



ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функции нескольких переменных, способы задания, определение, геометрический смысл.

Почти во всех зависимостях, имеющих место в природе, зависимые величины являются функциями двух, трех или нескольких переменных.

Примеры:

- 1) Объем идеального газа зависит от 2 величин – давления и температуры.
- 2) Объем кругового цилиндра есть функция от радиуса высоты $V = \pi R^2 H$.
- 3) Закон Ома $I = \frac{U}{R}$.
- 4) Объем параллелепипеда $V = a \cdot b \cdot c$.
- 5) Изучая физическое состояние какого-либо тела часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы: плотность, температура, электрический потенциал и др. Все эти величины функции от координат x, y, z точки. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется еще и время t . В этом случае имеем дело с функциями 4 переменных.

Если каждой паре $(x; y)$ значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y , из некоторой области их изменения D , соответствует определенное значение величины z , то переменная z называется **функцией двух независимых переменных**.

Обозначение: $z = f(x, y)$ или $z = F(x, y)$

x, y - независимые переменные (аргументы)

z - зависимая переменная (функция).

Если паре чисел $(x; y)$ соответствует одно значение z , то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Способы задания функции нескольких переменных

1. **Аналитический:**

$$\left. \begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{array} \right\} \text{функции заданы явно}$$

$$z^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ - функция задана не явно}$$

Здесь указан порядок действий, который надо проделать над аргументом, чтобы получить значение функции.

2. **Табличный:** Для функции двух переменных таблица с двойным входом.

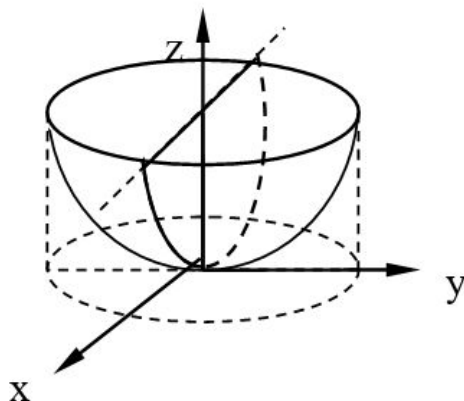
$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1					
y_2					
...					
y_n					

$y \backslash x$	1	2	3	4	5
3	3	6	9	12	15
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10

$$z = xy$$

3. **Графический:** График функции двух переменных представляет собой поверхность.

Проекция графика на координатную плоскость XOY есть область определения функции $z = f(x, y)$.



Областью определения функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется

множество всех пар (x, y) , для которых существует значение z . **Как найти область определения функции двух переменных?**

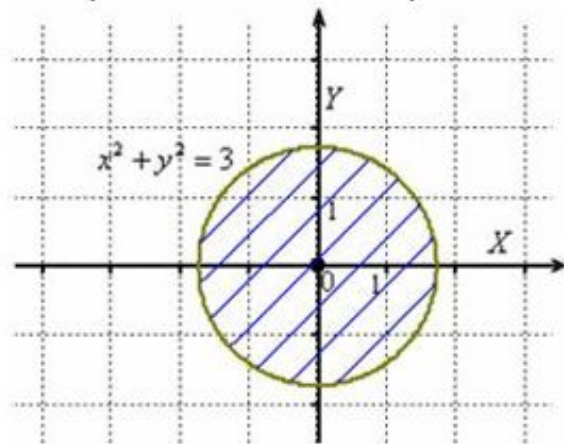
Рассматривая различные понятия функции нескольких переменных, полезно проводить аналогии с соответствующими понятиями функции одной переменной. В частности, при выяснении области определения $y = f(x)$ мы обращали особое внимание на те функции, в которых есть дроби, корни чётной степени, логарифмы и т. д. Здесь всё точно так же!

Пример 1: Найти область определения функции и изобразить её на чертеже $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 3$$

Изобразим область определения на чертеже:



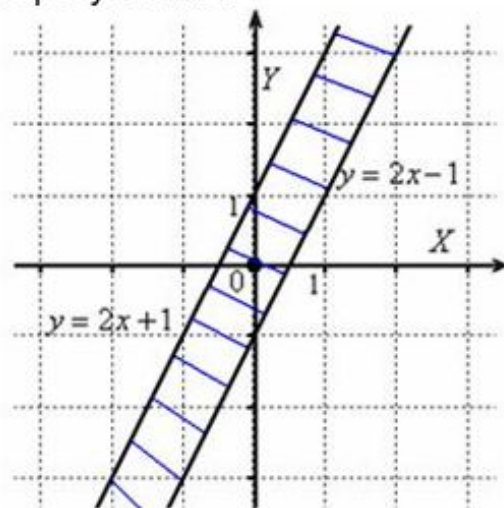
Ответ: $x^2 + y^2 \leq 3$ – круг с центром в начале координат, радиуса $\sqrt{3}$.

