

Лекция 28. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

4.1 Квазистационарные токи

4.2 Свободные колебания в
электрическом

контура без активного сопротивления
4.3 Свободные затухающие
электрические
колебания

4.4 Вынужденные электрические
колебания

4.5 Мощность, выделяемая в цепи
переменного тока



4.1 Квазистационарные токи

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока.

Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света c . Пусть l — длина электрической цепи. Тогда время распространения сигнала в данной цепи $t = l / c$. Если $t \ll T$ (T — период колебаний электрического тока), то такие токи называются *квазистационарными*. При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным. Для частоты $f = 50$ Гц условие квазистационарности выполняется при длине цепи ~ 100 км.

Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что токи квазистационарны.

4.2 Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

В цепи, содержащей индуктивность (L) и ёмкость (C) могут возникать электрические колебания. Такая цепь называется *колебательным контуром*

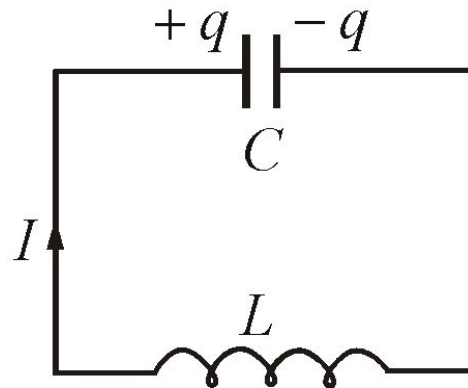


Рис. 1

Колебания в контуре можно вызвать либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например, включив магнитное поле).

