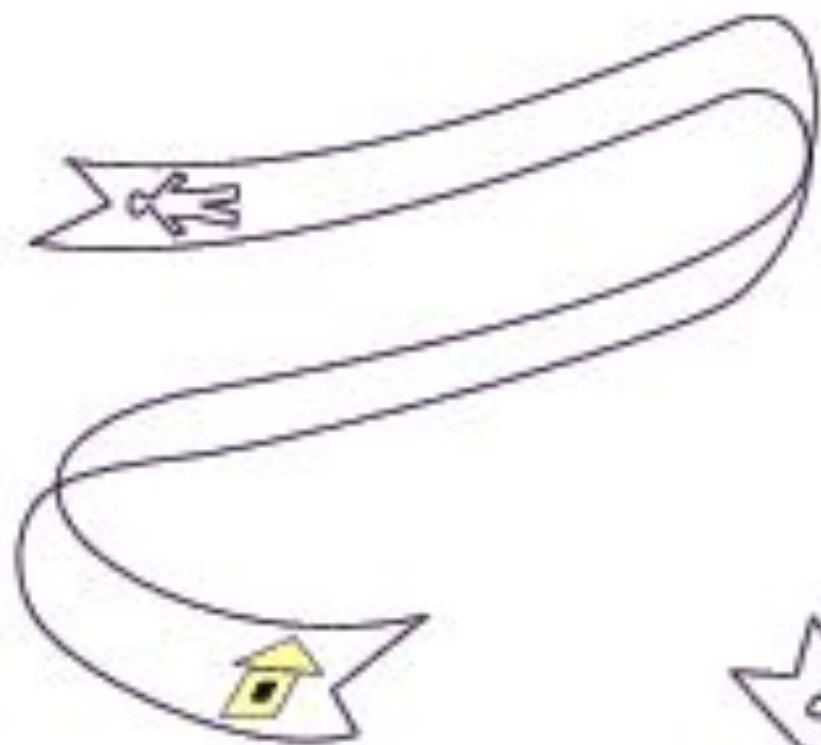


Можно нарушить замкнутость контура
при помощи увеличения *мерности*
пространства.

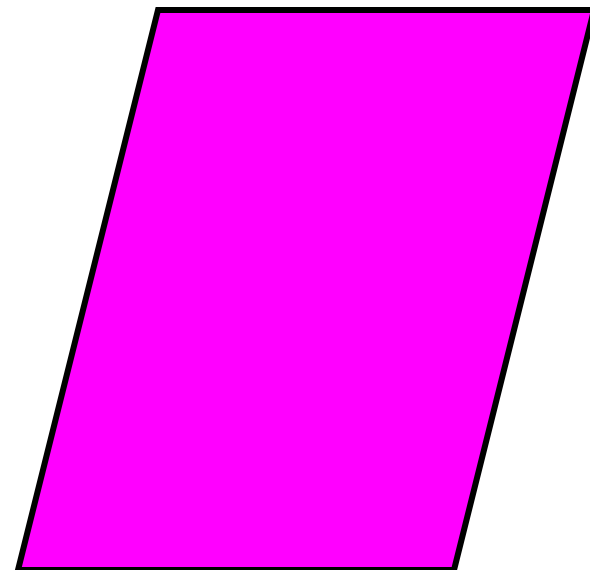
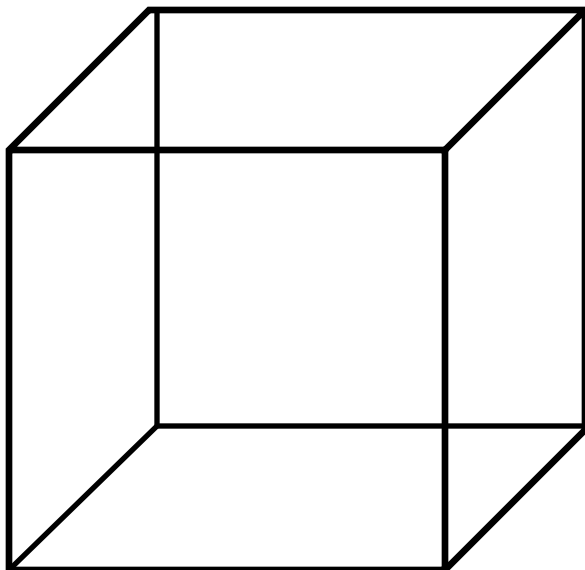
Изменение симметрии



В пространстве размерности $(n+1)$ можно менять симметрию объектов, взятых из пространства размерности n .



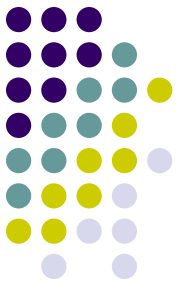
Вместимость пространства



Пространство с увеличением размерности n становится все более вместительным.



