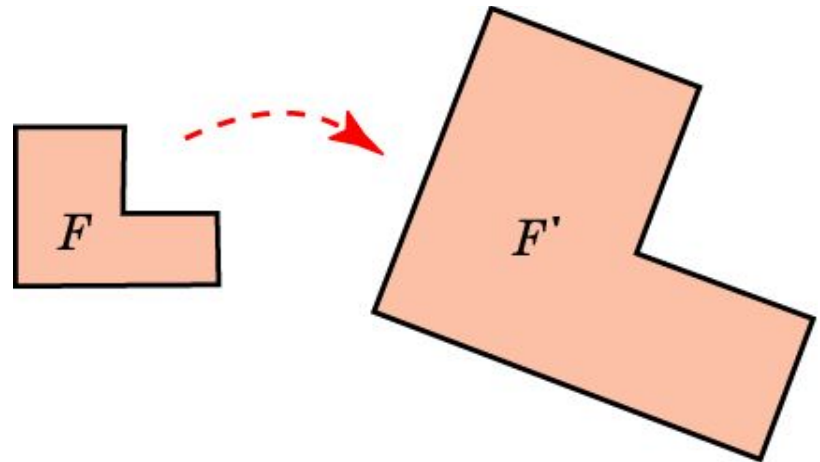


Подобие фигур

Преобразование плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называется **подобием**. Само это число называется **коэффициентом подобия**.

Таким образом, если точки A, B при подобии переходят соответственно в точки A', B' , то $A'B' = k \cdot AB$, или, что то же самое, $A'B' : AB = k$, причем k – одно и то же число для всех точек A, B . Заметим, что при $k = 1$ подобие является движением.

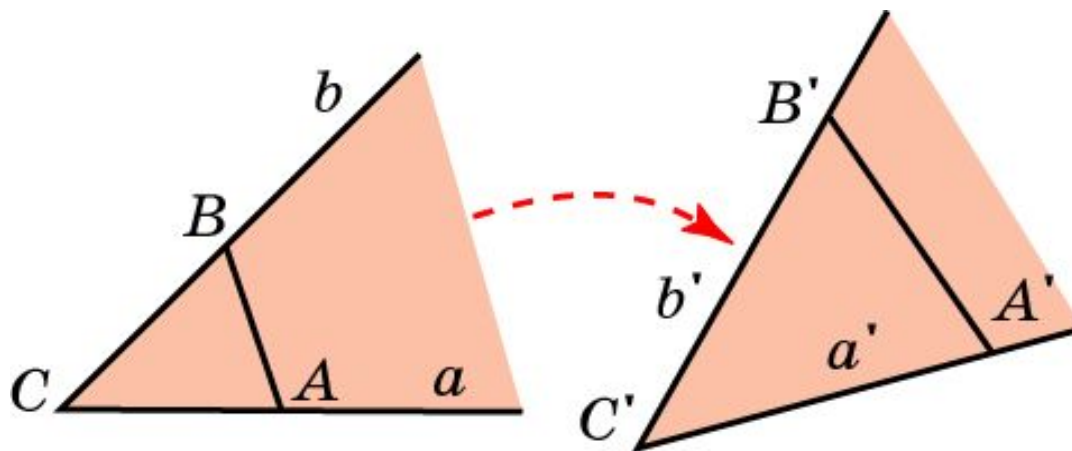
Две фигуры F и F' называются **подобными**, если одна из них переводится в другую подобием.



Свойства

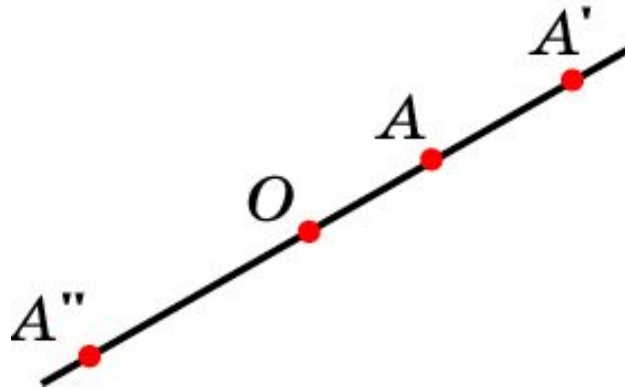
Свойство 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

Свойство 2. Подобие сохраняет величины углов.



