

Производственные функции

ПФ

$$q = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- функциональная зависимость между количеством используемых в производстве ресурсов и объемом выпускаемой продукции

Гипотеза максимизирующего поведения производителя:

производитель из всего множества планов производства выбирает тот, который принесет ему максимальную прибыль.

Гипотезы

- Гипотеза Н1 (**гипотеза измеримости**): каждый ресурс является количественно измеримым.
- Гипотеза Н2 (**гипотеза однородности**): каждая точка пространства R^n может быть отождествлена с некоторым планом производства, (все ресурсы могут использоваться в количестве, измеряемом любым неотрицательным действительным числом).
- Гипотеза Н3 (**гипотеза однозначности**): при одинаковых затратах ресурсов производитель выпускает одно и то же количество продукции.

пространство ресурсов

- множество n -мерных векторов с неотрицательными координатами

$$R^{n+} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

- точки этого множества – планы производства по ресурсам.

Основные типы производственных функций

- Линейная
- Кобба-Дугласа
- Леонтьева
- ...

Поверхность (линия) уровня

– множество значений аргумента, в которых функция принимает одно и то же значение

Геометрически **линия уровня** (уровень) функции двух переменных - плоская кривая, получаемая при пересечении графика этой функции плоскостью, параллельной координатной плоскости XOY

$$Z=C, \text{ где } C=\text{const}$$

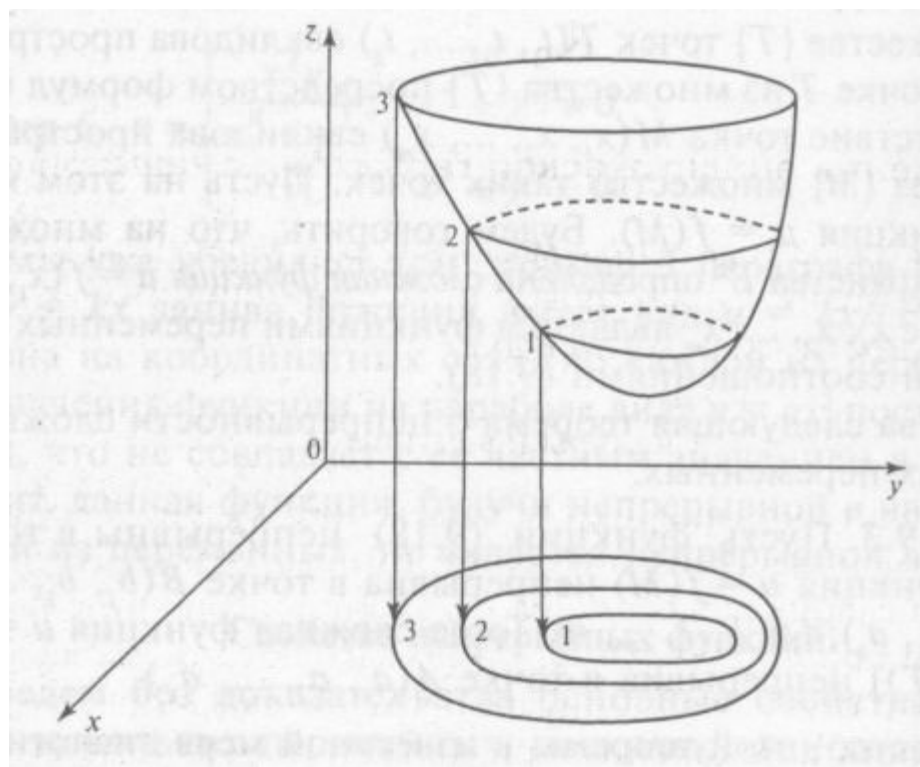
Изобразить поверхность на плоскости можно, проектируя линии уровня на плоскость XOY.