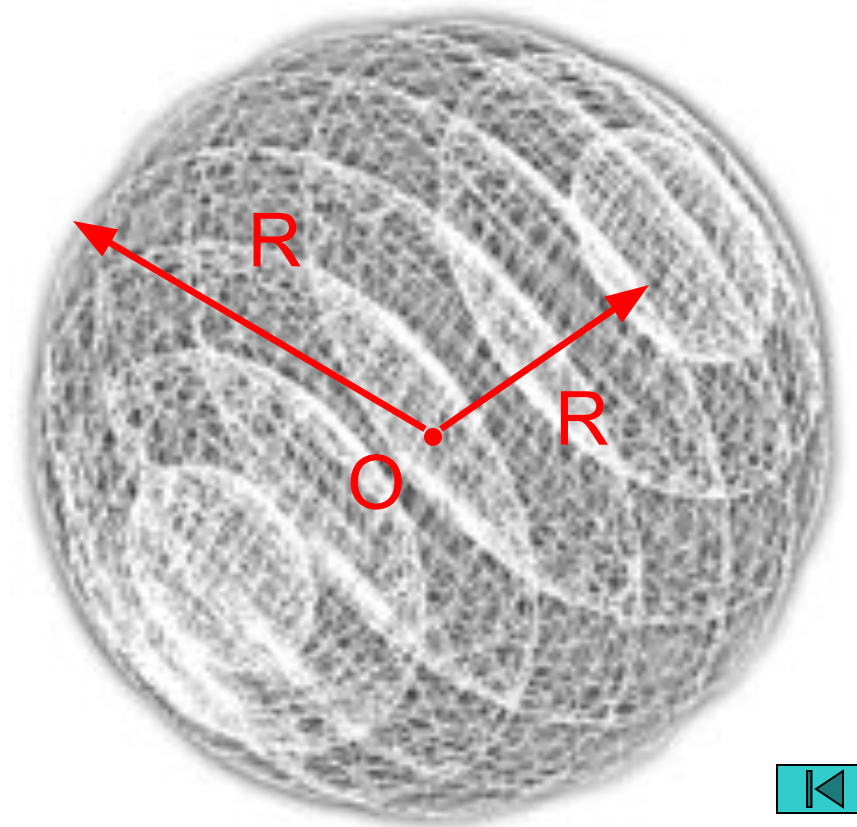
Гиперсфера



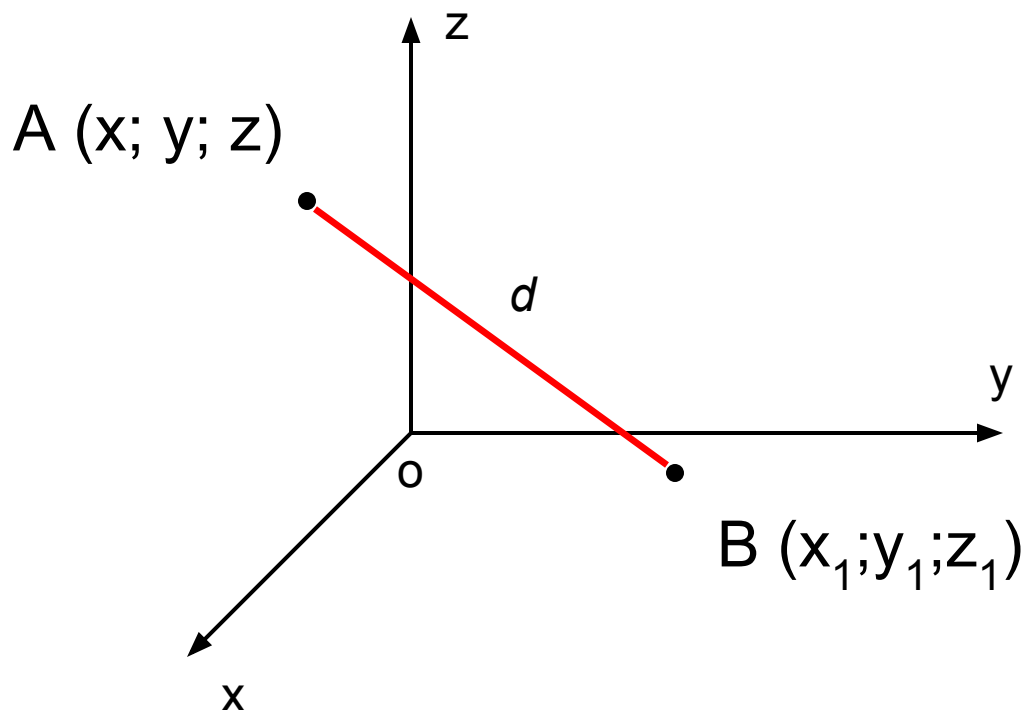
Гиперсфера – геометрическая фигура, состоящая из всех точек четырехмерного пространства, расположенных на данном расстоянии от данных точек.

O – центр гиперсферы

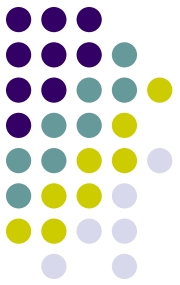
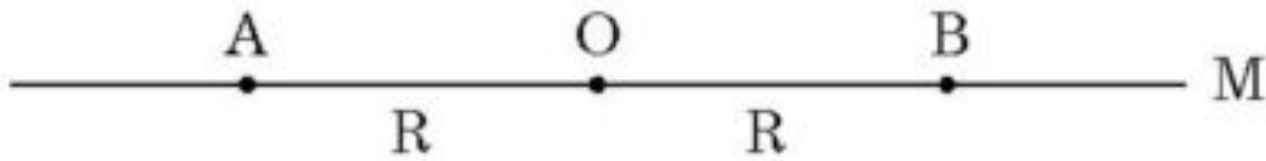
R – радиус гиперсферы



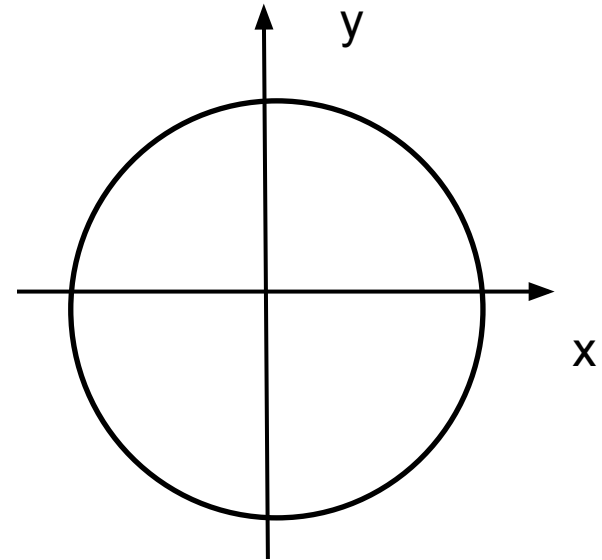
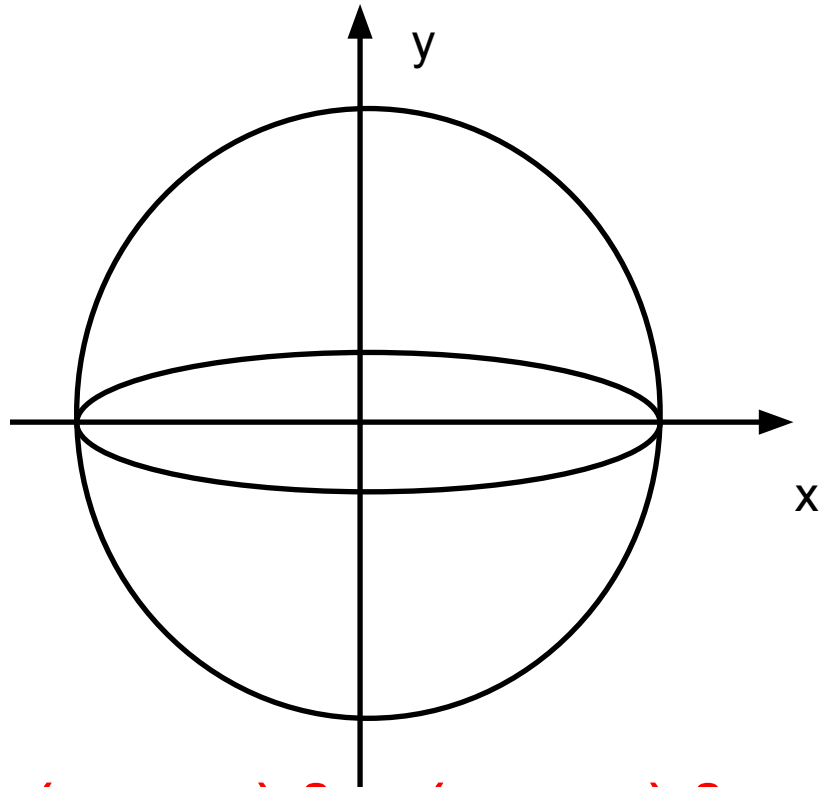
Аналитическая модель гиперсферы