Пример 2. Найти область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$

Решение: аргумент арксинуса должен находиться в следующих пределах: $-1 \leq 2x - y \leq 1$

$$\begin{cases} -1 \leq 2x - y \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Система решается как обычно – строим прямые $y = 2x + 1$, $y = 2x - 1$ и находим нужные полуплоскости. В результате:



Обратите внимание, что здесь границы входят в область определения и прямые проводятся сплошными линиями.

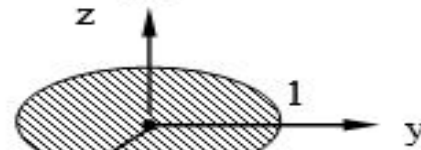
Ответ: область определения представляет собой решение системы $\begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$

Линия, ограничивающая область определения функции нескольких переменных называется ее *границей*. Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними точками области*. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой* или *незамкнутой*. Область, с присоединенной к ней границей называется *замкнутой*.

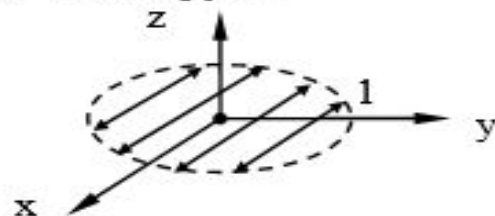
Примеры:

1. Для функции $z = x^2 + y^2$ точки могут занимать на плоскости любое положение, т.о. область определения функции вся плоскость XOY.

2. Для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, т.е. точки не могут выйти за границу области. Границей области определения функции с центром $C(0,0)$ и радиусом $R=1$. Т.о. область определения функции – круг с центром $C(0, 0)$ и $R=1$. Область вместе с границей – замкнутая область.



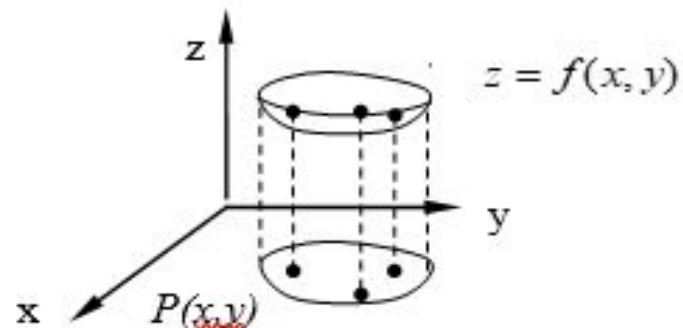
3. Для функции $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $x^2 + y^2 < 1$. Т.е. область определения функции только внутренняя часть круга



Область без границы – открытая область.

Геометрический смысл функций нескольких переменных

Геометрически функция двух переменных есть поверхность, а область определения функции есть проекция этой поверхности на плоскость XOY .



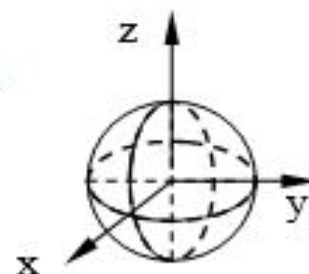
Функции трех и более переменных

$$u = u(x, y, z)$$

С геометрической точки зрения функцию трех переменных толковать нельзя, т.к. мы живем в трехмерном пространстве. Здесь лучше пользоваться аналитическим способом задания функции.

1. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

сфера

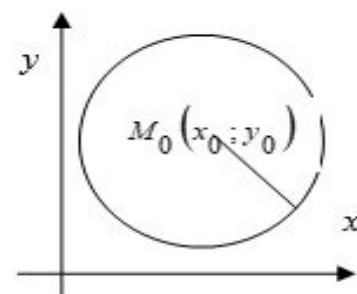


2. $u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$, $x^2 + y^2 - z^2 \neq 0$

Все точки пространства, кроме точек, лежащих на конической поверхности.

2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0; y_0)$ называется совокупность всех точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$.



Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдется такое число $r > 0$, что для всех точек (x, y) за исключением точки $M_0(x_0; y_0)$, для которых расстояние между точками M и M_0 , меньше r , выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

Пример 2.1:
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x \cdot y + 1} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \cdot y \cdot (\sqrt{x \cdot y + 1} + 1)}{x \cdot y + 1 - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{x \cdot y + 1} + 1) = 2$$

Пример 2.2:
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x \cdot y)}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x \cdot y) \cdot x}{x \cdot y} = 3$$

Функция предела не имеет, т.к. при различных значениях k предел будет меняться. Предел будет зависеть от пути по которому стремиться точка.

Функция $f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если предел функции при $M \rightarrow M_0$ равен значению функции в этой точке.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

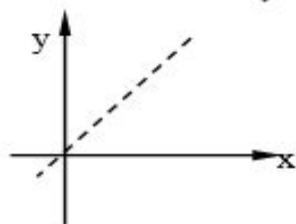
Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 , если она определена в этой точке и если для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r = r(\varepsilon)$, что как только $|MM_0| < r$ так

выполняется неравенство $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ $\begin{matrix} x - x_0 < r \\ y - y_0 < r \end{matrix}$ или $|MM_0| < r$.

Точки, в которых условие непрерывности не выполняются называются **точками разрыва**.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ точки разрыва будут образовывать линии, а для функции трех переменных $w = f(x, y, z)$ точки разрыва будут образовывать поверхности.

Пример 3.1: $z = \frac{x}{x-y} \quad x-y \neq 0$



Точки разрыва $x - y = 0$

$y = x$ - биссектриса первого и третьего координатных углов

Пример 3.2: $u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} \quad \begin{matrix} 1-x^2-y^2-z^2 > 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{matrix}$

Поверхностью разрыва будет сфера

Функция называется **непрерывной** в области, если она непрерывна в каждой ее точке.

3. Частные производные и дифференциалы первого порядка функции нескольких переменных.

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx , сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением z по x* и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y :

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0; y_0)$, $f'_x|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y :

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Примеры:

$$z = 2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1 \right)'_{y=\text{const}} = 10x^4 + 6xy - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1 \right)'_{x=\text{const}} = 3x^2 + 2y + 5.$$

Найти частные производные функции $u = z^{-xy}$

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (z^{-xy}) = z^{-xy} \cdot \ln z \cdot (-xy)'_x = -y \cdot z^{-xy} \cdot \ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (z^{-xy}) = z^{-xy} \cdot \ln z \cdot (-xy)'_y = -x \cdot z^{-xy} \cdot \ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (z^{-xy}) = -xy \cdot z^{-xy-1}.$$

Найти частные производные функции $u = y \sin x + \sin y$.

Решение

Частная производная функции u по независимой переменной x определяется слагаемым $u = y \sin x$. Производная второго слагаемого – $\sin y$ равна нулю, как производная от константы.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cos x$$

В свою очередь, частная производная функции u по независимой переменной y будет определяться обоими слагаемым:

$$(y \sin x)'_y = \sin x$$

$$(\sin y)'_y = \cos y$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$$

Ответ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$$

4. Полный дифференциал. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Если для функции $z = f(x, y)$ аргументу x дать приращение Δx , а y дать приращение Δy , получим для функции $z = f(x, y)$ приращение Δz , которое называется **полным приращением** функции и определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой в точке** (x, y) , если в этой точке полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \underbrace{A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y}_{\substack{\text{главная часть} \\ \text{приращения} \\ \text{функции}}} + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Главная часть приращения функции $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy , называется **полным дифференциалом функции**.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz.$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) . Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y); \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

Пример 2. Вычислить $(1,02)^{2,04}$

$$\begin{aligned} z = x^y & \quad x_0 + \Delta x = 1 + 0,002 & x_0 = 1 & \Delta x = 0,002 \\ & y_0 + \Delta y = 2 + 0,004 & y_0 = 2 & \Delta y = 0,004 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = 2 \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} = 0$$

$$f(x_0, y_0) = f(1, 2) = 1^2 = 1$$

$$(1,02)^{2,04} \approx 1 + 2 \cdot 0,002 + 0 \approx 1,004$$

□ Пример 1.

Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x \cdot y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x \cdot y} \cdot y = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x \cdot y} \cdot x = \frac{1}{y} \quad \text{значит} \quad dz = \frac{1}{x} \cdot dx + \frac{1}{y} \cdot dy$$

□ Пример 2.

Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

5. Дифференцирование сложной и неявной функции нескольких переменных.

1 случай

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, причем аргументы этой функции являются функциями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и функции $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

2 случай

Если $z = f(x, y)$, где $y = \phi(x)$, то *полная производная* от z по x находится по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

3 случай

Пусть дана функция двух переменных $z = f(u, v)$, причем аргументы этой функции являются функциями $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, то

$$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)] = F(x, y)$$

u, v - промежуточные переменные,

x, y - независимые переменные.

Частные производные по x и y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Пример 1. $z = e^{x^2+y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$. Найдите $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot (-\sin t) + e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot \cos t;$$

$$\frac{dz}{dt} = e \cdot 2 \cos t \cdot (-\sin t) + e \cdot 2 \sin t \cdot \cos t = 0.$$

Пример 2. $z = \ln(x^2 - y^2)$, $y = e^x$. Найдите $\frac{dz}{dx}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y); \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{-2y}{x^2 - y^2} \cdot e^x = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2}.$$

Пример.3. $z = \ln(u \cdot v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = \sin(x + y)$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{uv} \cdot v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{uv} \cdot u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos(x + y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u \cdot v} \cdot 2x + \frac{u}{u \cdot v} \cdot \cos(x + y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + \operatorname{ctg}(x + y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{u} + \frac{1}{v} \cdot \cos(x + y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \operatorname{ctg}(x + y)$$

6. Дифференцирование сложной и неявной функции нескольких переменных.

Производная неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ - дифференцируемая функция переменных x и y , вычисляется по формуле

$$y' = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \text{ при условии } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Частные производные неявной функции двух переменных $z = \phi(x, y)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ - дифференцируемая функция переменных x, y, z , вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \text{ при условии } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Пример 1. $y - \sin y = x$. Найдите y' .

$$F(x, y) = y - \sin y - x; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \cos y; \quad y' = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = \frac{1}{1 - \cos y}.$$

Пример 2. $z^3 = 3xyz$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$F(x, y, z) = z^3 - 3xyz; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -3yz; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = \frac{3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = \frac{3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

7. Производная в данном направлении. Градиент функции.

Пусть в некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$ и точка $M(x, y, z)$. Проведем из точки M вектор $\vec{s}$, направляющие косинусы которого $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$. На векторе $\vec{s}$, на расстоянии Δs от его начала рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$,
т.е. $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Будем предполагать, что функция $u = u(x, y, z)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в области D .

Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \rightarrow 0$ называется **производной от функции** $u = u(x, y, z)$ **в**
точке $M(x, y, z)$ **по направлению вектора** $\vec{s}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}$.

Для нахождения производной от функции $u = u(x, y, z)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$ используют

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} \cdot \cos \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} \cdot \cos \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} \cdot \cos \gamma,$$

формулу:
 где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$, которые вычисляются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|}, \quad \cos \beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|}, \quad \cos \gamma = \frac{s_z}{|\vec{s}|}.$$

Пусть в каждой точке некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$.
 Вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных этой функции в соответствующей точке, называется **градиентом функции** $u = u(x, y, z)$ и

обозначается $grad\, u$ или ∇u (читается «набла у»):

$$grad\, u \equiv \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

При этом говорят, что в области D определено векторное поле градиентов.

Для нахождения градиента функции $u = u(x, y, z)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ используют формулу:

$$(\text{grad } u)_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{M_0} \cdot \bar{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{M_0} \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{M_0} \cdot \bar{k}.$$

Свойства градиента

1. Производная в данной точке по направлению вектора $\bar{s}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\bar{s}$ совпадает с направлением градиента. Это наибольшее значение производной равно $|\text{grad } u|$.
2. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\text{grad } u$, равна нулю.

8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (10.8)$$

а *канонические уравнения нормали*, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (10.9)$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде: $F(x, y, z) = 0$, и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \quad (10.10)$$

а уравнение нормали —

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad \blacktriangleleft \quad (10.11)$$

9. Экстремум функции двух переменных.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если для всех точек $M(x, y)$, отличных от $M_0(x_0, y_0)$ и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)).$$

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется точкой экстремума функции.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x, y)$, то $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются стационарными или критическими. Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия экстремума.

Для того чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A < 0$ ($C < 0$) и точкой минимума при $A > 0$ ($C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть.

Отметим, что случай 3 требует дополнительных исследований.