

Дискретная математика



Предикаты

Предикат – это функция
вида

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = y,$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ –
предметные переменные; y –
значение предиката.

Предикаты

$$x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$$

где $M_1, M_2, \dots, M_n$ —
предметные множества,

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n —$$

поле предиката.

Предикаты

Переменная y – может принимать значения из множества

$$V = \{0, 1\}.$$

Здесь 0 – «нет», «ложь»;

1 – «да», «истина».

Предикаты

Например:

1) на множестве N задан предикат $P(x)$ – « x является четным числом».

Тогда $P(1)=0$, $P(2)=1$.

2) На множестве $N \times N$ задан предикат $Q(x, y)$ – « $x \leq y$ ».

Тогда

$Q(1, 1)=1$; $Q(1, 2)=1$; $Q(3, 2) = 0$.

Предикаты

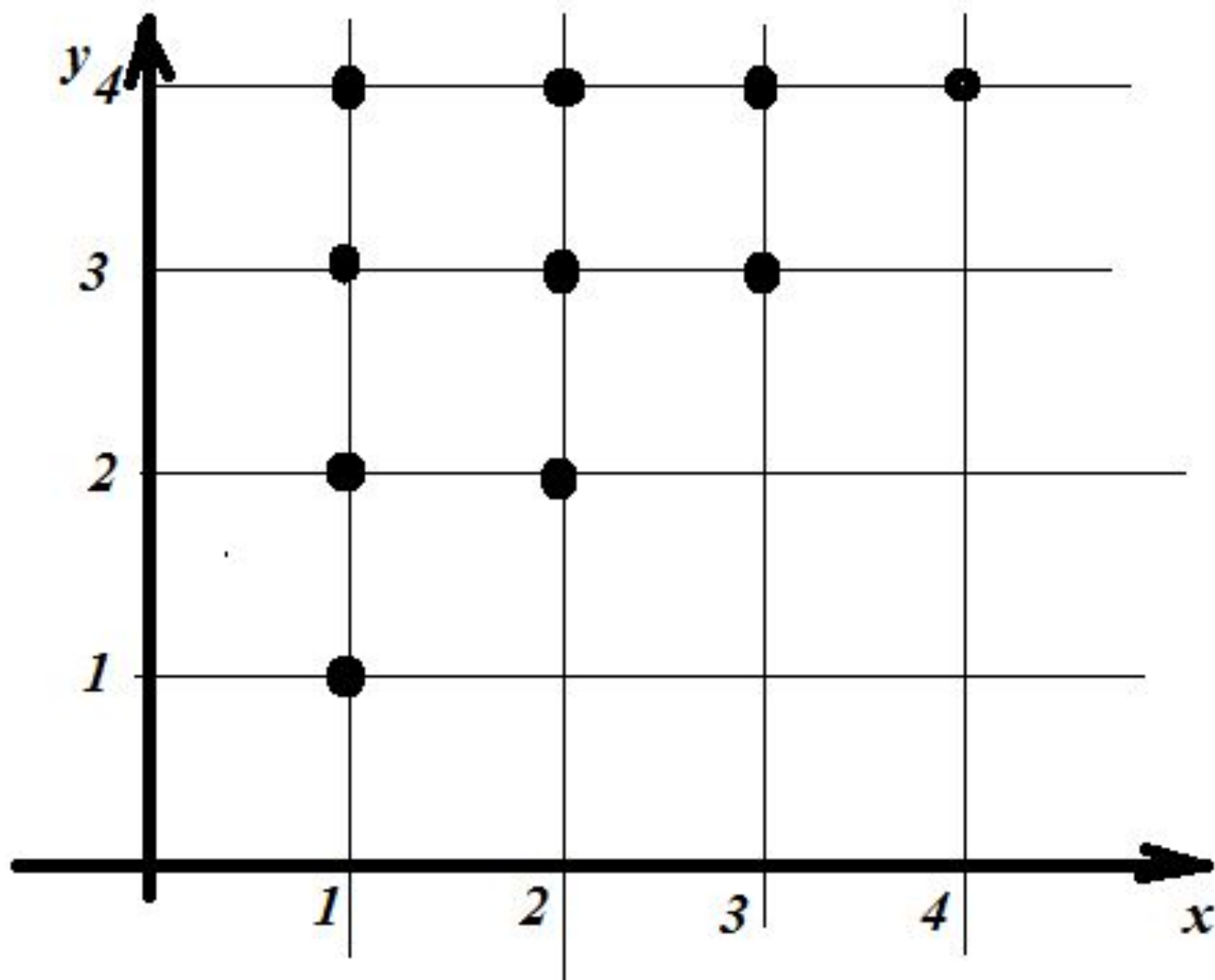
Подмножество I множества M называется областью истинности предиката P , если наборы значений предметных переменных из множества I обращают предикат P в 1.

