

Решение систем линейных уравнений *методом* *Гаусса*

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения переменных

- Систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. *Это называется прямым ходом.*
- Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок. *Это называется обратным ходом.*

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1. Умножение или деление коэффициентов свободных членов на одно и то же число;
2. Сложение и вычитание уравнений;
3. Перестановка уравнений системы;
4. Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$$

Нужно записать **расширенную матрицу** системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла — *это просто отчеркивание для удобства оформления.*

Матрица системы – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных.

Расширенная матрица системы – это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае.

Решение.

Умножим первую строку на (-2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & - & | & 5 \\ 2 & 1 & - & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} -2 & 2 & & | & 10 \\ 2 & 1 & & | & -7 \end{pmatrix}$$

ко второй строке прибавим первую строку умноженную на -2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Разделим опять первую строку на (-2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

строка, которую **ПРИБАВЛЯЛИ** – **не изменилась**.

Всегда меняется строка, **К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ**.

Цель элементарных преобразований —

привести матрицу к ступенчатому виду.

Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто

называется *трапецевидный вид* или *треугольный*

В результате элементарных преобразований
получена *эквивалентная* исходной система уравнений

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - y = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Выполняем обратный ход, т.е. подстановку в первое уравнение вместо y ,

$$x = -5 + y$$

$$x = -5 + 1$$

$$x = -4$$

Ответ: $(-4; 1)$

Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Решение.

Переставим третье уравнение на место первого и запишем расширенную матрицу:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Чтобы в первом столбце получить $\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$, умножим 1-ю строку сначала на 3, а затем на 2 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Разделим 2-ю строку на 8, полученные результаты умножим на 3 и вычтем из 3-й строки

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{21}{8} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{21}{8} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{8} & \frac{39}{8} \end{array}\right)$$

Запишем новую эквивалентную систему с учетом расширенной матрицы

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - \frac{7}{8}z = -\frac{5}{8} \\ \frac{13}{8}z = \frac{39}{8} \end{cases}$$

Выполняем обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - \frac{7}{8}z = -\frac{5}{8} \\ \frac{13}{8}z = \frac{39}{8} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} \frac{13}{8}z &= \frac{39}{8} & z &= 3 \\ y - \frac{7}{8} \cdot 3 &= -\frac{5}{8} & y &= -\frac{5}{8} + \frac{21}{8} = \frac{16}{8} = 2 \\ x - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 &= 3 & x &= 3 + 4 - 6 = 1 \end{aligned}$$

Ответ: (1; 2; 3)