$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

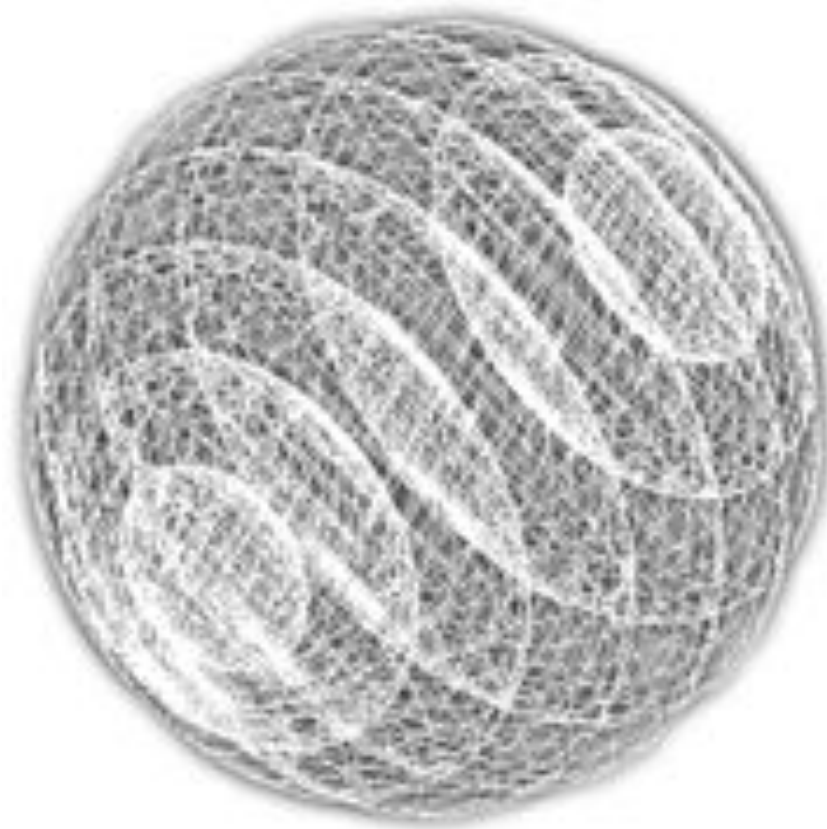
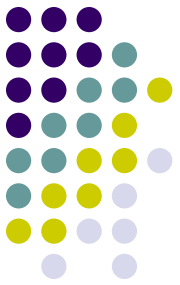


$$(x - x_1)^2 = R^2$$



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$$

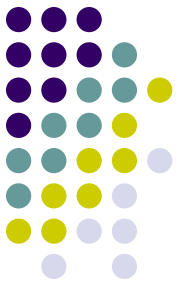
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$



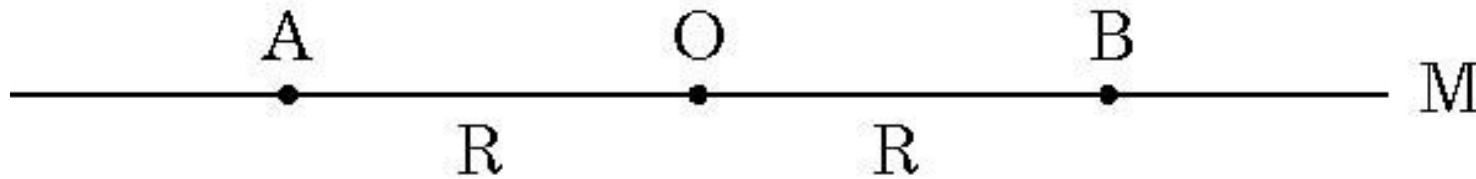
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (t - t_1)^2 = R^2$$



