Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Коши)

Классификация дифференциальных уравнений

В зависимости от числа независимых переменных и, следовательно, типа входящих в них производных:

- **обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную и производные по ней;**
- **дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие несколько независимых переменных и производные по ним.**

Примеры дифференциальных уравнений

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

уравнение свободных колебаний

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F\sin\omega t$$

уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

уравнение Лапласа

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

уравнение теплопроводности

Типы задач

- задача Коши
- краевая задача

Чтобы решить обыкновенное дифференциальное уравнение, необходимо знать значения зависимой переменной и (или) ее производных при некоторых значениях независимой переменной.

Задача Коши **(задача с начальными условиями) –**

дополнительные условия задаются при одном значении независимой переменной

Краевая задача **– дополнительные условия задаются при двух или более значениях независимой переменной.**

Решение ДУ в MathCAD

Given

<дифференциальное уравнение>

<начальные или гран. условия>

<имя функции>:=Odesolve(<x>,<xk>,[<n>])

Пример

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + \frac{1}{y} \qquad y(0) = 1; \qquad 0 \le x \le 4\pi$$

Решение ДУ в MathCAD

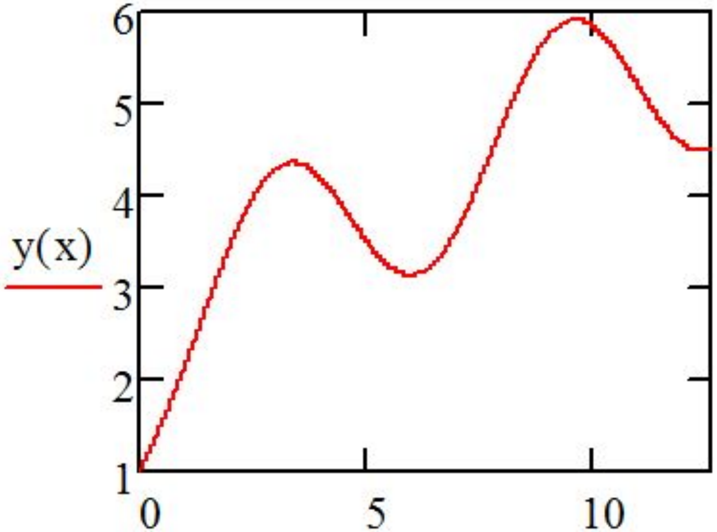
Given

$$y'(x) = \sin(x) + \frac{1}{y(x)}$$

$$\frac{d}{dx}y(x) = \sin(x) + \frac{1}{y(x)}$$

$$y(0) = 1$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, 4\pi)$$



Численные методы решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0 \qquad x_0 \le x \le x_n$$

Две группы методов:

- **одношаговые методы;**
- **методы прогноза и коррекции (многошаговые методы).**

***<u>Одношаговые методы</u>*, в которых для нахождения следующей точки на кривой $y = f(x)$ требуется информация лишь об одном предыдущем шаге.**

***<u>Методы прогноза и коррекции</u>* (многошаговые), в которых для отыскания следующей точки кривой $y = f(x)$ требуется информация более чем об одной из предыдущих точек.**

Численные методы решения задачи Коши

Одношаговые методы:

- **метод Эйлера;**
- **модифицированный метод Эйлера;**
- **метод Рунге-Кутты.**

Методы прогноза и коррекции:

- **метод Милна;**
- **метод Адамса–Башфорта;**
- **метод Хемминга.**

Погрешности

Источники погрешностей:

- **погрешность округления;**
- **погрешность усечения;**
- **погрешность распространения.**

Погрешность распространения – результат накопления погрешностей, появившихся на предыдущих этапах счета.

Указанные три источника погрешностей являются причиной наблюдаемых ошибок двух типов:

- ***локальная ошибка*** **– сумма погрешностей, вносимых в вычислительный процесс на каждом шаге вычислений;**
- ***глобальная ошибка*** **– суммарная погрешность, накопившаяся с момента начала вычислений.**