Семейство полученных кривых задается уравнениями вида

$$F(x,y)=C$$

Линии уровня

функции двух переменных



Частные производные

- Частная производная функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке по переменной x_k

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_k}$$

- обыкновенная производная функции одной переменной x_k при фиксированных значениях других переменных
- она характеризует скорость изменения ФНП в направлении данной координатной оси x_k при фиксированных значениях других координат.

Предельный продукт

- =предельная эффективность ресурса,
=предельная производительность
ресурса,

**=предельная отдача ресурса при
плане $x = (x_1, x_2)$**

$$MP_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$MP_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

$$\Delta f(x_1, x_2) \approx df(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1$$

$$\boxed{\Delta x_1 = 1} \Rightarrow MP_1 \approx \Delta q$$

средний продукт

- средний продукт первого ресурса
(средняя производительность ресурса,
средняя отдача ресурса)

$$AP_1 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = \frac{q}{x_1}$$

- отношение объема выпущенной
продукции к количеству затраченного
переменного ресурса

Производственная функция (ПФ) типа Кобба – Дугласа

$$Q = f(K, L) = a_0 K^a L^b,$$

где **Q** – объем производства,

$$a_0 > 0, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1$$

K – капитал, **L** – рабочая сила,

$$f(1,1) = a_0,$$

$$f(0, L) = f(K, 0) = 0.$$

Пример: ПФ небольшого цеха, изготавливающего рамы для картин, имеет вид:

$$q = f(x_1, x_2) = 4x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

где x_1 – отработанные человеко-часы,

x_2 – отработанные машино-часы,

q – число изготовленных рам.



Найти количество продукции при плане $x^* = (64, 81)$.

ПРИМЕР:

$$q = f(x_1, x_2) = 4x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

Вычислим частные производные ПФ, т.е. первый и второй предельный продукты (**предельную отдачу первого и второго ресурса**) для плана $x^*=(64, 81)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1^{-1/2} x_2^{1/4} \Big|_{(64,81)} = \frac{2 \times 81^{1/4}}{64^{1/2}} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^{1/2} x_2^{-3/4} \Big|_{(64,81)} = \frac{64^{1/2}}{81^{3/4}} = \frac{8}{27}.$$

- значение $3/4$ первого предельного продукта означает, что **при увеличении затрат первого ресурса на единицу** и неизменных затратах второго **выпуск продукции увеличится примерно на $3/4$ ед.**
- ▶ • Каков экономический смысл второго предельного продукта?

Уровень ПФ – **ИЗОКВАНТА**

- Построить изокванту, проходящую через точку x^*

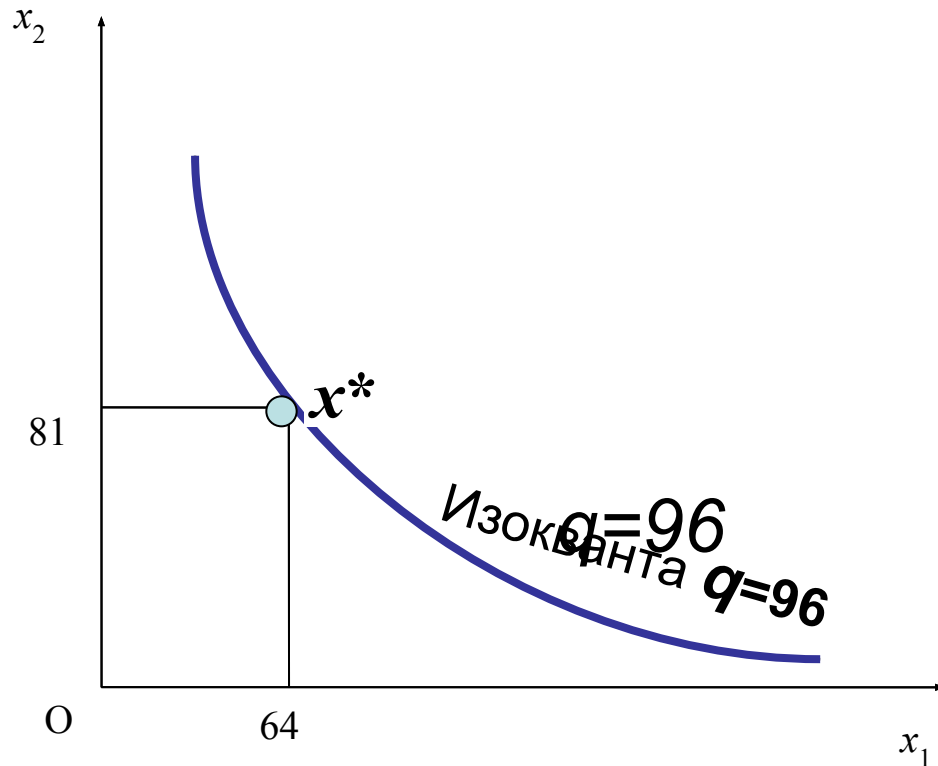
$$q = f(x^*) = 4 \cdot 64^{1/2} \cdot 81^{1/4} = 96$$