Т.к. $R = 0$, то полная энергия контура $E = \text{const}$

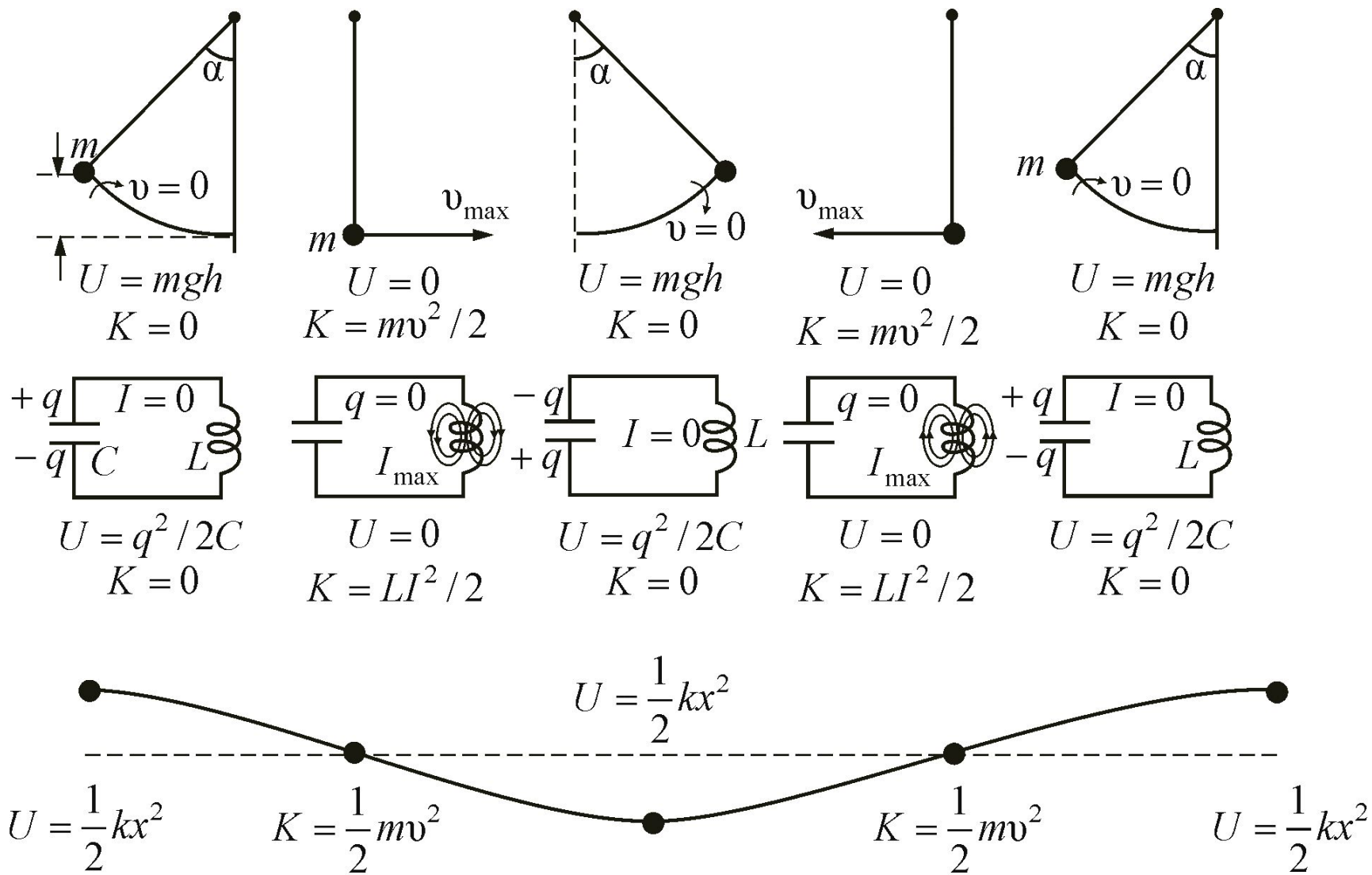


Рисунок 2

Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна и наоборот...

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что, энергия электрического поля $U = \frac{q^2}{2C}$ аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии;

Индуктивность L играет роль массы m

$1/C$ – роль коэффициента жесткости k

Заряду q соответствует смещение маятника x

Силе тока $I \sim$ скорость v

Напряжению $U \sim$ ускорение a

В соответствии с законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии)

$$R = 0 \quad \boxed{\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}} \quad (28.2.1)$$

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}, \quad \boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Вновь мы получили дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (28.2.2)$$

решением которого является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (28.2.3)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0 – *собственная частота контура*. Для периода колебаний получается так называемая *формула Томсона*:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \quad (28.2.4)$$

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (28.2.5)$$

$$U_m C = \frac{I_m}{\omega_0}; \quad \boxed{U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m} \quad \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ – волновое сопротивление [Ом].}$$

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Закон Ома

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m = \omega_0 q_m;$$

*На емкости ток опережает напряжение на $\pi/2$.
На индуктивности наоборот напряжение опережает ток на $\pi/2$.*

4.3 Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.

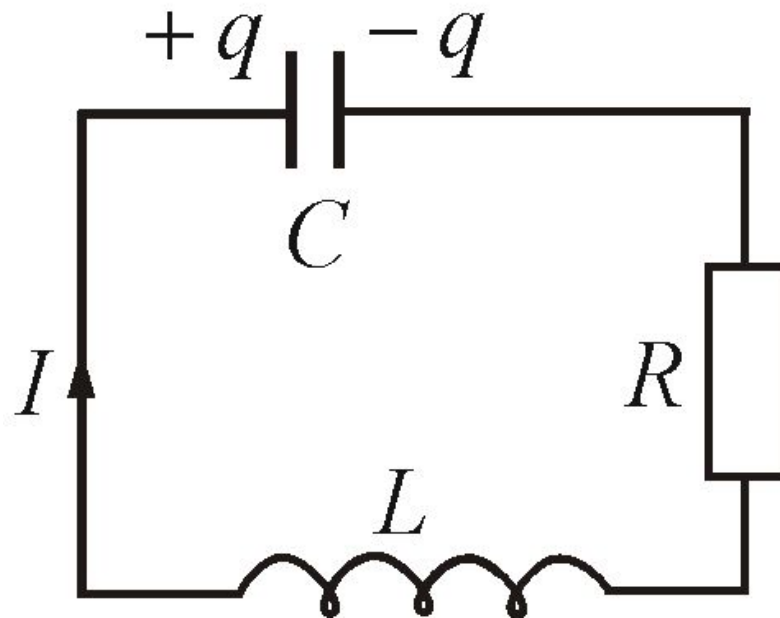


Рис. 3

По второму закону Кирхгофа

$$IR + \frac{q}{c} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 = 0$$

Это уравнение свободных затухающих колебаний в контуре R, L и C

решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

$\beta = R / 2L$ - коэффициент затухания,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота контура

$$\text{при } \beta \leq \omega_0, \text{ т.е. } \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

На рис.28.4, показан вид затухающих колебаний заряда q и тока I .

