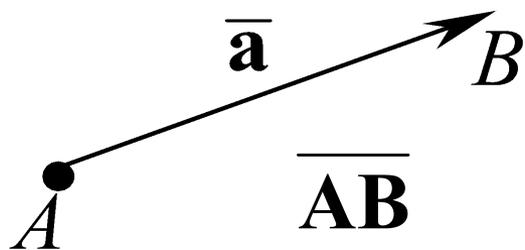


# Векторная алгебра

- Векторы. Линейные операции над векторами
- Базис. Координаты вектора
- Длина вектора
- <https://www.youtube.com/watch?v=E9VUvWGsc24&t=1s>
- Деление отрезка в данном отношении
- <https://www.youtube.com/watch?v=paHQGE1qpdM>

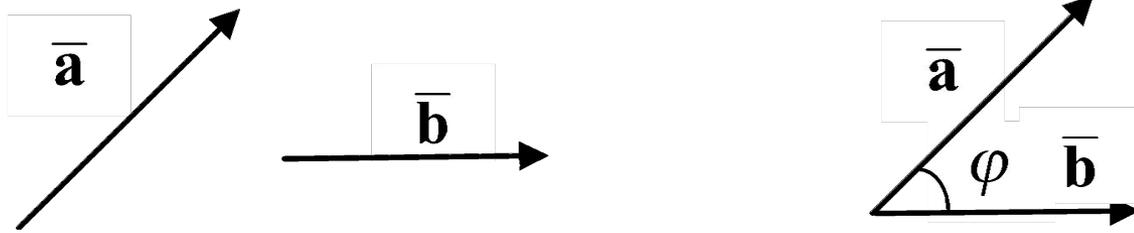
*Определение. Вектором* или по-другому *свободным вектором* называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).



Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (*модулем*) вектора.  $|\overline{AB}|$   $|\bar{a}|$

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором или *ортом*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается  $\bar{0}$ . Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.



Под *углом* между векторами  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  будем понимать угол, величина которого не превышает  $180^0$ .

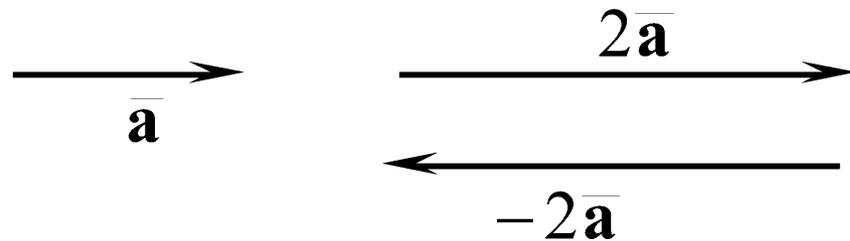
Два вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  называются *ортогональными*, если угол между ними равен  $90^0$ .  $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$

Два вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых.  $\bar{\mathbf{a}} \parallel \bar{\mathbf{b}}$

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

Два вектора называются *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Все нулевые векторы считаются равными.

*Определение. Произведением вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на число  $\alpha \neq 0$  называется вектор, длина которого  $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$ , а направление совпадает с направлением вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  при  $\alpha > 0$  и противоположно ему при  $\alpha < 0$ . Если  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$  или  $\alpha = 0$ , то их произведение полагают равным  $\bar{\mathbf{0}}$ .*

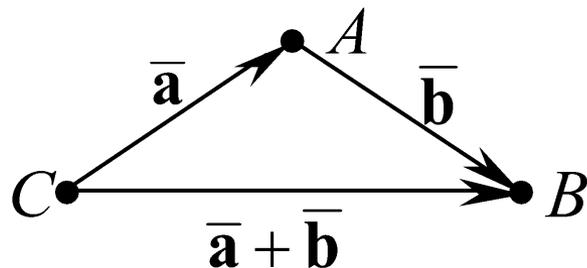


$$(-1)\bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}} \quad \text{противоположный вектору } \bar{\mathbf{a}}$$

