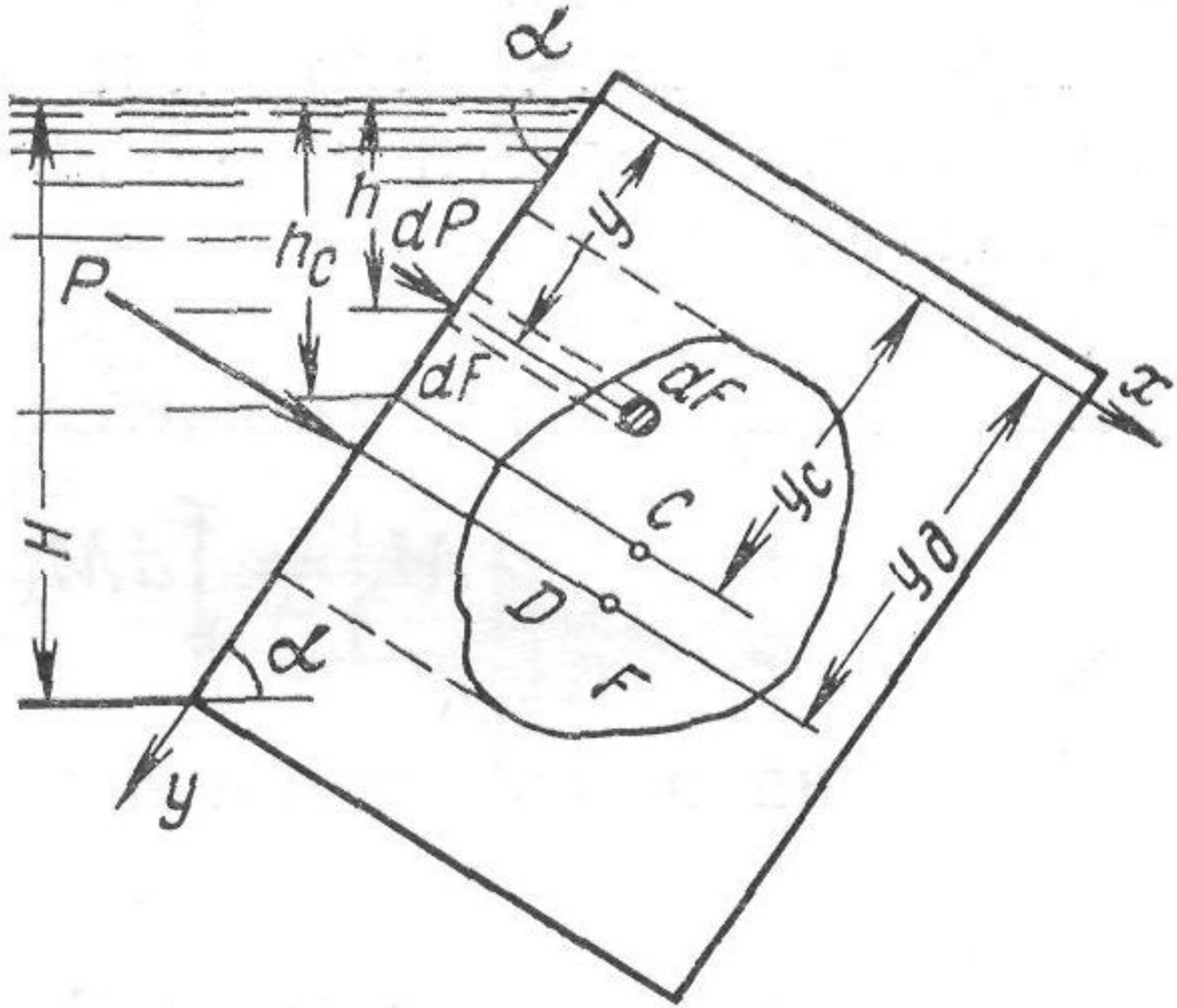
Сила давления жидкости на плоские и криволинейные стенки

Сила давления жидкости на плоскую стенку. Центр давления.