Колебаниям q соответствует x — смещение маятника из положения равновесия, силе тока I — скорость v .

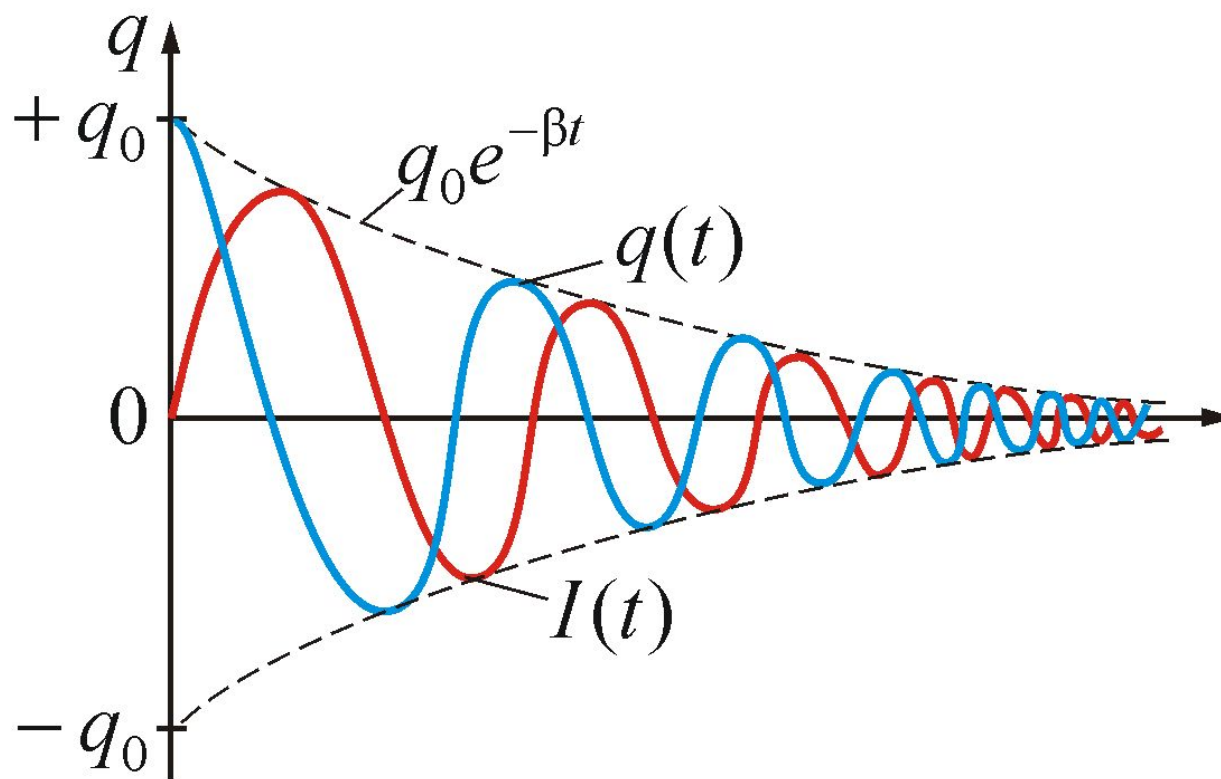


Рис.28. 4

Затухание принято характеризовать
логарифмическим декрементом затухания

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}$$

R , L , ω – определяются параметрами контура, следовательно, и χ является характеристикой контура. Если затухание невелико $\beta^2 \ll \omega_0^2$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\chi = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Добротность колебательного контура Q
определяется как величина обратно
пропорциональная χ ,