Гомотетия

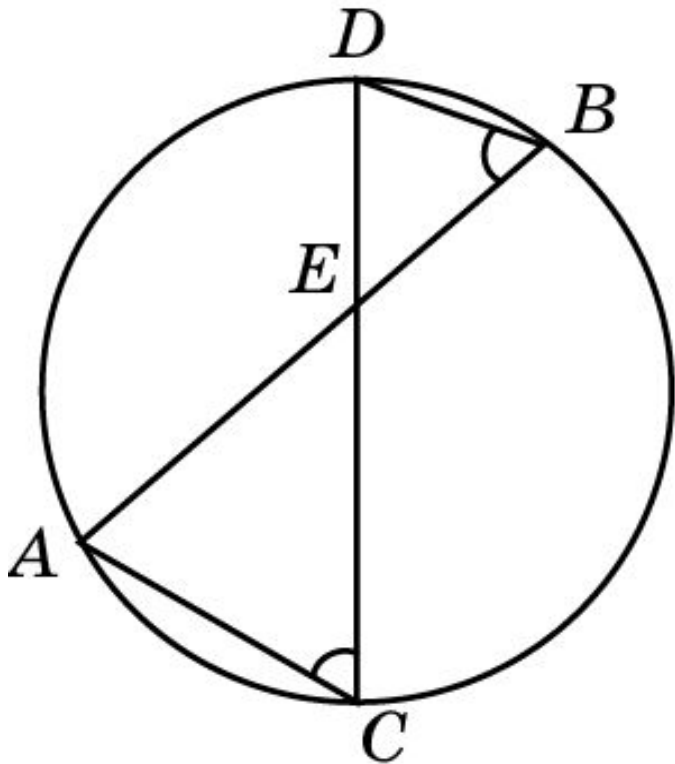
Зафиксируем точку O и положительное число k . Каждой точке A плоскости, отличной от O сопоставим точку A' на луче OA так, что $OA' = kOA$. Точке O сопоставим ее саму. Полученное преобразование плоскости называется **гомотетией** с центром в точке O и коэффициентом k .



Иногда гомотетия рассматривается и с отрицательным коэффициентом k . В этом случае каждой точке A плоскости, отличной от O сопоставляется точка A'' на луче противоположном OA так, что $OA'' = (-k)OA$.

Пример

Докажите, что произведение отрезков любой хорды, проведенной через внутреннюю точку круга, равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку.



Решение. Пусть дан круг с центром в точке O , хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке E . Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Треугольники ACE и DBE подобны. Следовательно,

$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$$
$$CE \cdot DE = AE \cdot BE$$

и, значит, $AE \cdot BE =$

Вопрос 1

Какое преобразование плоскости называется подобием?

Ответ: Преобразование плоскости, при котором расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число, называется подобием.

Вопрос 2

Подобны ли равные фигуры?

Ответ: Да.

Вопрос 3

Сформулируйте свойства подобия.

Ответ: 1. Подобие переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

2. Подобие сохраняет величины углов.

Вопрос 4

Какое преобразование плоскости называется гомотетией?

Ответ: Гомотетией называется преобразование плоскости, при котором каждой точке A плоскости, отличной от O сопоставляется точка A' на луче OA так, что $OA' = kOA$. Точке O сопоставляется она сама.

Упражнение 1

Фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом k .
С каким коэффициентом фигура F подобна фигуре F' ?

Ответ: $1/k$.

Упражнение 2

Приведите примеры фигур, которые подобны сами себе при любом коэффициенте подобия.

Ответ: Прямая, луч, полуплоскость, угол.

Упражнение 3

Верно ли, что если два угла подобны, то они равны?

Ответ: Да.

Упражнение 4

Как расположены точки A и A' относительно центра гомотетии O , если: а) $0 < k < 1$; б) $k > 1$?

Ответ: а) A' лежит между O и A ;
б) A лежит между O и A' .

Упражнение 5

Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией сами в себя?

Ответ: Да, прямые, проходящие через центр гомотетии.

Упражнение 6

Даны точки A , B и гомотетичные им точки A' , B' соответственно. Можно ли найти центр данной гомотетии?

Ответ: Да. Это точка пересечения прямых AA' и BB' .