- затраты первого и второго ресурсов для всех планов производства, обеспечивающих выпуск 96 единиц продукции, связаны уравнением:

$$4x_1^{1/2} x_2^{1/4} = 96 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \frac{24^4}{x_1^2} = \frac{331776}{x_1^2}$$

- Графиком полученной функции в пространстве ресурсов является изокванта, соответствующая выпуску 96 единиц продукции

Изокванта производственной функции,
соответствующая выпуску 96 единиц
продукции – линия уровня ПФ



► Построить изокванты $q=60$, $q=80$ на том же рис.

Градиент

- Градиент ФНП в точке – вектор, координаты которого равны частным производным функции в этой точке

$$\text{grad } F = \nabla F(x) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} \right).$$

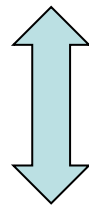
- Градиент указывает направление и величину максимальной скорости возрастания функции в точке

Свойства градиента

- Градиент функции в точке перпендикулярен (ортогонален) поверхности уровня, проходящей через данную точку.
- Если приращения аргумента достаточно малы, функция возрастает (убывает) только для тех из них, которые составляют острый (тупой) угол с градиентом
- Функция практически не меняется для приращений, ортогональных градиенту.
- Градиент ПФ называют **вектором предельного продукта**

Экономическая область ПФ

- область, в которой увеличение затрат любого ресурса не приводит к уменьшению выпуска продукции.
- План (x_1, x_2) лежит в экономической области ПФ



$$\left[\begin{array}{l} MP_1(x_1, x_2) \geq 0 \\ MP_2(x_1, x_2) \geq 0 \end{array} \right.$$

Закон убывающей отдачи ресурса

- если последовательное равномерное увеличение затрат этого ресурса при фиксированных значениях остальных приводит к последовательно уменьшающемуся приросту выпуска продукции.
- **Теорема.** Для того, чтобы в некоторой области выполнялся Закон убывающей отдачи ресурса, необходимо и достаточно, чтобы в этой области вторая частная производная ПФ по соответствующей переменной была отрицательна:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^2} < 0$$

Коэффициенты эластичности выпуска по затратам ресурсов

- определяются следующими формулами:

$$e_{x_1}(q) = \frac{x_1}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad e_{x_2}(q) = \frac{x_2}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

- Коэффициенты эластичности равны отношению предельной отдачи ресурса к средней отдаче ресурса:

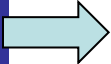
$$e_{x_i}(q) = \frac{MP_i}{AP_i}$$

- Экономический смысл:** коэффициент эластичности выпуска по затратам первого ресурса показывает, на сколько примерно процентов изменится выпуск продукции, если затраты первого ресурса увеличить на 1%.

Эффект масштаба

$q_0 = f(x_1, x_2)$ - объем выпускаемой продукции при плане (x_1, x_2) .