α
h
dP
h_C
P
y
dF
dF
x
y_C
C
y_D
H
D
α
F
y

Выделим на плоской боковой стенке сосуда, наклоненной в общем случае к горизонту под углом α, произвольную фигуру площадью F и определим действующую на нее со стороны жидкости силу давления P.

$$y = \frac{h}{\sin\ \alpha}$$

Для наглядности совместим рассматриваемую стенку с плоскостью чертежа (т.е. повернем ее на 90^0 вокруг оси y).

Так как давление жидкости в различных по высоте точках площади F разное, то выделим на этой площади элементарную площадку dF, находящуюся на расстоянии h от свободной поверхности жидкости или

от оси x.

$$p = \rho g h = \rho g y \sin\alpha$$

Для такой бесконечно малой площади давление во всех ее точках одинаково и равно

* Следовательно, сила давления жидкости на элементарную площадку будет

$$dP = pdF = \rho\, g\, y \sin\alpha\, dF$$

* Сила давления на всю рассматриваемую площадь F

$$P = \int_F dP = \int_F \rho g y \sin\alpha dF = \rho g \sin\alpha \int_F y dF$$

* Выражение $\int_F y dF$
* представляет собой статический момент рассматриваемой площади относительно оси x, который равен произведению площади $y_c F$ этой фигуры F на расстояние от ее центра тяжести до оси x, т.е.

$$P = \rho g \sin\alpha\, y_c F$$

* Таким образом,

$$y_c \sin\alpha = h_c$$

* или, заменяя

получим $$P = \rho g h_c F = p_c F$$

- В ряде случаев, кроме значения силы давления жидкости на стенку, необходимо знать координаты точки ее приложения – центра давления.
- Предположим, что сила давления P приложена в точке D, находящейся от оси x на расстоянии y_d. В соответствии с теоремой Вариньона о моменте равнодействующей (момент равнодействующей силы относительно какой-либо оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси)

$$M_x = \int_F dM_x \qquad\qquad P y_d = \int_F y dP$$

- Заменив в последнем выражении *P* и *dP* их значениями, получим

$$\rho g \sin\alpha \; y_c F y_d = \int_F \rho g y \sin\alpha \cdot dF \cdot y$$

Вынесем постоянные за знак интеграла и сократим их с аналогичными величинами в левой части уравнения

$$y_c F y_d = \int_F y^2 dF$$

Выражение
$$J_x = \int_F y^2 dF$$

представляет собой момент инерции площади фигуры относительно оси х, который может быть выражен через момент инерции относительно центральной оси, параллельной оси х, следующим образом

