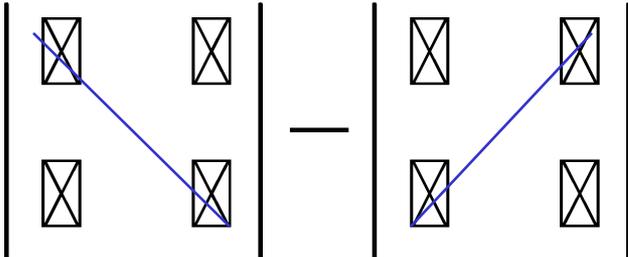


# Определители. Свойства определителей.

- Определителем (детерминантом) матрицы  $n$ -го порядка называется число:

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix}$$


$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

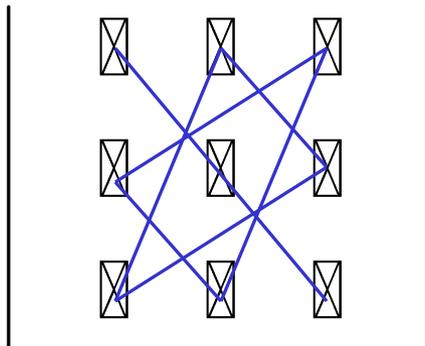
- Правило Сарруса:

$$\begin{array}{ccc|cc}
 + & + & + & & \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 - & - & - & & 
 \end{array}$$

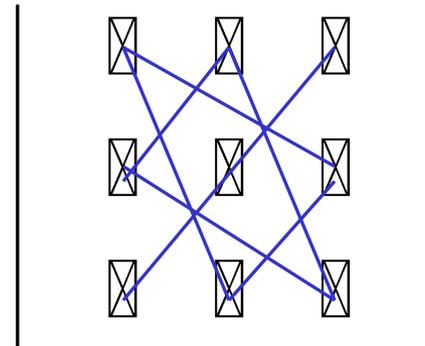
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
 - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

• Правило треугольника:



« + »



« - »

## Примеры:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 15 - (-2) = 17$$

$$2) \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$3) \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Примеры:

$$4) \begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 6 = 9$$

## Примеры:

$$5) \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot 7 + 7 \cdot 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 \cdot 0 -$$

$$- 5 \cdot (-1) \cdot (-2) - 0 \cdot 5 \cdot 4 - 7 \cdot 3 \cdot 7 =$$

$$= -28 + 175 + 0 - 10 - 0 - 147 = -10$$

## Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его транспонировать:  $\det A = \det A^T$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

2. При перестановке двух строк или столбцов определитель изменит свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$$

3. **Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 24 \cdot (2 - 9 + 2 - 1 - 12 + 3) = 24 \cdot (-15) = -360$$

4. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 6 - 6 + 3 - 4 = 0$$

5. Если все элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

6. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором- из вторых слагаемых.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2-1 & 4 \\ 7 & 3-1 & 3 \\ 7 & 2+3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

60
-38
98

7. Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times K \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 0 = 10$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 2 \\ + \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-10) = 10$$

8. Треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Привести определитель к треугольному виду и вычислить его:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \downarrow \end{array} \\
 \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \times(-2) \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \begin{array}{l} \times(-5) \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} = \\
 \\
 = - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -15 \end{array} \right| \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} + = - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -20 \end{array} \right| = 60
 \end{array}$$

## Разложение определителя по элементам строки или столбца.

- Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$   $\det D$  называется такой новый определитель, который получается из данного вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца содержащих данный элемент.

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Для данного определителя найти  
миноры:  $M_{22}$ ,  $M_{31}$ ,  $M_{43}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

- Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$   $\det D$  называется минор  $M_{ij}$  этого элемента, взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$

т.е. 
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю.

*разложение по  $i$ -ой строке:*

$$\det D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, \quad i = 1, \dots, n$$

*разложение по  $j$ -му столбцу:*

$$\det D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}, \quad j = 1, \dots, n$$

Разложить данный определитель по  
элементам: 1) 3-ей строки; 2) 1-го столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

1) Разложим данный определитель по элементам 3-ей строки:

$$\begin{aligned}\det D &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = \\ &= a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{32} \cdot (-1)^5 \cdot M_{32} + \\ &\quad + a_{33} \cdot (-1)^6 \cdot M_{33} + a_{34} \cdot (-1)^7 M_{34} =\end{aligned}$$

$$= 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 36 - 2 \cdot 2 - 4 - 4 \cdot 11 = 56$$

2) Разложим данный определитель по элементам 1-го столбца:

$$\begin{aligned}\det D &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = \\ &= a_{11} \cdot (-1)^2 \cdot M_{11} + a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot M_{21} + \\ &\quad + a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{41} \cdot (-1)^5 M_{41} =\end{aligned}$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 + 0 + 3 \cdot 36 - 32 = 56$$

# Основные методы вычисления определителя.

- ✓ 1. разложение определителя по элементам строки или столбца;
- ✓ 2. метод эффективного понижения порядка;
- ✓ 3. приведение определителя к треугольному виду.

## Метод эффективного понижения порядка:

Вычисление определителя  $n$ -го порядка сводится к вычислению одного определителя  $(n-1)$ -го порядка, сделав в каком-либо ряду все элементы, кроме одного, равными нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 = 56$$

Вычислить определитель приведением его к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} =$$


$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 = 56$$