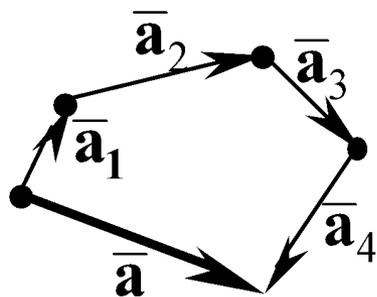
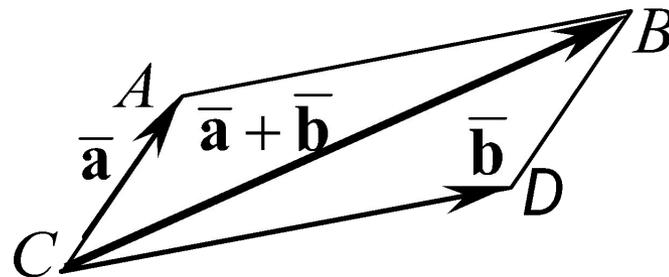
*Лемма 2.1 (критерий коллинеарности векторов). Два ненулевых вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда  $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$  для некоторого числа  $\alpha \neq 0$*

*Определение. Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор, соединяющий начало вектора  $\vec{a}$  с концом вектора  $\vec{b}$ , отложенного от конца вектора  $\vec{a}$*

*Правило треугольника*



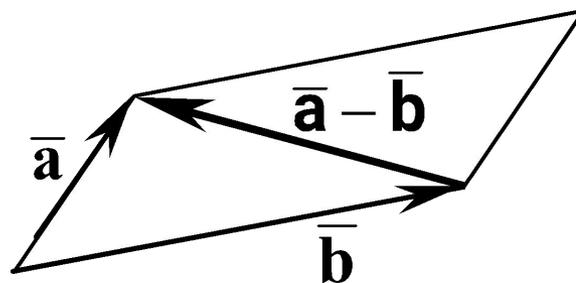
*Правило параллелограмма*



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$$

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

*разность векторов*



*Определение.* Пусть даны векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ . Тогда вектор  $\bar{b} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k$  называют *линейной комбинацией* векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ . При этом говорят, что вектор  $\bar{b}$  *линейно выражается* через вектора  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ , или другими словами *разложен по векторам*  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ .

*Лемма 2.2 (критерий компланарности векторов).*

Три ненулевых вектора  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие (например,  $\bar{c} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b}$ ).

# Свойства линейных операций над векторами

1.  $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$

2.  $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$

3.  $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{a}}$

4.  $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{0}}$

5.  $\alpha(\beta \bar{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\bar{\mathbf{a}}$

6.  $(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{a}} = \alpha \bar{\mathbf{a}} + \beta \bar{\mathbf{a}}$

7.  $\alpha(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \alpha \bar{\mathbf{a}} + \alpha \bar{\mathbf{b}}$

8.  $1\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}$

*Определение.* Говорят, что векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  **линейно зависимы**, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , не равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация  $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k = 0$ .

Если же равенство  $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k = 0$  возможно только при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , то векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  называют **линейно независимыми**.

**Лемма 3.1.** Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.

*Лемма 3.2 (критерий линейной зависимости двух векторов).* Два ненулевых вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

*Лемма 3.3 (критерий линейной зависимости трёх векторов).* Три ненулевых вектора  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

*Определение. Базисом* некоторой системы векторов называется любая максимальная линейно независимая подсистема этой системы векторов.

Иначе говоря  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  – базис, если

- 1)  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  – линейно независимы;
- 2)  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}$  – линейно зависимы для любого вектора  $\bar{a}$  из данной системы векторов.

Базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  – базис, то при  $\alpha \neq 0$   $\alpha\bar{e}_1, \alpha\bar{e}_2, \dots, \alpha\bar{e}_n$  – также базис.

**Теорема 3.4.** Любые два базиса данной системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

**Теорема 3.5.** 1) Базисом на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора.

2) Базисом в пространстве являются любые три некопланарных вектора.