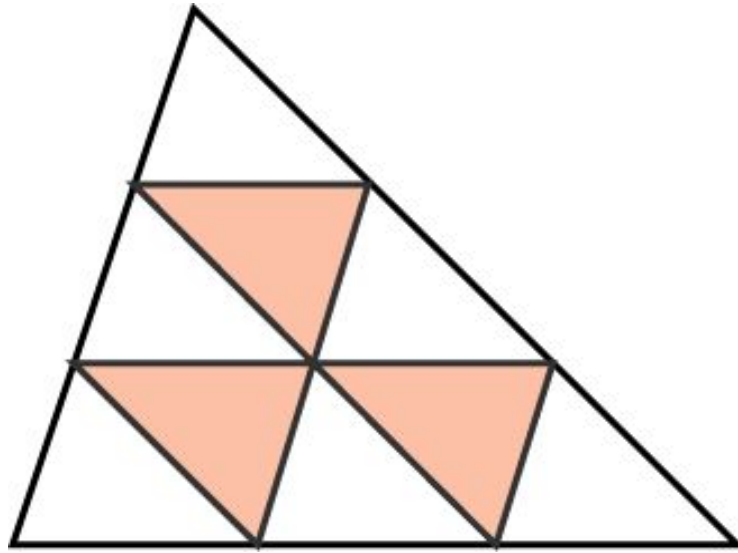
Упражнение 7

Как расположены две окружности друг относительно друга, если их центром гомотетии является: а) центр одной из окружностей; б) точка, принадлежащая одной из данных окружностей?

Ответ: а) Имеют общий центр;
б) касаются внутренним образом.

Упражнение 8

Каждая из сторон треугольника разделена на три равных отрезка и точки деления соединены отрезками. Найдите периметр образовавшейся при этом фигуры, если периметр исходного треугольника равен p .



Ответ: p .

Упражнение 9

Стороны четырехугольника равны 14 см, 21 см, 10 см и 42 см. Найдите стороны подобного ему четырехугольника, если известно, что его меньшая сторона равна 2 см.

Ответ: 2,8 см, 4,2 см, 2 см, 8,4 см.

Упражнение 10

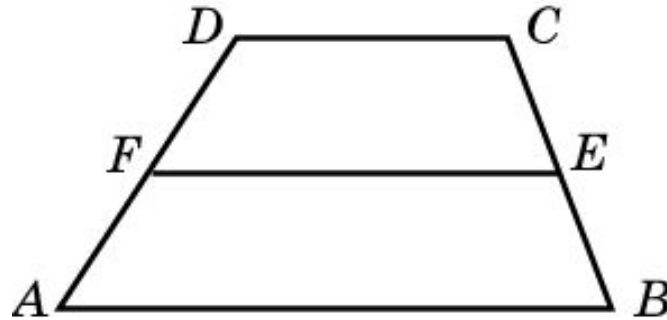
Подобны ли прямоугольники, образующие рамку картины, сделанной из дощечек одинаковой ширины?



Ответ: Нет.

Упражнение 11

Трапеция разделена средней линией на две трапеции. Будут ли они подобны?



Ответ: Нет.

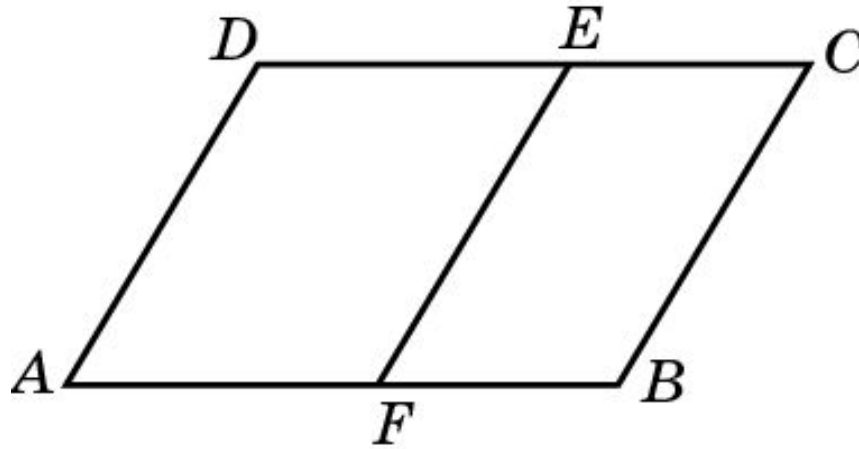
Упражнение 12

Какие условия должны выполняться, чтобы были подобны: а) два ромба; б) два параллелограмма; в) две равнобедренные трапеции?

Ответ: а) Равны соответствующие углы;
б) равны соответствующие углы и пропорциональны соответствующие стороны;
в) равны соответствующие углы и пропорциональны соответствующие стороны.