- При увеличении затрат ресурсов в k раз ($k > 1$) выпуск составит $q_1 = f(kx_1, kx_2)$

выпуск продукции увеличился	тоже в k раз $q_1 = kq_0$		постоянный
	более, чем в k раз $q_1 > kq_0$		возрастающий
	менее, чем в k раз $q_1 < kq_0$		убывающий

эффект от расширения
масштабов производства

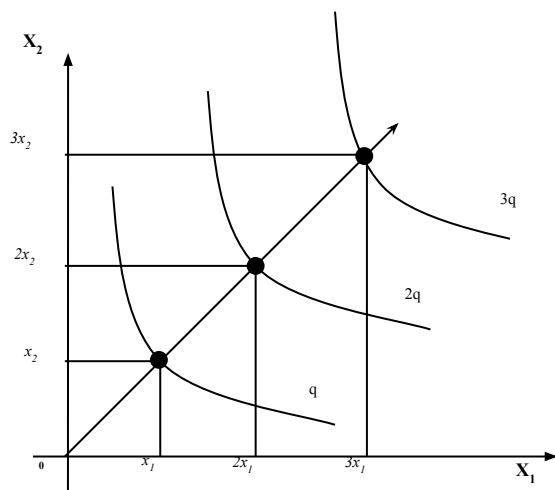
Однородные функции

- Функция нескольких переменных называется **однородной порядка m** , если для всех x из некоторой области X

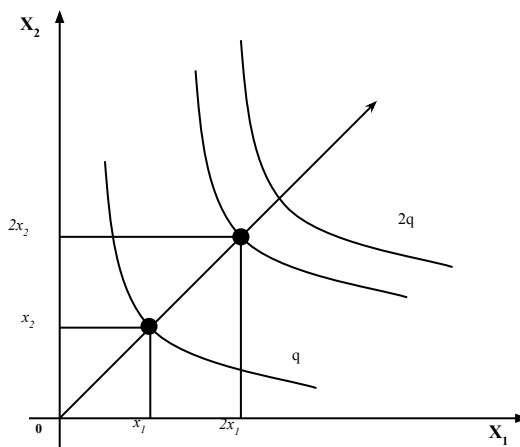
$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = k^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Если ПФ является **однородной порядка m** , то
 - при **$m=1$** ПФ обладает **постоянным**;
 - при **$m>1$** ПФ обладает **возрастающим** эффектом масштаба
 - при **$m<1$** ПФ обладает **убывающим**

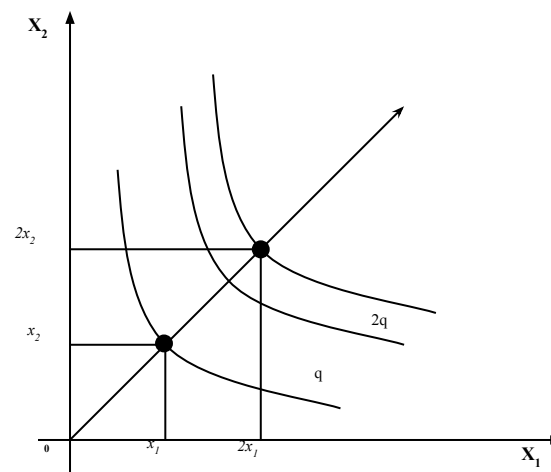
Эффект масштаба



постоянный



убывающий



возрастающий

Поиск точки равновесия производителя

Планирование производства



- Долговременное

Long-run

- возможны изменения всех ресурсов

- **Все ресурсы переменные**

- Эффект от расширения масштаба производства

- Кратковременное

short-run

- Есть ограничения на ресурсы

- **Ресурсы постоянные и переменные**

- Закон убывающей отдачи переменного ресурса

Приращение ФНП

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 непрерывные частные производные, то