$$J_x = J_0 + y_c^2 F$$

Тогда
$$y_c F y_d = y_c^2 F + J_0$$

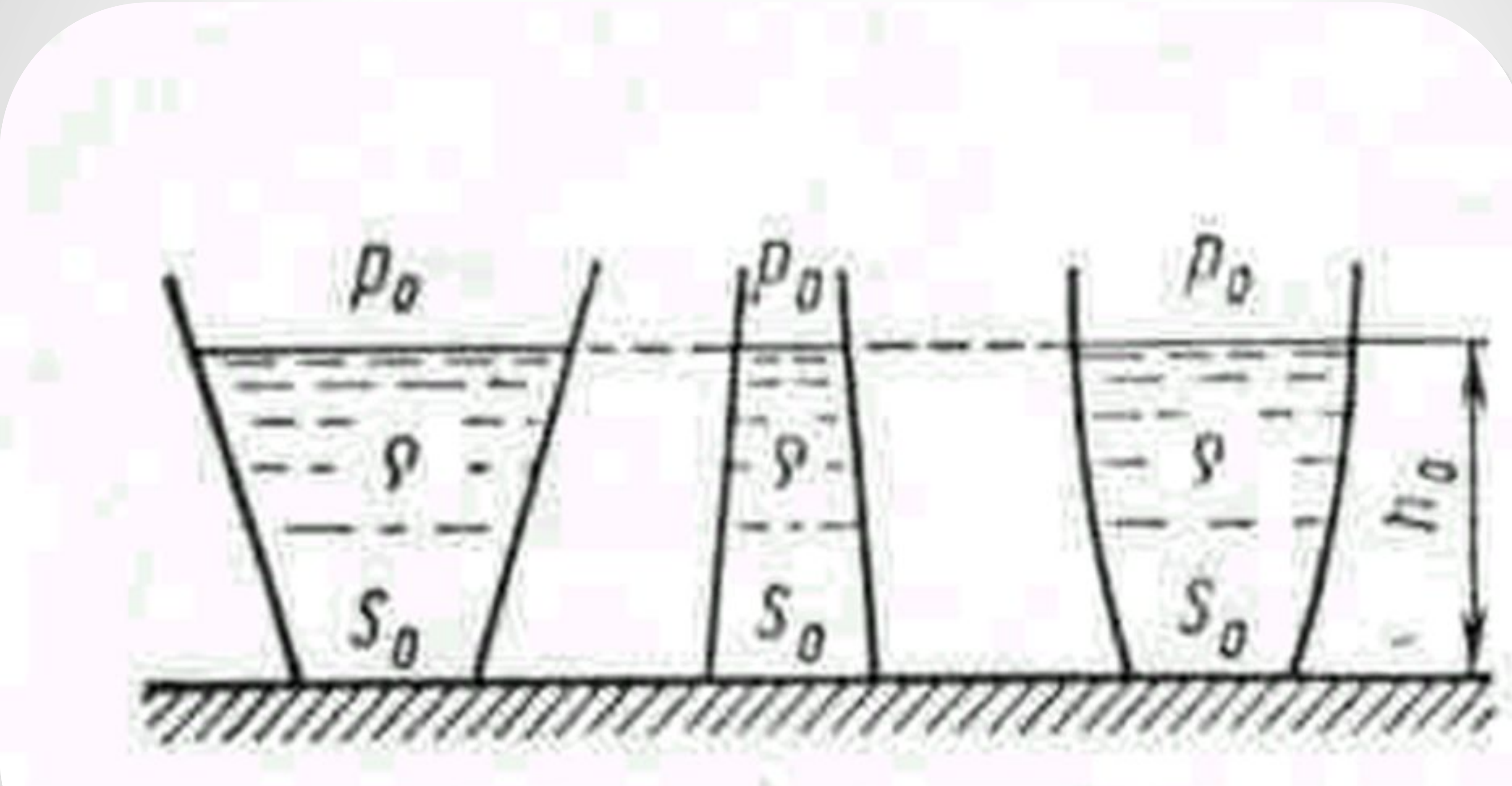
Откуда
$$y_d = y_c + \frac{J_0}{y_c F}$$

- Из последнего уравнения видно, что центр давления для плоской стенки находится всегда ниже ее центра тяжести.
- Горизонтальная координата центра давления x_d находится на оси симметрии площади фигуры. В частном случае, когда $\alpha = 0$, т.е. для горизонтального дна сосуда, расстояние от свободной поверхности до центра тяжести площади будет равно высоте жидкости в сосуде H, поэтому сила давления жидкости на дно сосуда