Предикаты

Например:

Для предиката $Q(x,y)$ область истинности I – множество всех точек плоскости с натуральными координатами, лежащие на диагонали первого координатного угла и выше.

Предикаты



Предикаты

Над предикатами можно совершать знакомые нам логические операции:

Конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание, импликацию, и т. д.

Например:

$P(x,y)$ – « $x < y$ », $R(x,y)$ – « $x = y$ ».

Тогда $\neg P(x,y)$ – « $x \geq y$ »,

$P(x,y) \vee R(x,y)$ – « $x \leq y$ » и т. д.

Предикаты

При этом область истинности полученных предикатов изменяется по тем же правилам:

$$I_{\neg P} = \overline{I_P};$$

$$I_{P \vee R} = I_P \boxtimes I_R;$$

и так далее.

Предикаты

Однако в логике предикатов есть операция, которая отсутствуют в логике высказываний.

Квантификация или *квантирование*

В результате этой операции на переменную предиката навешивается квантор (переменная связывается квантором). Переменная при этом становится **связанной**. Переменная, не связанная называется **свободной**.

Предикаты

Существуют два вида
кванторов:

**Квантор общности $\forall$ — «для
любого, для каждого».**

**Квантор существования $\exists$ —
«существует, найдется».**

Предикаты

Предикатная формула:

$$\forall x P(x)$$

истинна тогда и только тогда,
когда предикат **$P(x)=1$** при
любом x ,

ложна тогда и только тогда,
когда **найдется x , при**
котором предикат $P(x)=0$.

Предикаты

Предикатная формула:

$$\exists x P(x)$$

истинна тогда и только тогда,

когда **найдется x , при**

котором предикат $P(x)=1$,

ложна тогда и только тогда,

когда предикат **$P(x)=0$ при**

любом x .

Замечание

Когда в предикате $P(x)$ переменная x связывается квантором, она перестает влиять на значение предиката и ***предикат становится высказыванием***, принимающим фиксированное значение *Истина* или *Ложь*.

Предикаты

Например: $P(x)$ – « x является четным числом» на множестве N

Тогда $\forall x P(x) = 0$

так как есть $x=3$, при котором $P(3)=0$.

Тогда $\exists x P(x) = 1$

так как есть $x=2$, при котором $P(2)=1$.

Предикаты

Если предикат имеет более 1 переменной, то ее квантификация приводит к уменьшению числа переменных на 1.

Например:

предикат $Q(x, y)$ – « $x \leq y$ » на множестве $N \times N$.

Предикаты

$\forall x Q(x, y) = R(y)$ –
новый предикат от одной
переменной y – «любое
натуральное число x меньше либо
равно y ».

При $y=1$ это не так (любой $x \leq 1$) ,
 $\forall x Q(x, 1) = R(1) = 0$,

При $y=2$ это не так (любой $x \leq 2$),
 $\forall x Q(x, 2) = R(2) = 0$,

Предикаты

Таким образом, предикат

$$R(y) = \forall x Q(x, y) = 0$$

то есть является функцией -
константой

Предикаты

$\exists x Q(x, y) = W(y)$ –
новый предикат от одной
переменной y – «найдется
натуральное число x меньше либо
равно y ».

При $y=1$ это так (найдется $x \leq 1$) ,

$$\exists x Q(x, 1) = W(1) = 1,$$

При $y=2$ это так (найдется $x \leq 2$),

$$\exists x Q(x, 2) = W(2) = 1,$$

Предикаты

Таким образом, предикат

$$W(y) = \exists x Q(x, y) = 1$$

то есть тоже является функцией
-константой

Предикаты

Кванторы можно навесить на все переменные предиката. Тогда предикат станет высказыванием.

Например:

предикат $Q(x, y)$ – « $x \leq y$ ».

Предикаты

$$\forall x \forall y Q(x, y) = 0$$

так как **неверно то**, что *любой*
натуральный x меньше либо
равен любого натурального y.

Например, при $x=5$, $y=2$.

Предикаты

$$\forall x \exists y Q(x, y) = 1$$

так как **верно то**, что *любой
натуральный x меньше либо
равен некоторого
натурального y .*

Например, при $x=1$, $y=1$; при
 $x=2$, $y=2$, ...