Метод Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

Формула Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2)$$

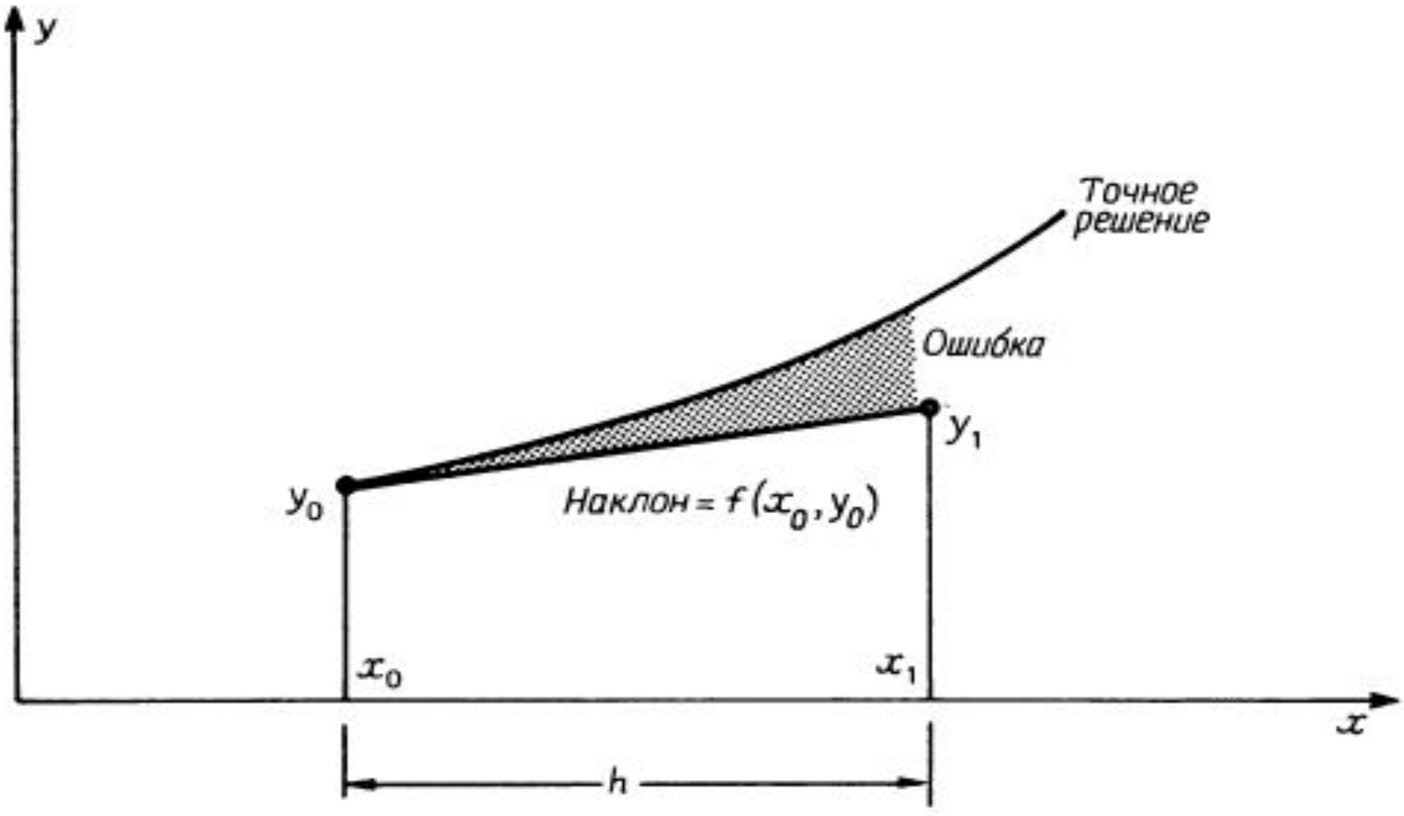
рекуррентное соотношение

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \ldots$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

Метод Эйлера



Модифицированный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})]$$

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \cdots$$

$$y''(x_0) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h}$$

Ошибка $O(h^3)$

Результаты расчетов

	Метод Эйлера	Модиф. метод Эйлера	Метод Рунге–Кутты	Точное решение
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.2000	1,2210	1.2221	1.2221
0.2	1.4420	1,4948	1.4977	1.4977
0.3	1.7384	1,8375	1.8432	1.8432
0.4	2.1041	2,2685	2.2783	2.2783
0.5	2.5569	2,8118	2.8274	2.8274
0.6	3.1183	3,4964	3.5201	3.5202
0.7	3.8139	4,3578	4.3927	4.3928
0.8	4.6747	5,4393	5.4894	5.4895
0.9	5.7376	6,7938	6.8643	6.8645
1.0	7.0472	8,4856	8.5834	8.5836

Общая характеристика одношаговых методов

- **чтобы получить информацию в новой точке, надо иметь данные лишь в одной предыдущей точке (свойство «самостартования»);**
- **в основе всех одношаговых методов лежит разложение функции в ряд Тейлора;**
- **все одношаговые методы не требуют вычисления производных;**
- **свойство «самостартования» позволяет легко менять величину шага.**

Методы Рунге–Кутты для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

$$z = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \qquad f(x, y, z) = z.$$

Начальные условия

$$y(x_0) = y_0 \qquad z(x_0) = z_0$$

Методы Рунге–Кутты для системы дифференциальных уравнений

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4}{6}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n); \qquad l_1 = hg(x_n, y_n, z_n);$$

$$k_2 = hf(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_1, z_n + 0.5l_1);$$

$$l_2 = hf(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_1, z_n + 0.5l_1);$$

$$k_3 = hf(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2, z_n + 0.5l_2);$$

$$l_3 = hf(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2, z_n + 0.5l_2);$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3);$$

$$l_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3);$$

Методы Рунге–Кутты для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \qquad\qquad\dots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

Методы Рунге–Кутты для системы дифференциальных уравнений

$$y_{j,n+1} = y_{j,n} + \frac{k_{j1} + 2k_{j2} + 2k_{j3} + k_{j4}}{6} \qquad j = 1,2,\dots,m$$

$$k_{j1} = hf(x_n, y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{mn});$$

$$k_{j2} = hf(x_n + 0.5h, y_{1n} + 0.5k_{11}, y_{2n} + 0.5k_{21}, \dots, y_{mn} + 0.5k_{m1});$$

$$k_{j3} = hf(x_n + 0.5h, y_{1n} + 0.5k_{12}, y_{2n} + 0.5k_{22}, \dots, y_{mn} + 0.5k_{m2});$$

$$k_{j4} = hf(x_n + h, y_{1n} + k_{13}, y_{2n} + k_{23}, \dots, y_{mn} + 0.5k_{m3})$$

Благодарю
за внимание!