Упражнение 13

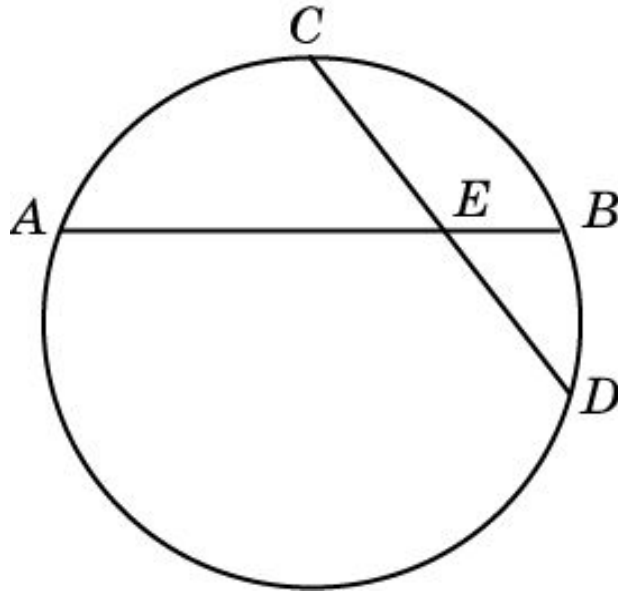
На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=a$, $BC=b$, от которого отсечен другой параллелограмм $F BCE$, подобный данному. Каким должен быть отрезок BF ?



Ответ: $\frac{b^2}{a}$.

Упражнение 14

Две хорды окружности пересекаются. Одна из них точкой пересечения делится на отрезки 2 см и 8 см, а другая пополам. Найдите вторую хорду.



Ответ: 8 см.

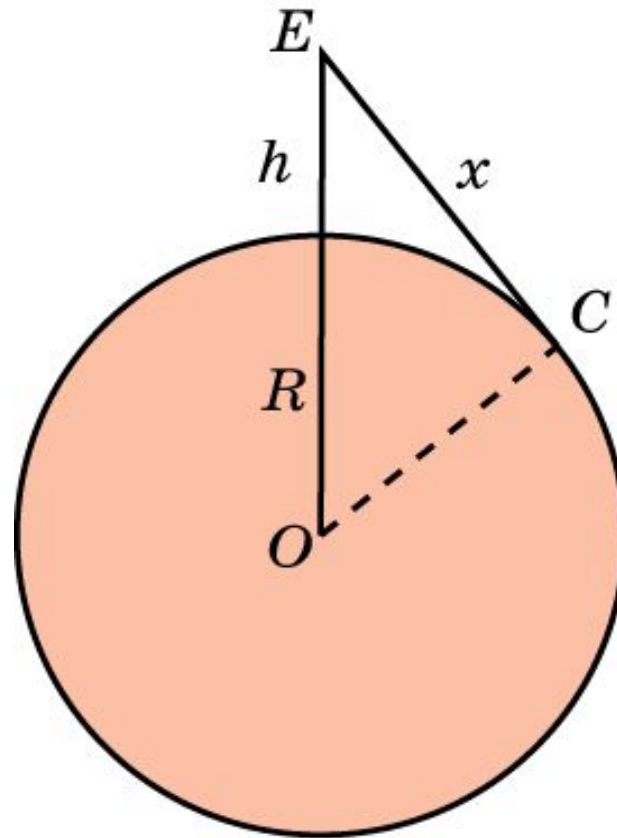
Упражнение 15

Подобны ли: а) любые две параболы; б) любые два эллипса; в) любые две гиперболы?

Ответ: а) Да;
б) нет;
в) нет.

