

МНОЖЕСТВА

И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Определение множества

- Множество – это совокупность однотипных элементов или объектов, объединённых по некоторому признаку.
- Например, *множество* книг в библиотеке, *множество* учеников в классе, *множество* натуральных чисел $\mathbb{N}$ и т.д.

- Множества
 - Конечные
 - Бесконечные

*Множество дней недели,
Множество месяцев в году*

*Множество точек на прямой,
Множество звезд на небе*

Обозначение множеств

- Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C \dots Z$.
- Объекты, из которых образовано множество, называются элементами.
- Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: $a, b, c \dots z$.

Например: $A = \{a, b, c\}$

- Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа $\in$ (в противном случае используется символ $\notin$).
- Запись $a \in A$ означает, что a есть элемент множества A .
- Запись $4 \notin \{1,2,3\}$ означает, что 4 не принадлежит множеству $\{1,2,3\}$.
- **Равными** называют два множества A и B , состоящие из одинаковых элементов: $A = B$.
- Если множество не содержит ни одного элемента, оно называется **пустым** и обозначается $\emptyset$

Способы задания множеств

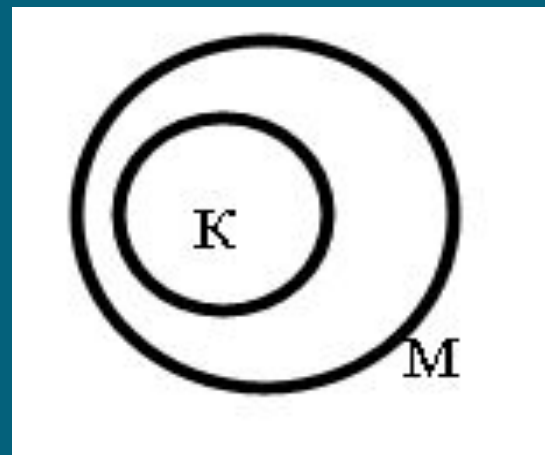
- Множество можно задать:
 - Перечислив все его элементы
 - $A = \{3, 4, 5, 6\}$
 - Указать характеристическое свойство его элементов
 - $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 7\}$
 - Множество натуральных чисел, меньших 7

Подмножество

Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера*.

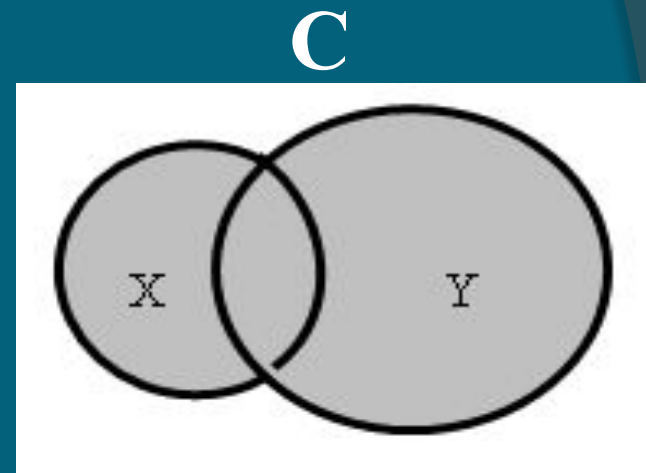
Множество K называют **подмножеством** множества M и обозначают $K \subset M$.

Множество K называется **подмножеством** множества M ($K \subset M$), если для любого $x \in K$ выполняется $x \in M$.



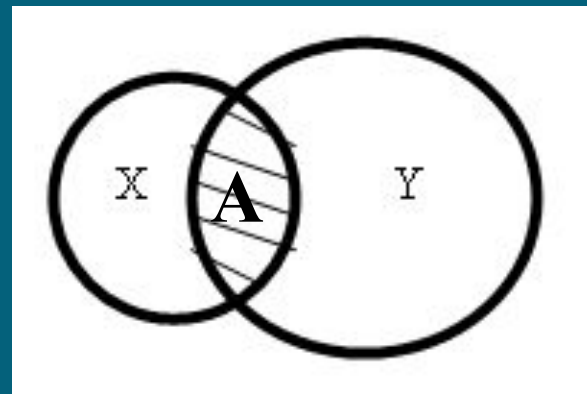
Объединение множеств

- Суммой или объединением двух множеств X и Y называется множество C , которое состоит из всех элементов данных множеств X и Y .
- Обозначается: $C = X \cup Y$.



Пересечение множеств

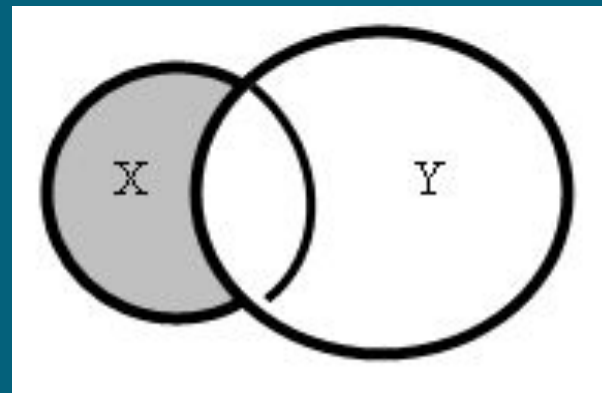
- Пересечением множеств X и Y называется множество A , состоящее из элементов, входящих одновременно и во множество X , и во множество Y .