Динамическая модель гиперсферы



Способ 1



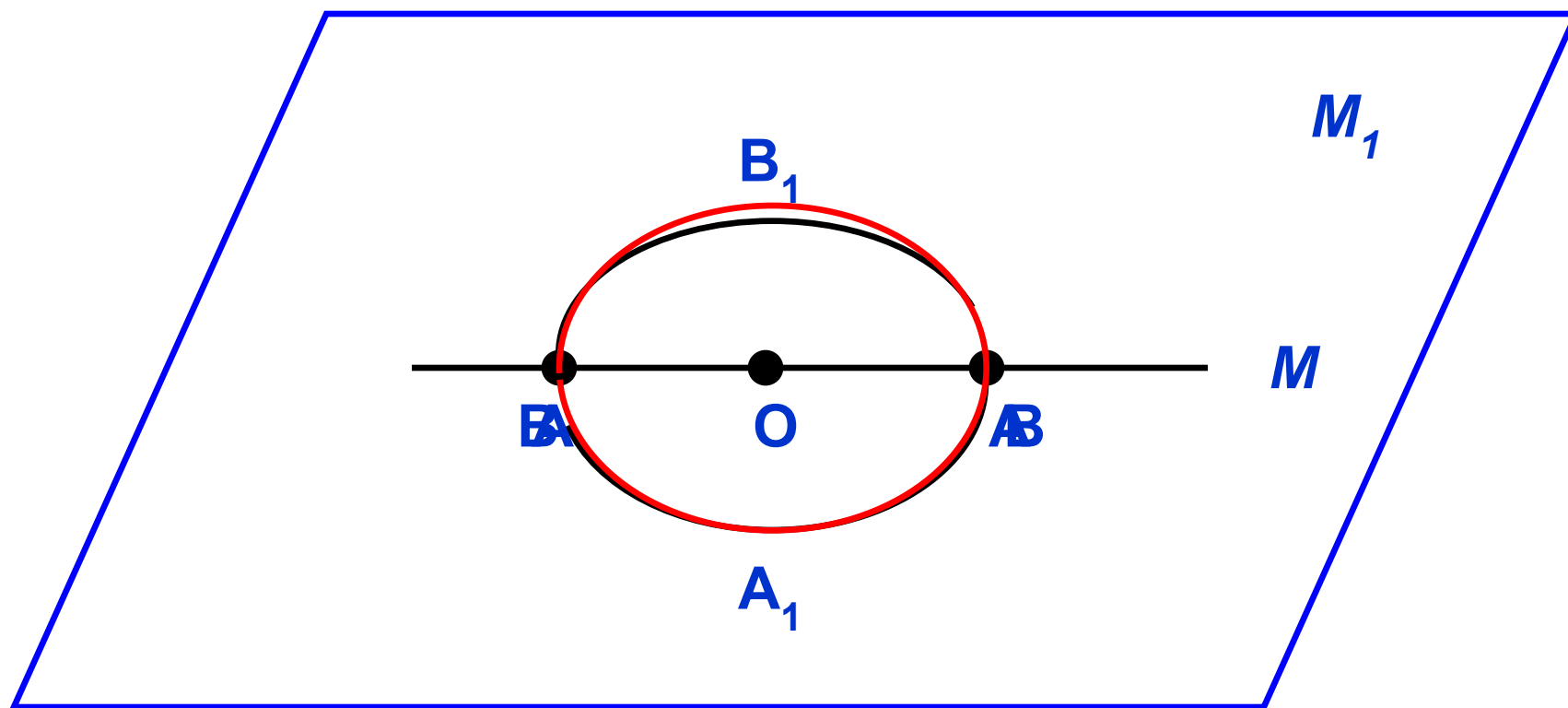
$\angle AOB = 180^\circ$ – одномерная сфера