**Теорема 3.6 (о базисе).** Каждый вектор линейно выражается через базис, причем единственным образом.

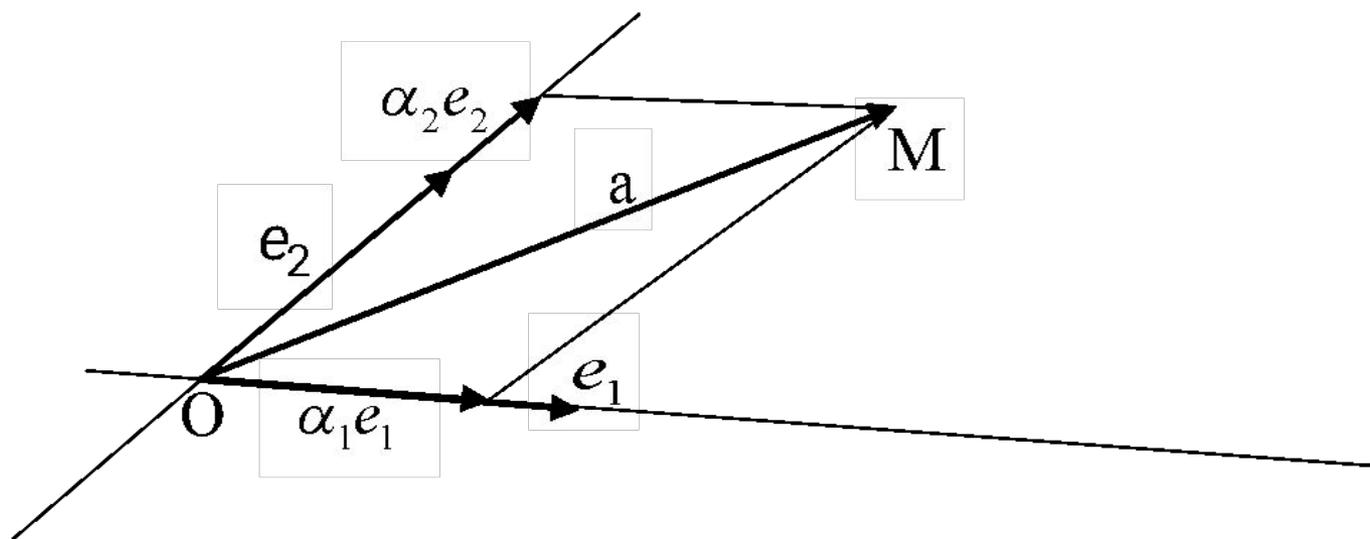
$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  – базис,  $\bar{a}$  – произвольный вектор  $\Rightarrow$

$$\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n$$

При этом  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называются **координатами** вектора  $\bar{a}$  в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$

Зафиксируем произвольную точку  $O$  в пространстве и выберем некоторый базис.

Совокупность этой точки и этого базиса называется *системой координат*.



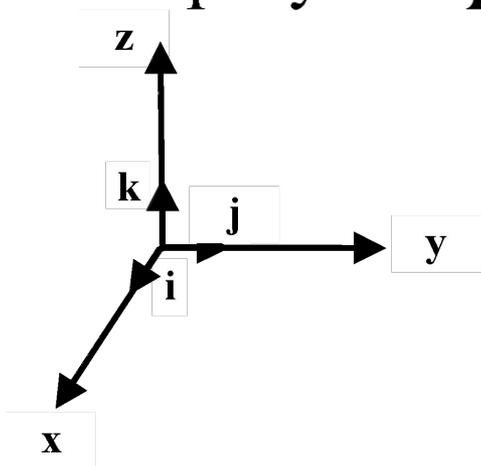
$$\bar{\mathbf{a}} = \overline{OM} = \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2$$

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – координаты вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  в этом базисе

Также говорят, что  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – *координаты точки  $M$* .

**Декартовой прямоугольной системой координат** в пространстве называют систему координат, базисом в которой являются единичные векторы, попарно ортогональные друг с другом.

**Правая** система координат, в которой векторы базиса образуют **правую тройку**, обозначают  **$\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$** :



Пусть  $\bar{\mathbf{a}}$  – произвольный вектор.

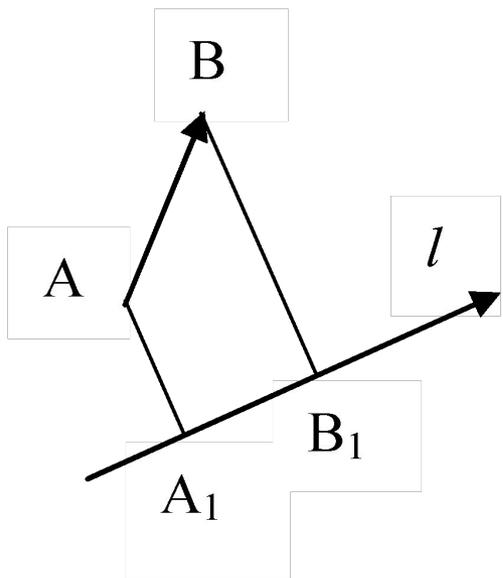
$$\text{Тогда } \bar{\mathbf{a}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\text{или } \bar{\mathbf{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$$

**Замечание.** Иногда в качестве базиса берут **левую тройку** векторов  **$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{k})$** . Тогда такую систему координат называют **левой**.

Пусть в пространстве задана ось  $l$ , то есть направленная прямая,  $\overline{AB}$  – произвольный вектор.