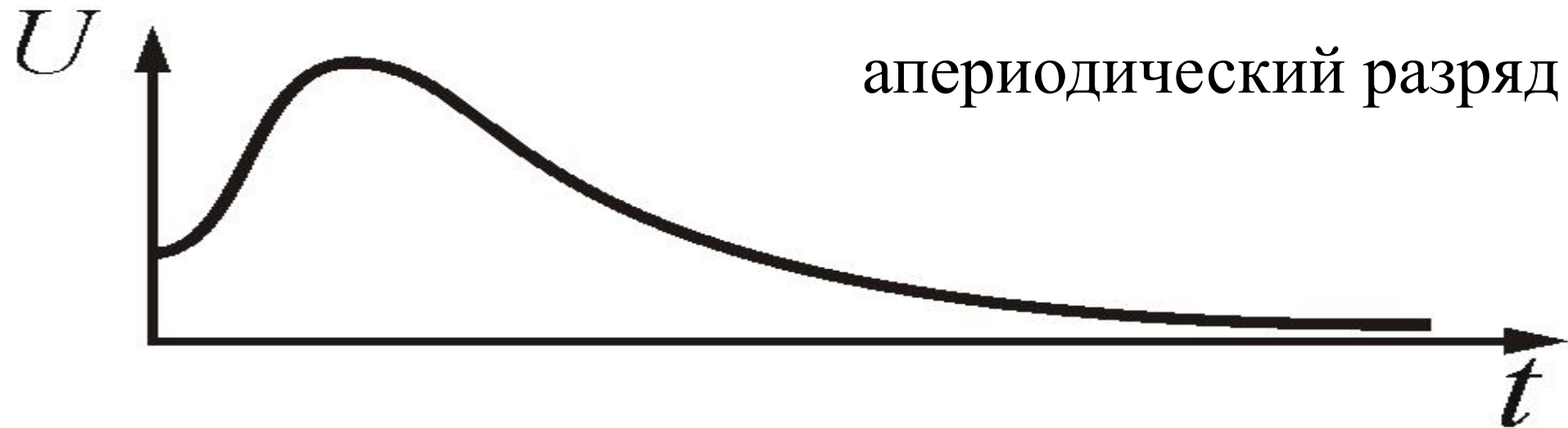
$$Q = \frac{\pi}{\chi}$$

$$\chi = \frac{1}{N} \quad \text{то} \quad Q = \pi N$$

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$$

W – энергия контура в данный
момент, ΔW – убыль энергии за один
период, следующий за этим
моментом

При $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т.е. при $R^2 / 4L^2 \geq 1 / LC$



Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется *критическим сопротивлением*.

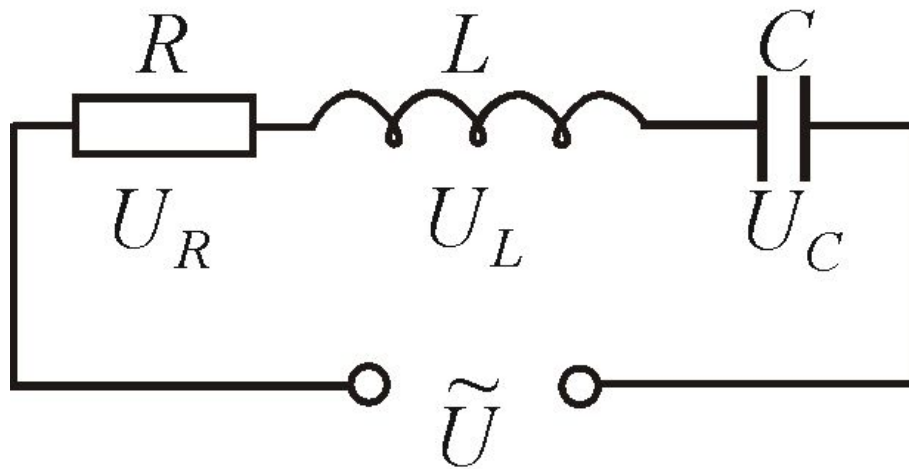
$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{волн}}$$