M – прямая, модель одномерного пространства

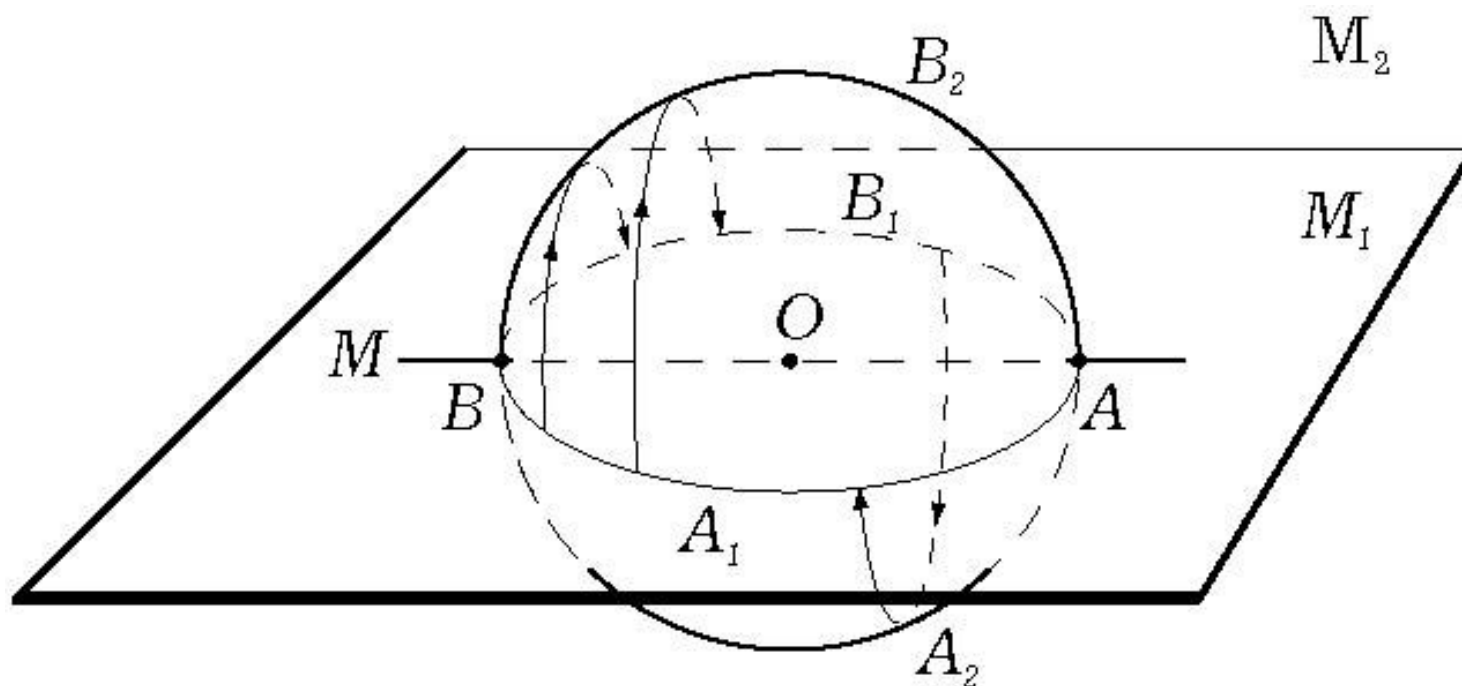
O – центр одномерной сферы

R – радиус одномерной сферы

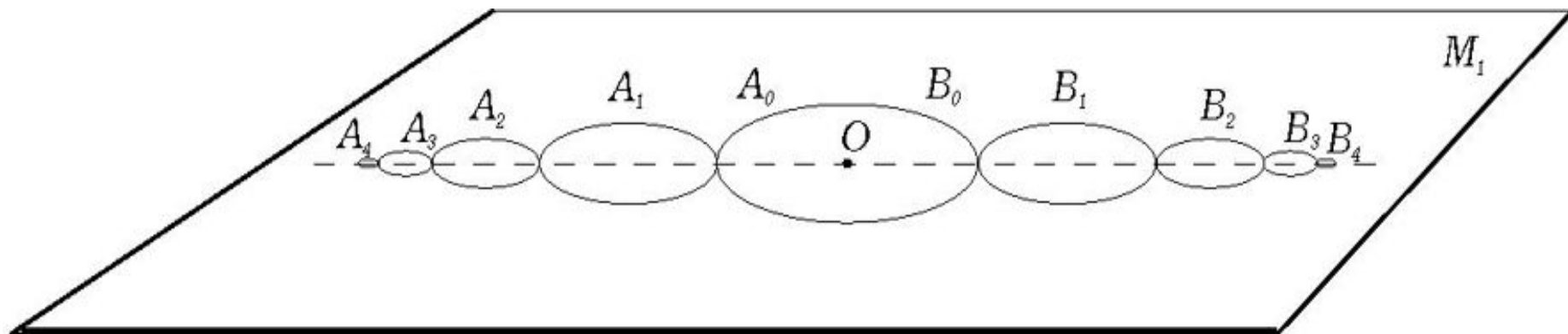
Способ 1



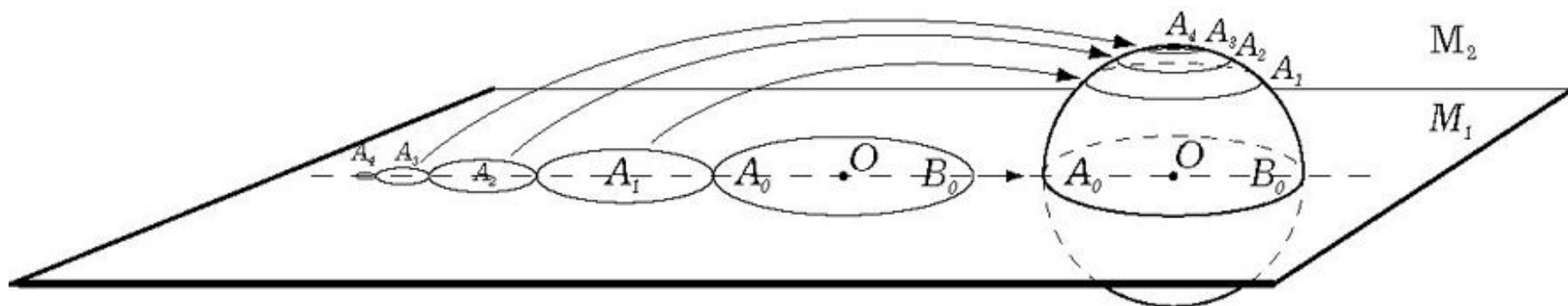
Способ 1