Обозначим через  $A_1$  и  $B_1$  – проекции на ось  $l$  точек  $A$  и  $B$  соответственно.



*Проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется положительное число  $|\overline{A_1B_1}|$ , если вектор  $\overline{A_1B_1}$  и ось  $l$  одинаково направлены, и отрицательное число  $-|\overline{A_1B_1}|$ , если вектор  $\overline{A_1B_1}$  и ось  $l$  противоположно направлены.*

Если точки  $A_1$  и  $B_1$  совпадают, то проекция вектора  $\overline{AB}$  равна 0.

$\text{пр}_l \overline{AB}$

## Свойства проекций:

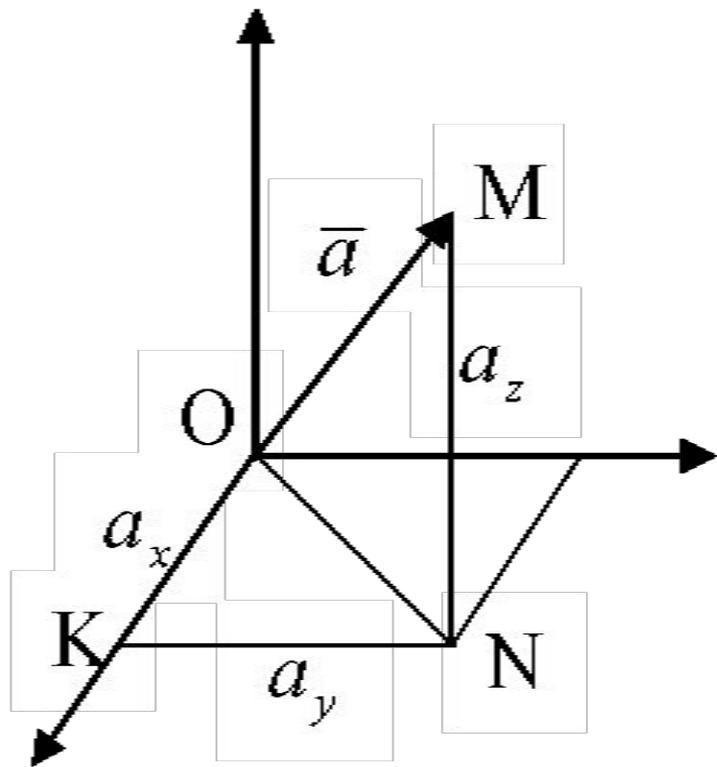
1. Проекция вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на ось  $l$  равна произведению длины вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на косинус угла  $\varphi$  между вектором и осью:  $\text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \varphi$ .
2. Проекция суммы нескольких векторов на ось  $l$  равна сумме их проекций на эту ось.
3. При умножении вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на число  $\lambda$  его проекция на ось  $l$  также умножается на это число:  $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}$ .

$$\bar{\mathbf{a}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

координата  $a_x$  – это проекция вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на ось  $Ox$

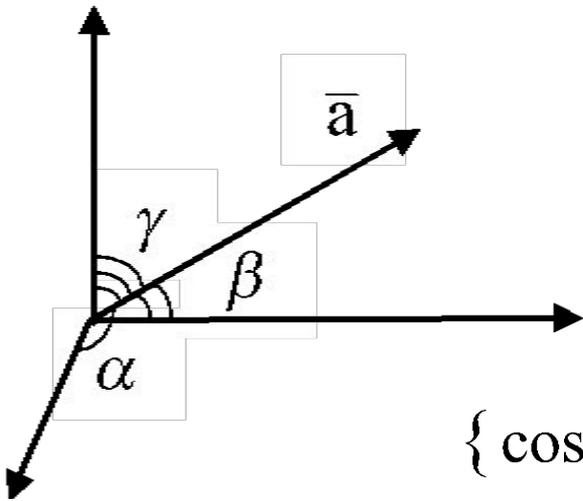
координата  $a_y$  – проекция вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на ось  $Oy$

координата  $a_z$  – проекция вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  на ось  $Oz$ .



$$|\bar{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$  Рассмотрим вектор  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ .



По свойству 1 проекций

$$a_x = \text{пр}_{Ox} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_{Oy} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \beta,$$

$$a_z = \text{пр}_{Oz} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \gamma \Rightarrow$$

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{a_x}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{i} + \frac{a_y}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{j} + \frac{a_z}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{k} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{a}}|} \bar{\mathbf{a}},$$

то есть вектор  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  – единичный и направлен также, как и  $\bar{\mathbf{a}}$ . Этот вектор называют *ортом вектора  $\bar{\mathbf{a}}$* .