Упражнение 16

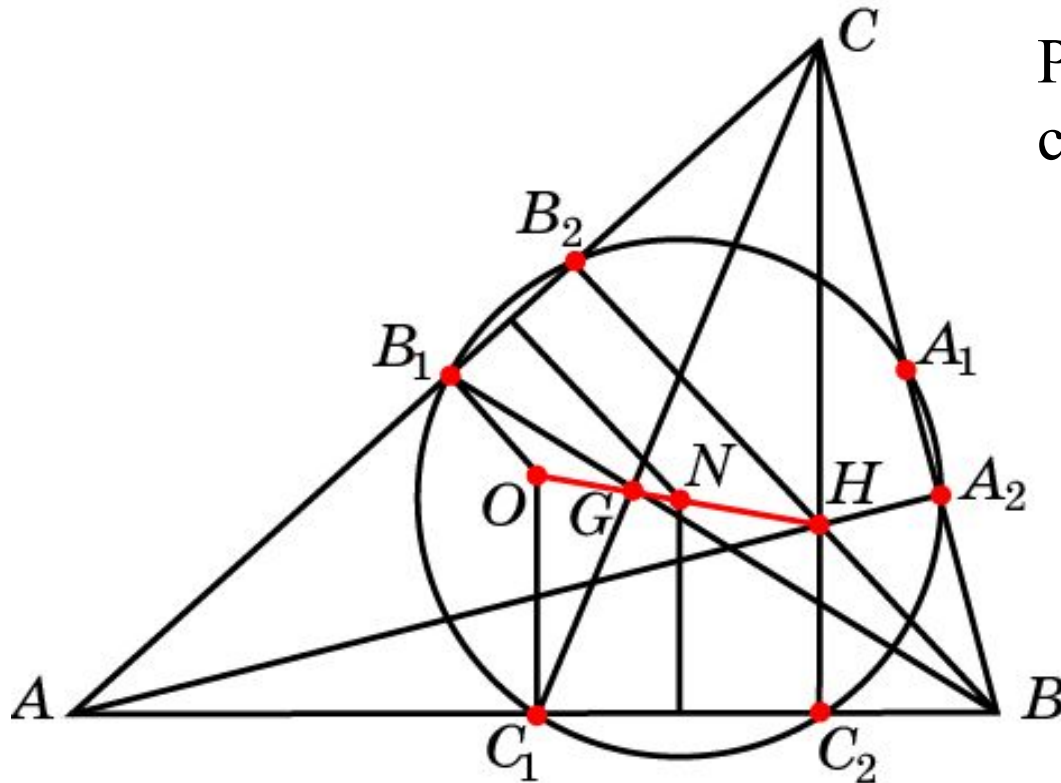
Как далеко видна поверхность Земли с самолета, летящего на высоте $h = 10$ км над Землей (радиус Земли R 6370 км)?



Ответ: $\sqrt{127500} \approx 357$ (км).

Упражнение 17*

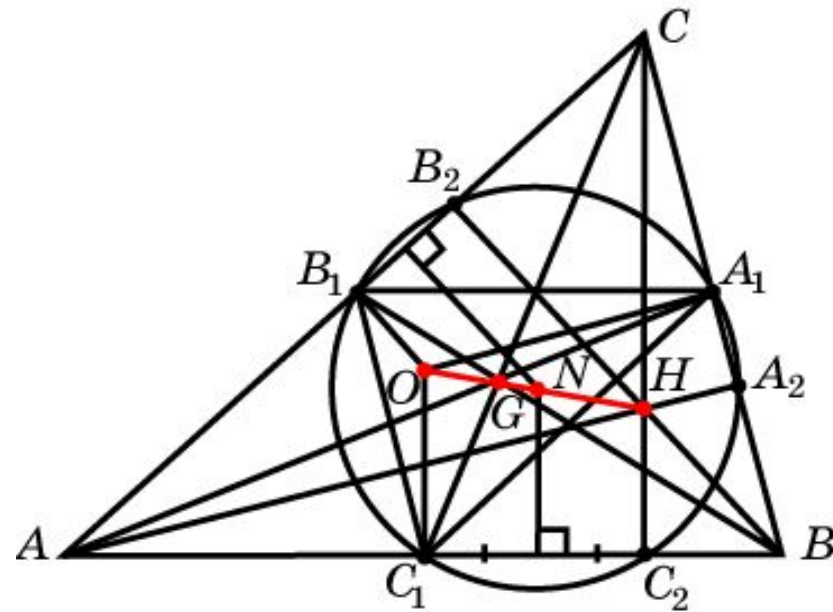
Используя гомотетию с центром в точке пересечения медиан (центроиде G) треугольника, докажите, что центр описанной окружности O , ортоцентр H , центроид G и центр окружности девяти точек N этого треугольника принадлежат одной прямой (**прямая Эйлера**). При этом точка N делит отрезок OH пополам, а точка G – в отношении 1:2.



Решение дано на следующем слайде.

Решение

Гомотетия с центром G и коэффициентом $-0,5$ переводит вершины A, B, C треугольника соответственно в основания медиан A_1, B_1, C_1 . Так как гомотетия сохраняет углы, то высоты треугольника ABC перейдут в высоты треугольника $A_1B_1C_1$, которые являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC . Следовательно, точка H перейдет в точку O и $OG:GH = 0,5$.



Серединный перпендикуляр к хорде C_1C_2 содержит диаметр окружности Эйлера и пересекает отрезок OH в его середине. Аналогично, серединный перпендикуляр к хорде B_1B_2 содержит диаметр окружности Эйлера и пересекает отрезок OH в его середине. Следовательно, середина отрезка OH является центром окружности Эйлера.

Упражнение 18*

Радиус окружности, описанной около
треугольника, равен 1. Найдите радиус
окружности Эйлера.

Ответ: 0,5.