- Обозначение: $A = X \cap Y$

Разность множеств

- Разностью множеств X и Y называется множество, содержащее все элементы множества X , не содержащиеся в Y .
- Обозначение: $X \setminus Y$



Пример 1

- Даны множества $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B=\{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C=\{12, 13, 15, 16\}$, $D=\{0, 1, 20\}$.
- Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \setminus D$.
- Решение:**
- Учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем объединение или разность.
- Получим
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\}$,
- $C \cup D = \{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\}$,
- $B \cap C = \{16\}$, $A \cap D = \emptyset$, $A \setminus C = \{2, 3, 5, 8\}$, $D \setminus B = \{0, 20\}$,
- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}$,
- $A \cap B \cap C = \emptyset$, $B \cup D \cap C = \{1, 3, 4, 8, 16\}$,
 $A \cap C \setminus D = \{13, 15\}$

Пример 2

- Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?
- Решение: Пусть A – множество абитуриентов, выдержавших экзамен, B – множество абитуриентов, получивших оценку ниже 5, по условию $m(A)=210$, $m(B)=180$, $m(A \cup B)=250$. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A \cap B$.
- Находим $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 210 + 180 - 250 = 140$.

**Решение
логических
задач с помощью
кругов Эйлера**

Задача

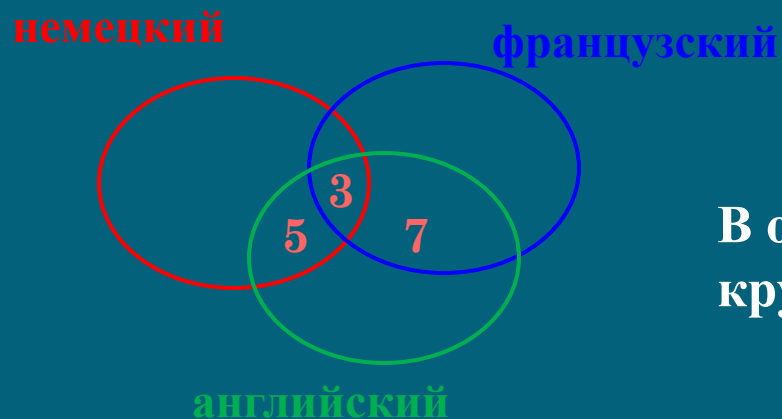
Из 90 туристов, отправляющихся в путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским – 28, французским – 42.

Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским – 10, немецким и французским – 5, всеми тремя языками – 3.

Сколько туристов не владеют ни одним языком?

Решение

Английским и французским языками владеют 10 человек, а 3 из них владеют ещё и немецким. Значит, английским и французским владеют $10 - 3 = 7$ (человек)



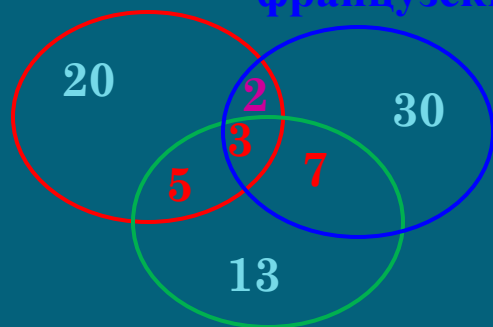
В общую часть английского и французского кругов вписываем число 7

Английским и немецким языками владеют 8 человек, а 3 из них владеют ещё и французским. Значит, английским и немецким владеют $8 - 3 = 5$ (человек)

В общую часть английского и немецкого кругов вписываем число 5

немецкий

французский



английский

Немецким и французским языками владеют 5 человек, а 3 из них владеют ещё и английским. Значит, немецким и французским владеют $5 - 3 = 2$ (человека)

В общую часть немецкого и французского кругов вписываем число 2

Известно, что немецким языком владеют 30 человек, но $5 + 3 + 2 = 10$ из них владеют и другими языками, значит, только немецкий знают 20 человек. Английский язык знают 28 человек, но $5 + 3 + 7 = 15$ человек владеют и другими языками, значит, только английский знают 13 человек. Французский язык знают 42 человека, но $2 + 3 + 7 = 12$ человек владеют и другими языками, значит, только французский знают 30 человек.

По условию задачи всего 90 туристов. $20 + 30 + 13 + 5 + 2 + 3 + 7 = 80$ туристов знают хотя бы один язык, следовательно, 10 человек не владеют ни одним языком.

Ответ: 10 человек.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В городе живёт многодетная семья. 7 детей любят капусту, 6 – морковь, 5 – горох, 4 – капусту и морковь, 3 – капусту и горох, 2 – морковь и горох, 1 – и капусту, и морковь, и горох. Сколько детей было в семье?
2. В детском лагере отдыхало 70 ребят. Из них 20 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов, а 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты спортом?
3. Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции, 10 – в Италии, 6 – в Англии. В Англии и Италии – пятеро, в Англии и Франции – 6, во всех трёх странах – 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работает 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?

Успехов в решении задач!