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – *направляющие косинусы* вектора  $\bar{\mathbf{a}}$

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  – *свойство* направляющих

косинусов.

**Теорема 4.1.** Если  $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$ , то

$$1) \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\},$$

$$2) \alpha \cdot \bar{\mathbf{a}} = \{\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z\}.$$

*Лемма 4.2 (критерий коллинеарности векторов в координатной форме).* Два ненулевых вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Пример

$$\bar{\mathbf{a}} = \{2, 4, 0\} \quad 2 = \alpha \cdot 1$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \{1, 2, 0\} \quad 4 = \alpha \cdot 2$$

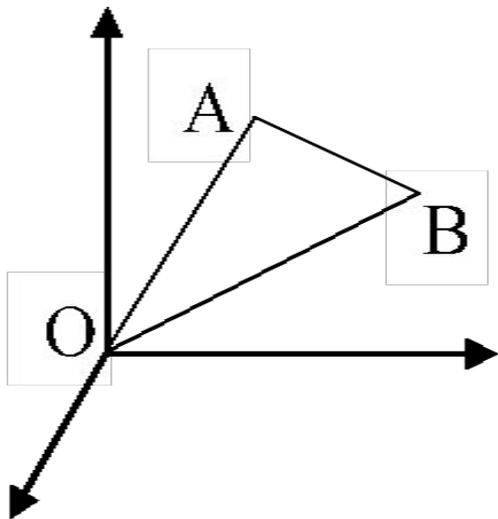
$$0 = \alpha \cdot 0$$

$\Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$  векторы  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  коллинеарны

$$a_x = \alpha \cdot b_x, \quad a_y = \alpha \cdot b_y, \quad a_z = \alpha \cdot b_z \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{a_x}{b_x}, \quad \alpha = \frac{a_y}{b_y}, \quad \alpha = \frac{a_z}{b_z} \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

$\mathbf{A} (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{B} (x_2, y_2, z_2)$ . Найдем координаты  $\overline{\mathbf{AB}}$ .



Вектор  $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{OB}} - \overline{\mathbf{OA}}$ .

Так как  $\overline{\mathbf{OB}} = \{x_2, y_2, z_2\}$ ,

$\overline{\mathbf{OA}} = \{x_1, y_1, z_1\}$ ,

то  $\overline{\mathbf{AB}} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ .

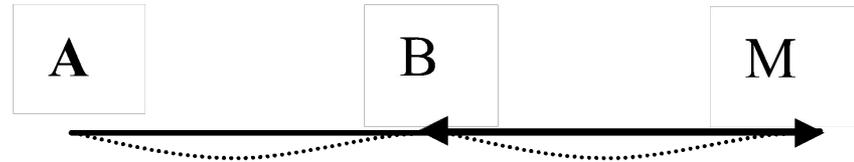
*Лемма 4.3.* Если  $\mathbf{A}$  имеет координаты  $(x_1, y_1, z_1)$ , точка  $\mathbf{B}$  – координаты  $(x_2, y_2, z_2)$ , то вектор  $\overline{\mathbf{AB}}$  имеет координаты  $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ .

Разделим отрезок **АВ** в отношении  $\lambda$ , то есть на прямой, проходящей через точки **А** и **В**, найдём такую точку **М**, что  $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ .

1)  $\lambda = 1/2$ ,  $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{MB}$ .



2)  $\lambda = -2$ ,  $\overline{AM} = -2 \overline{MB}$ .



3)  $\lambda = -1$ , то есть  $\overline{AM} = -\overline{MB}$  — НЕВОЗМОЖНО

$\lambda > 0 \Rightarrow \overline{AM}$  и  $\overline{MB}$  одинаково направлены  
 $\Rightarrow$  точка **М** лежит внутри отрезка **АВ**

$\lambda < 0 \Rightarrow \overline{AM}$  и  $\overline{MB}$  противоположно направлены  
 $\Rightarrow$  точка **М** лежит вне отрезка **АВ**

Пусть  $\mathbf{A} (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{B} (x_2, y_2, z_2)$ .

Обозначим координаты точки  $\mathbf{M} (x, y, z)$ .

Тогда  $\overline{AM} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$ ,  $\overline{MB} = \{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$ .

Так как  $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ , то

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda (y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda (z_2 - z).$$

Откуда получаем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$