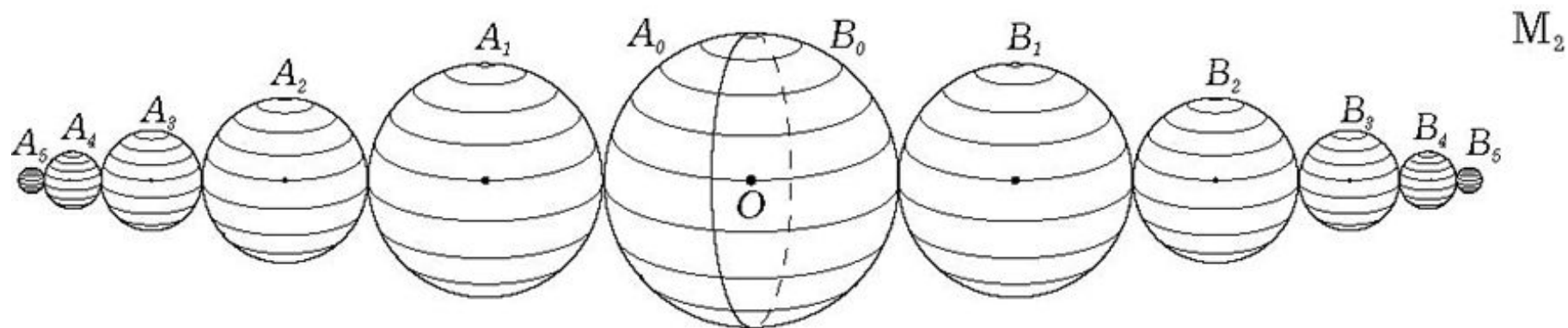
Способ 2



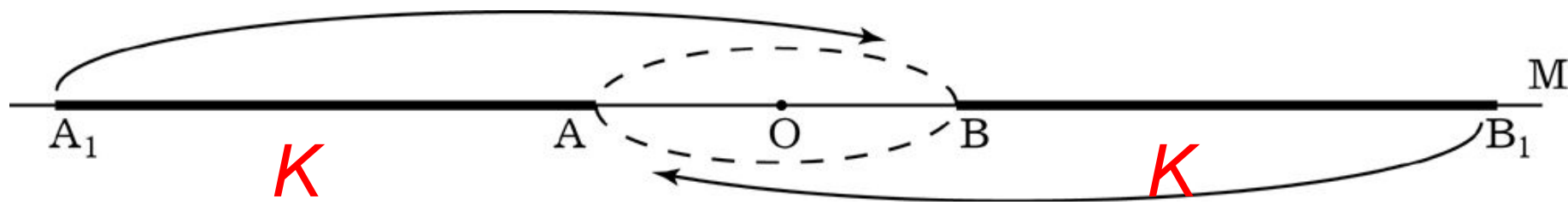
Способ 2



Способ 2

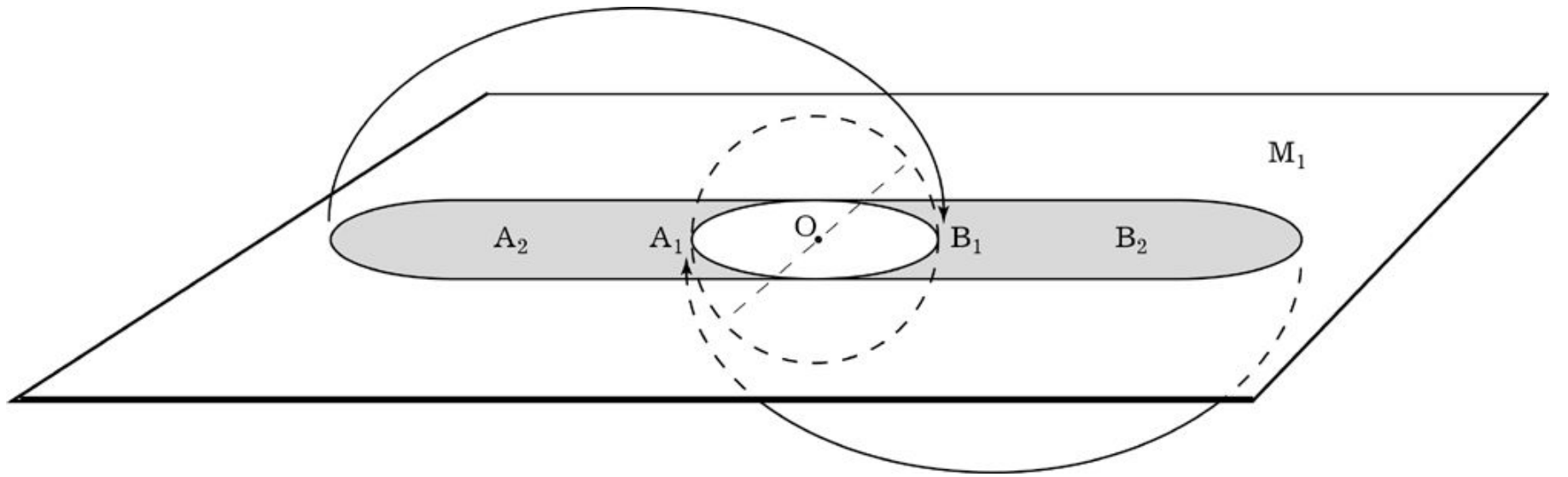


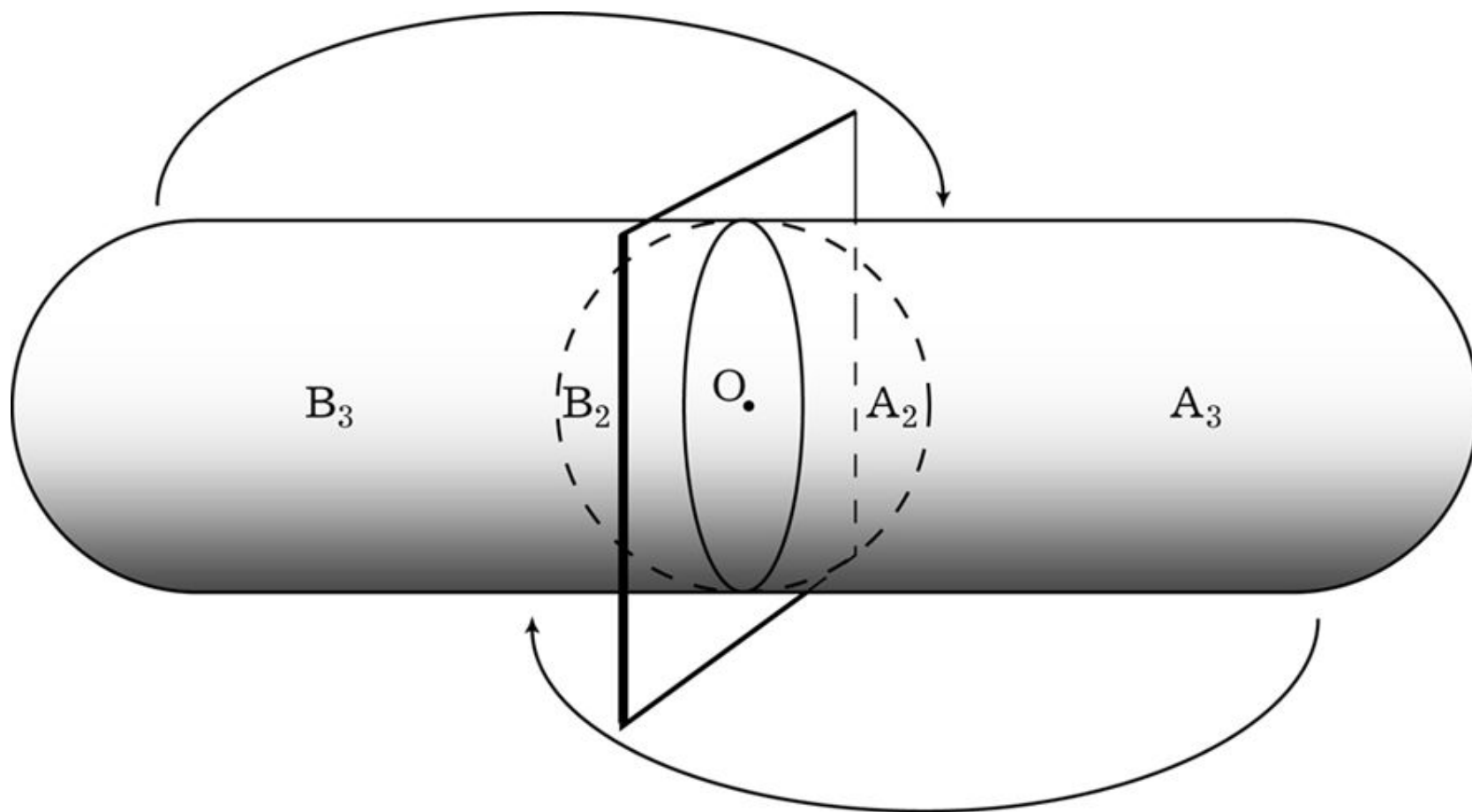
Относительные размеры четырёхмерной сферы