28.4 Вынужденные электрические колебания

К контуру, изображенному на рисунке 4.1 подадим переменное напряжение U

$$U = U_m \cos \omega t \quad (28.4.1)$$



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t \quad (28.4.2)$$

уравнение вынужденных электрических колебаний

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний. Его решение при больших t

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (28.4.3)$$

где

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

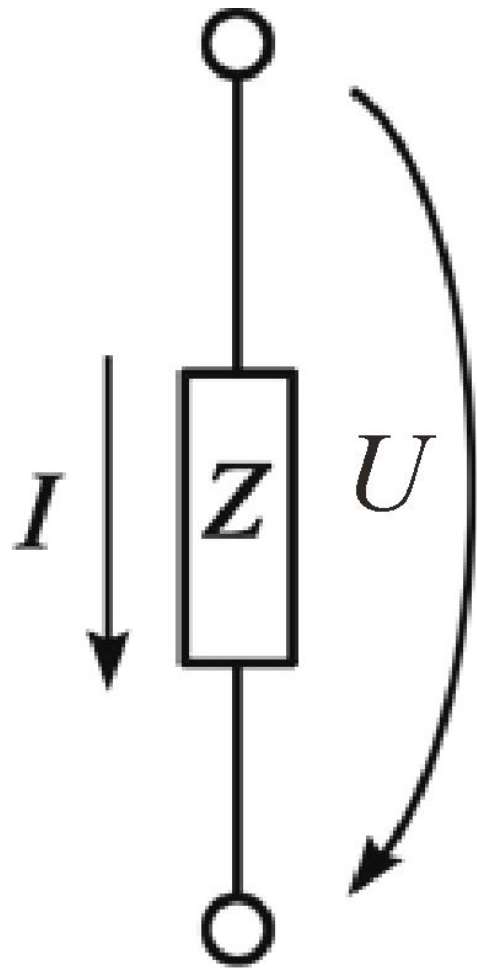
Величина $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ называется *полным сопротивлением цепи, (импеданс)*

а величина $X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — *реактивным сопротивлением.*

R — *активное сопротивление* отвечает за потерю мощности в цепи.

X — *реактивное сопротивление*, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω .

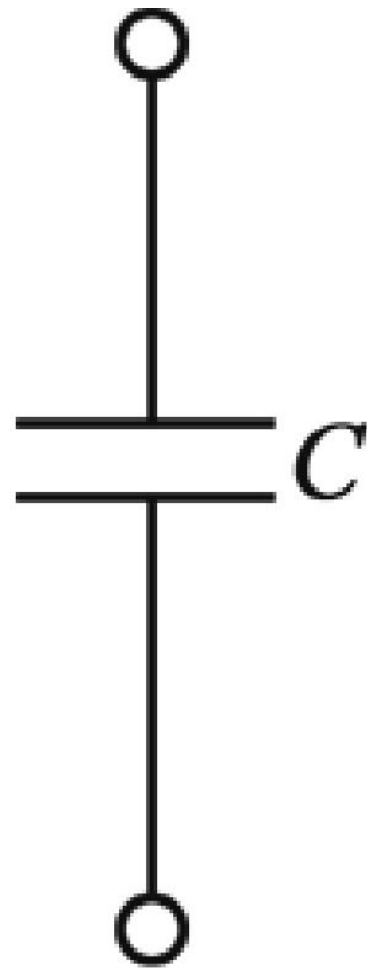
Идеальные элементы цепи и соответствующие им импедансы:



$$U = IZ$$



$$Z_L = i\omega L$$



$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$



$$Z_R = R$$

где $\varphi = \alpha - \pi/2$ — сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (27.26)). В соответствии с выражением (27.13)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (27.16)$$

Из формулы (27.16) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), если $\omega L > 1/(\omega C)$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$), если $\omega L < 1/(\omega C)$.

Формулы (27.15) и (27.16) можно также получить с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано ниже для переменных токов.