Предикаты

$$\exists y \forall x Q(x, y) = 0$$

так как **неверно то**, что
*найдется такой натуральный
у, который будет больше либо
равен любого натурального х.*

Это связано с тем, что
натуральное множество не
ограничено сверху.

Предикаты

$$\exists x \forall y Q(x, y) = 1$$

так как **верно то**, что *найдется такой натуральный x , который будет меньше либо равен любого натурального y .*

Этот $x=1$. Если бы неравенство было строгое, высказывание было бы ложным.

Предикаты

$$\forall y \exists x Q(x, y) = 1$$

так как **верно то**, что *любой
натуральный y , больше либо
равен некоторого
натурального x .*

Например, $y=1, x=1$;

$y=2, x=2, \dots$

Предикаты

$$\exists x \exists y Q(x, y) = 1$$

так как **верно то**, что *найдутся такие натуральные x и y , что x меньше либо равен этого y .*

Например $x=3$, $y=7$.

Логика предикатов

Логика предикатов, как и логика высказываний, – свод правил, по которым строятся формулы связывающие простые предикаты в предикатные формулы и порядок определения истинности/ложности этих формул.

Логика предикатов

Равносильные предикатные формулы – те, у которых область истинности совпадает.

Логика предикатов

Интерпретация – это сопоставление каждому предикатному символу в формуле определенного предиката.

Логика предикатов

Пусть формулы F и G содержат одно и тоже множество свободных переменных.

Формулы F и G ***равносильны в данной интерпретации*** – если они выражают один и тот же предикат.

Логика предикатов

Например:

$$P(x, y) : x > y; \quad Q(x, y) : x \leq y.$$

Тогда предикатные формулы:

$$\neg \exists x \neg P(x, y) = (,)$$

являются равносильными в данной интерпретации, так как

$$\neg P(x, y) = Q(x, y).$$

При других интерпретациях предикатов P и Q формулы могут не быть равносильными.

Логика предикатов

Формулы F и G **равносильны на множестве M** – если они
равносильны во всех
интерпретациях на этом
множестве.

Логика предикатов

Например: $F = \forall xP(x)$, $G = \exists xP(x)$

Равносильны в любой интерпретации на множестве M , если M состоит из одного элемента. Если

$$a \in M : P(a) = 0, \forall xP(x) = 0 \quad \exists \quad () = 0.$$

Если

$$a \in M : P(a) = 1, \forall xP(x) = 1 \quad \exists \quad () = 1.$$

На другом множестве формулы F и G могут не быть равносильными.

Логика предикатов

Формулы F и G ***равносильны в логике предикатов*** – если они
равносильны на всех
множествах.

Логика предикатов

Например:

$$F = P(x) \vee \neg P(x),$$

$$G = \neg(P(x) \cdot \neg P(x)).$$

Тогда F и G равносильны на любых множествах и при любых интерпретациях предиката P(x).

$$F \equiv G$$

Равносильные формулы

Для предикатных формул
сохраняются все равносильности
(эквивалентности) алгебры логики.
Например, закон де Моргана:

$$\neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv \neg P(x) \cdot \neg Q(x)$$

$$\neg(P(x) \cdot Q(x)) \equiv \neg P(x) \vee \neg Q(x)$$

Свойства операций над предикатами

Перенос квантора через отрицание

$$\neg(\forall x P(x)) = \exists x(\neg P(x)) \quad (1)$$

$$\neg(\exists x P(x)) = \forall x(\neg P(x)) \quad (2)$$

Здесь и далее, знак равносильности $\equiv$ заменен знаком равенства.

Свойства операций над предикатами

Вынос квантора за скобки

$$\left(\forall x P(x) \right) \cdot Q = \forall x \left(P(x) \cdot Q \right) \quad (3)$$

$$\left(\forall x P(x) \right) \vee Q = \forall x \left(P(x) \vee Q \right) \quad (4)$$

Свойства операций над предикатами

Вынос квантора за скобки

$$\left(\exists x P(x)\right) \cdot Q = \exists x \left(P(x) \cdot Q\right) \quad (5)$$

$$\left(\exists x P(x)\right) \vee Q = \exists x \left(P(x) \vee Q\right) \quad (6)$$

Свойства операций над предикатами

Закон коммутативности для
одноименных кванторов:

$$\forall x(\forall yP(x, y)) = \forall y(\forall xP(x, y)) \quad (7)$$

$$\exists x(\exists yP(x, y)) = \exists y(\exists xP(x, y)) \quad (8)$$

Свойства операций над предикатами

Коммутативность дает
возможность использовать более
краткую запись:

$$\forall x \forall y \forall z P(x, y, z) = \forall x, y, z P(x, y, z) \quad (9)$$

$$\exists x \exists y \exists z P(x, y, z) = \exists x, y, z P(x, y, z) \quad (10)$$

Равносильные формулы

Проверить равносильность формулы в логике предикатов, не так просто, как в логике высказываний. Высказывание может принимать значения 0 и 1.