по известным приращениям аргументов Δx , Δy ,
приблизленно вычислим

полное приращение функции

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

Дифференциал ФНП

полным дифференциалом функции называется линейная по приращениям аргументов часть приращения функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

$$\Delta x_i = dx_i$$

Замещение ресурсов

без изменения объёма выпуска

$$0 = \Delta q \approx \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

$$0 \approx MP_1(x_1, x_2) \Delta x_1 + MP_2(x_1, x_2) \Delta x_2$$

$$\Delta x_2 \approx - \frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)} \Delta x_1$$

Предельная норма технологического замещения второго ресурса первым

$$MRTS_{12}(x_1, x_2) = \frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)} \Big|_{q=const}$$

MRTS – marginal rate of technical substitution.

- **Экономический смысл предельной нормы замещения** - это примерное количество второго ресурса, которое можно сэкономить, увеличив затраты первого ресурса на 1 единицу, при этом объем выпуска не изменится.

$$MRTS_{12}(x_1, x_2) \approx -\Delta x_2$$

**Геометрический смысл
предельной нормы замещения
второго ресурса первым:**

$$MRTS_{12}(x_1, x_2)$$

численно равна тангенсу угла наклона касательной к изокванте в точке (x_1, x_2) , взятому с обратным знаком.

- *мы будем рассматривать **тангенс смежного острого угла**, поскольку тангенсы этих углов отличаются только знаком.*

Основные **свойства** $MRTS_{1,2}(x_1, x_2)$

$$MRTS_{12}(x_1, x_2)$$

численно равна тангенсу острого угла $tg\alpha$ наклона касательной к изокванте в точке (x_1, x_2) .

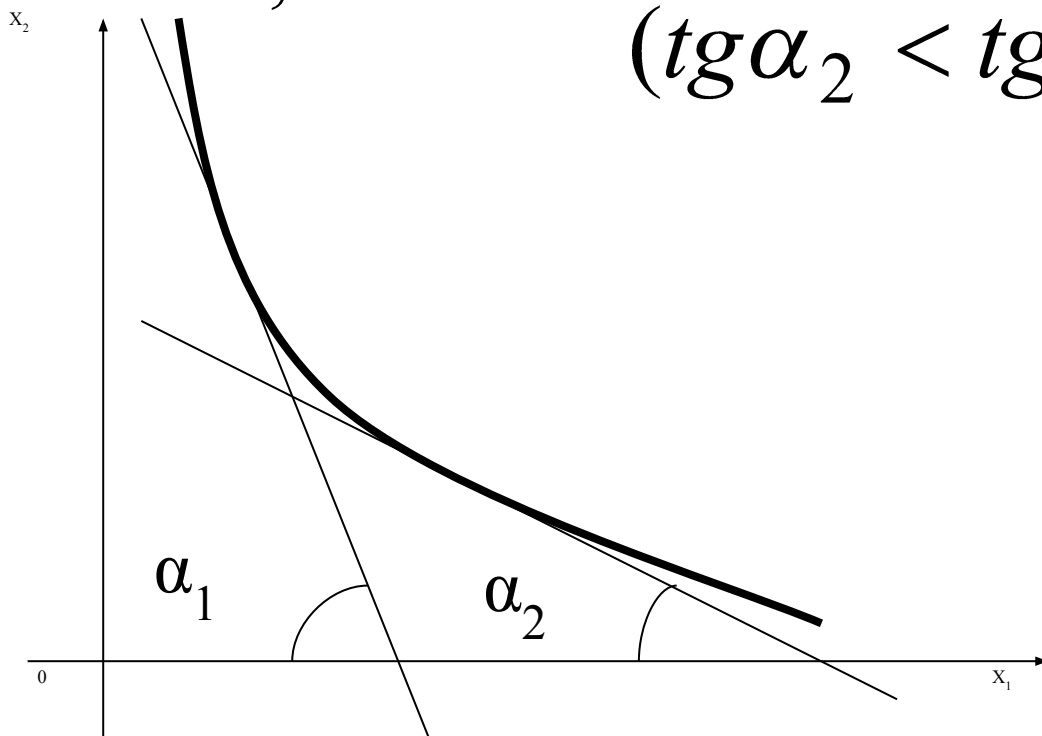
$$MRTS_{12}(x_1, x_2) \approx -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

$$\Delta x_2 \approx -MRTS_{12}(x_1, x_2)\Delta x_1$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + \Delta x_1; x_2 - MRTS_{12}(x_1, x_2)\Delta x_1) = const.$$