$$AO=R$$

$$K=3R$$





Гипершар



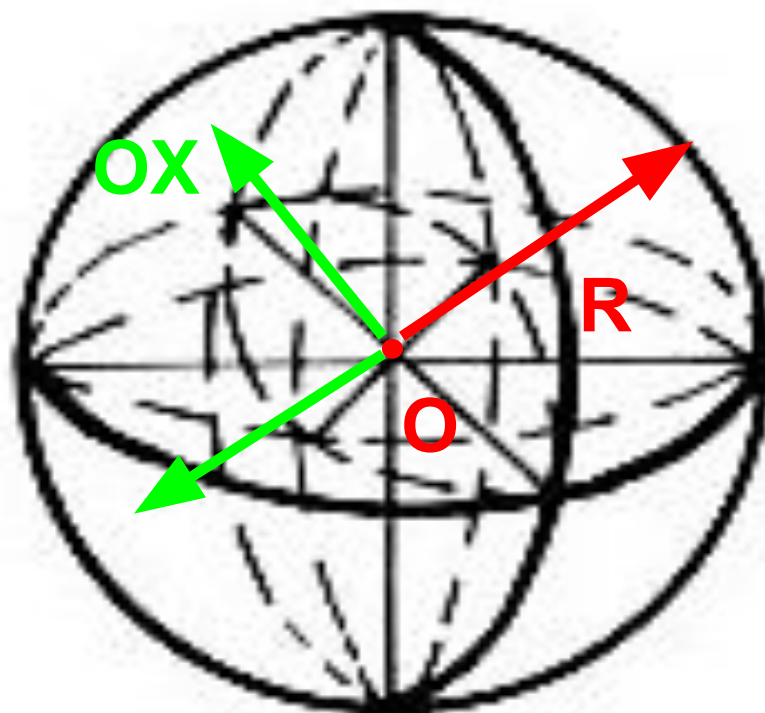
Гипершар — геометрическое тело, состоящее из всех точек четырехмерного пространства, для которых верно неравенство

$$OX \leq R$$

O — центр гипершара,

R — его радиус,

OX — расстояние от точки **O** до произвольной точки гипершара.



Гиперобъем гипершара



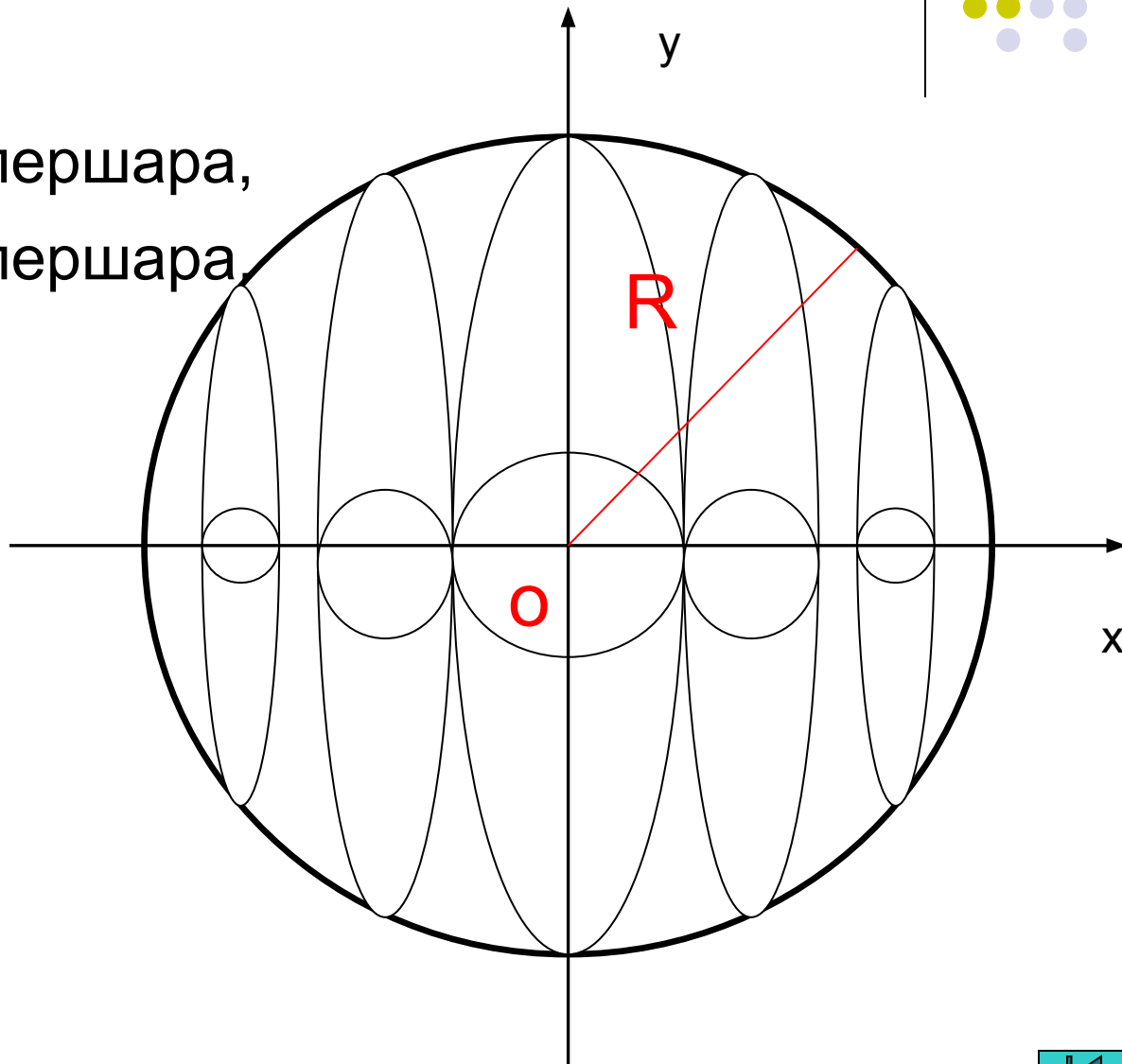
Теорема.