Формула с 2 высказываниями содержит 2^2 возможных значений, и так далее.

Предикат имеет бесконечное множество интерпретаций.

Истинность в логике предикатов

*Предикатная формула F называется выполнимой (непротиворечивой), если существует интерпретация входящих в нее предикатов, в которой F принимает значение **истина**. То есть ее область истинности не пуста.*

Истинность в логике предикатов

Предикатная формула F называется тождественно истинной (общезначимой),
если при любой интерпретации
входящих в нее предикатов,
область истинности совпадает с
областью определения.

Истинность в логике предикатов

Предикатная формула F называется тождественно ложной (противоречивой),
если при любой интерпретация
входящих в нее предикатов,
область истинности пуста.

Истинность в логике предикатов

Например:

$$F = P(x) \vee \neg P(x) = 1$$

Тождественно истинная формула.

$$G = P(x) \cdot \neg P(x) = 0$$

Тождественно ложная формула

Истинность в логике предикатов

Замечание 1

Формула F – общезначима тогда и только тогда, когда $\neg F$ – противоречива.

Замечание 2

Формула F – выполнима тогда и только тогда, когда $\neg F$ – не является общезначимой.

Истинность в логике предикатов

Замечание 3

Если F и G – равносильные формулы в логике предикатов, то формула

$$W = F \sim G$$

общезначима и выполняется равенство:

$$I_F = I_G$$

Истинность в логике предикатов

Замечание 4

Если формула

$$W = F \rightarrow G$$

общезначима, то выполняется:

$$I_F \subseteq I_G$$

Истинность в логике предикатов

Замечание 5

Если y не входит в формулу $P(x)$, то следующие формулы являются общезначимыми:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(y);$$

$$P(y) \rightarrow \exists x P(x).$$

Истинность в логике предикатов

Квантор **общности** является обобщением **конъюнкции**, поэтому справедлива формула:

$$\begin{aligned}\forall x (P(x) \cdot Q(x)) &= & (11) \\ &= \forall x P(x) \cdot \forall x Q(x).\end{aligned}$$

Истинность в логике предикатов

Квантор **существования**

является обобщением

дизъюнкции, поэтому

справедлива формула:

$$\begin{aligned}\exists x \left(P(x) \vee Q(x) \right) &= \quad (12) \\ &= \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).\end{aligned}$$

Истинность в логике предикатов

Замечание 6

Если в формулах (11) и (12) поменять местами кванторы, то получаются выражения, истинные лишь в одну сторону:

$$\begin{aligned} \exists x (P(x) \cdot Q(x)) &\rightarrow \quad (13) \\ &\rightarrow \exists x P(x) \cdot \exists x Q(x). \end{aligned}$$

Истинность в логике предикатов

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \rightarrow \quad (14) \\ \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x)).$$

В таких случаях говорят, что левая часть утверждения более сильная, чем правая.

Истинность в логике предикатов

В таком случае, надо
воспользоваться правилом:

$$\forall xP(x) = \forall yP(y) = \forall zP(z) = \forall tP(t) = \dots$$

$$\exists xP(x) = \exists yP(y) = \exists zP(z) = \exists tP(t) = \dots$$

То есть, если переменная
связана квантором, то неважно,
как она называется.

Истинность в логике предикатов

В выражениях (13) и (14) надо сделать замену переменной, после чего воспользоваться формулами (4) и (5):

$$\begin{aligned} & \exists x P(x) \cdot \exists x Q(x) = \\ & = \exists x P(x) \cdot \exists y Q(y) = \\ (15) \quad & = \exists x \exists y (P(x) \cdot Q(y)). \end{aligned}$$

Истинность в логике предикатов

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) &= \\ &= \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) = \\ &= \forall x \forall y (P(x) \cdot Q(y)).\end{aligned}$$

(16)

Префиксная нормальная форма

Префиксной нормальной формой (ПНФ) называется формула, имеющая вид:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n F$$

где $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ — кванторы,
 F — предикатная формула,
имеющая вид ДНФ.