Закон убывания $MRTS_{1,2}$ у ПФ типа Кобба-Дугласа

$MRTS_{1,2}$ непрерывно убывает
($tg\alpha_2 < tg\alpha_1$)



возможна замещаемость ресурсов в определенных границах

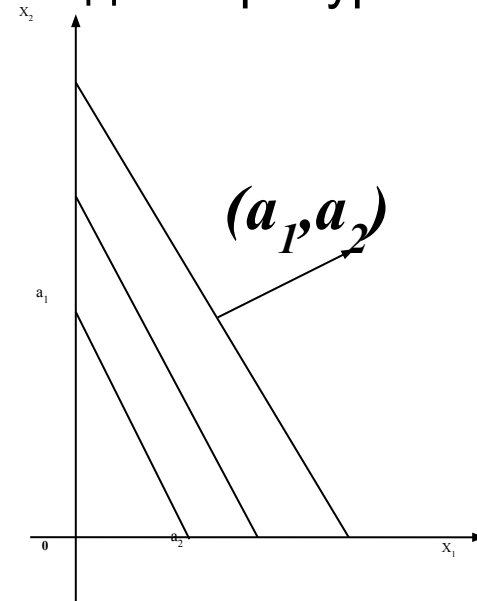
Линейная производственная функция

$$q = f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2,$$

- применяется при моделировании таких производственных процессов, где выпуск **однородной** продукции является результатом одновременного функционирования нескольких технологий,
- выпуск **линейно** зависит от затрат,
- **ресурсы полностью взаимозаменяемы**, т.е. для выпуска достаточно наличия хотя бы одного ресурса.

$$MRTS_{1,2} = \frac{a_1}{a_2};$$

$$MRTS_{2,1} = \frac{a_2}{a_1}$$



ПРИМЕРЫ применения линейной ПФ:

- производство однотипных деталей рабочими различных разрядов,
- выемка грунта рабочими или экскаваторами,
- выручка дистрибьюторов однородного товара,
- сегмент рынка, крупная отрасль,
- народное хозяйство в целом.

Ресурсы

переменные

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - план по затратам переменных ресурсов
- вектор $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ задает цены переменных ресурсов.
- Стоимость переменных ресурсов = **переменные издержки**

$$G(x) = W \cdot x$$

- общая стоимость затраченных ресурсов = **общие издержки**

$$C_0 + w \cdot x$$

постоянные

- стоимость затраченных постоянных ресурсов $C_0 =$
постоянные издержки,

Изокоста

- множество планов производства с одинаковыми переменными издержками
- Уравнение изокосты

$$G(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = c$$

- Семейство изокост на плоскости – множество отрезков параллельных прямых с нормалью $w = (w_1, w_2)$
- Угол наклона изокосты к оси Ox_1 определяется отношением цен на ресурсы:
 $\text{tg} \phi = - w_1 / w_2.$

Поиск оптимального плана – точки равновесия x^*

- выпуск **заданного** количества продукции q с **наименьшими** переменными **издержками**

$$G(x) = w \cdot x \rightarrow \min,$$

при условии

$$q(x) = \textit{const}$$

$$x \geq 0.$$

- выпуск **максимального** количества продукции при наличии бюджетного ограничения

$$q(x) \rightarrow \max$$

при условии

$$G(x) = w \cdot x = \textit{const}$$

$$x \geq 0.$$