Если **R** – радиус гипершара,

W – гиперобъем гипершара,

то

$$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$



Доказательство



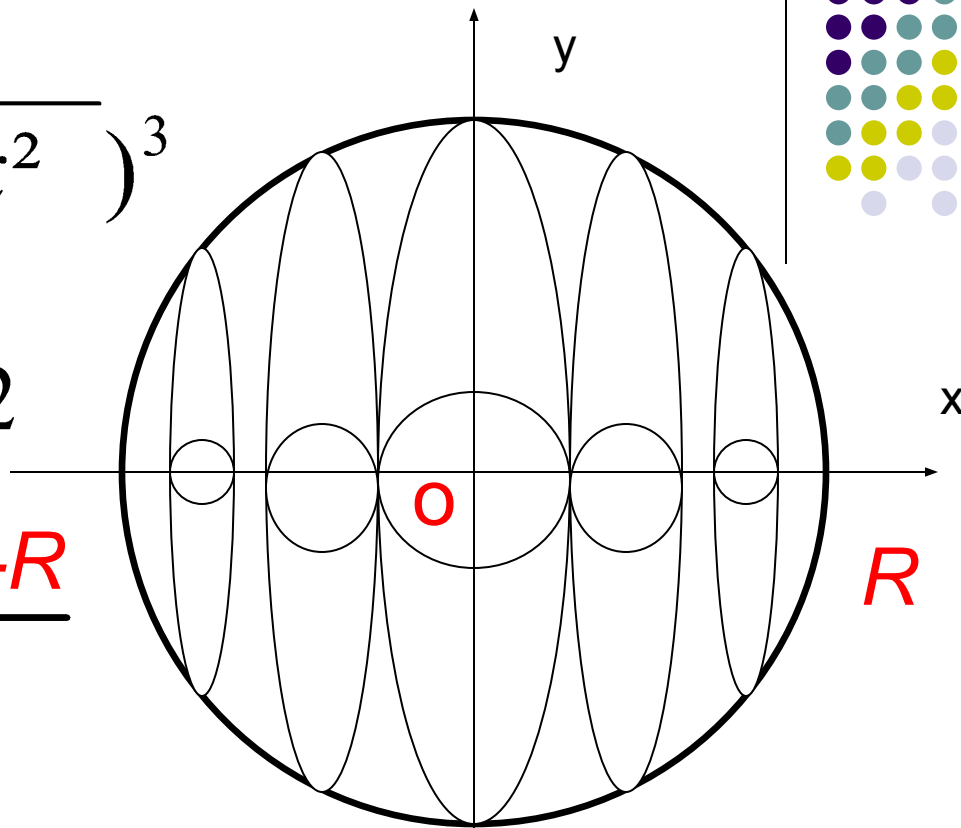
$$V(x) = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2 - x^2})^3$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

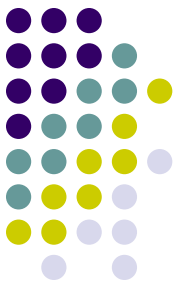
$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$W = \int_{-R}^R V(x) dx = \int_{-R}^R \frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx$$

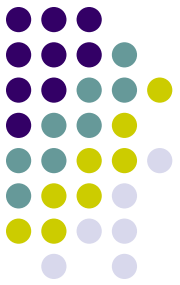


$$W = \frac{4}{3} \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx$$



$$x = R \sin t \qquad dx = R \cos t \, dt$$

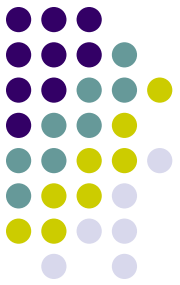
$$\begin{aligned} (\sqrt{R^2 - x^2})^3 &= (\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t})^3 = \\ &= (\sqrt{R^2(1 - \sin^2 t)})^3 = (\sqrt{R^2 \cos^2 t})^3 = \\ &= (R \cos t)^3 = R^3 \cos^3 t \end{aligned}$$



$$\text{a) } -R = R \sin t, \quad -1 = \sin t, \quad t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{б) } R = R \sin t, \quad 1 = \sin t, \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$W = \frac{4}{3} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^3 t \cdot R \cos t \, dt = \frac{4}{3} \pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$



$$W = \frac{4}{3} \pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$

$$W = \frac{4}{3} \pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{4}{3} \pi R^4 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t) dt = \frac{3\pi}{8}$$

$$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

Объем границы гиперсферы



Если **R** – радиус гипершара,
V – объем границы гиперсферы,
то

$$V = 2\pi^2 R^3$$

$$W_{\text{ГП}} = \frac{1}{4} V_{\text{осн}} \cdot h$$

$$W_{\text{ГМП}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} V_i \cdot h_i$$

n – количество гиперпирамид,

V_i – объем основания i-й гиперпирамиды,

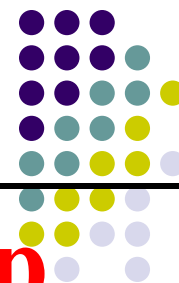
h_i – высота i-й гиперпирамиды.

$$W = \frac{1}{4} VR$$

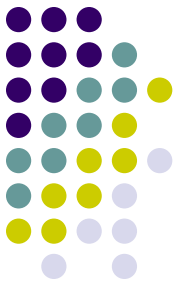
$$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

$$V = 2\pi^2 R^3$$





Фигура	Шар	Гипершар
Размерность	Трёхмерная	Четырёхмерная
Граница	Сфера	Гиперсфера
Мера границы	Площадь	Объём
Формула	$S=4\pi R^2$	$V=2\pi R^3$
Мера фигуры	Объём	Гиперобъём
Формула	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$	$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$



Как видим, четырёхмерные фигуры можно изучать и познавать так же, как и трёхмерные, хотя в четырёхмерном пространстве существуют фигуры, аналогов которых нет в пространствах низших размерностей.

Список используемых ресурсов



- <http://stratum.ac.ru/textbooks/kgrafic/lection16.html>
- <http://metaphysic.narod.ru/etud.htm>
- <http://fizika3000.narod.ru/prwr.htm>
- <http://ru.wikipedia.org/wiki>
- Газета “Математика” приложение «1 сентября» 2005 г.