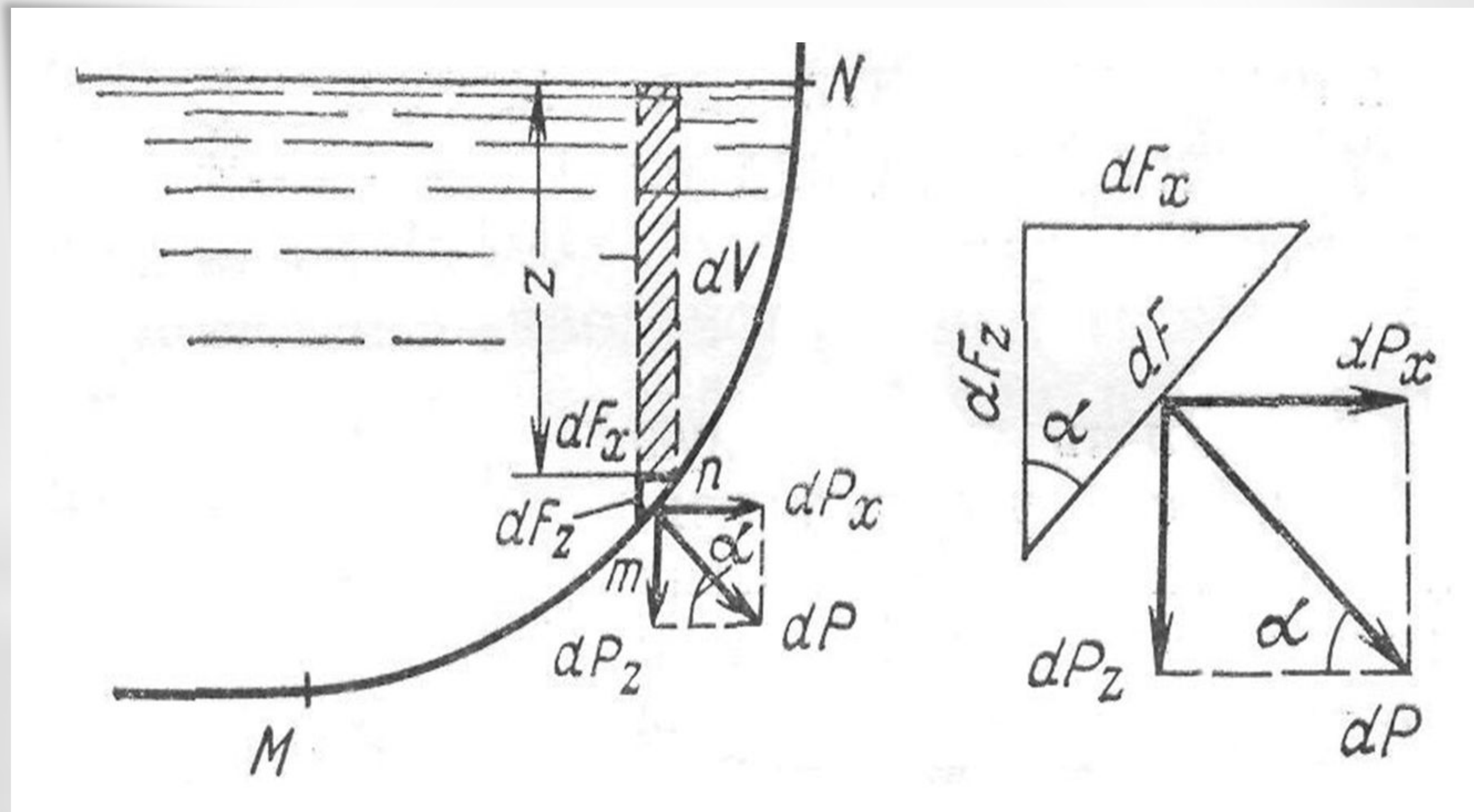
$$P = \rho g H F$$

- Из этого выражения видно, что различные по форме сосуды, имеющие одинаковые площади доньев и заполненные одинаковой жидкостью на одну и ту же высоту, будут иметь одинаковую силу давления на дно независимо от формы сосуда и количества находящейся в нем жидкости (гидростатический парадокс). Центр давления для дна сосуда совпадает с центром тяжести площади.

Гидростатический парадокс



Сила давления жидкости на криволинейную стенку. Тело давления



При криволинейной стенке определить значение, направление и точку приложения силы давления жидкости сложнее, так как элементарные силы давления, действующие нормально на каждую элементарную площадку стенки, имеют разные направления. В этом случае, чтобы избежать интегрирования по криволинейной поверхности, определяют составляющие силы давления по заданным направлениям, по осям координат x, y, z, а затем находят результирующую силу давления

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

В технике используются в основном сосуды с криволинейными стенками, представляющими собой поверхности вращения (сферу, цилиндр, конус и т.д.) и осями симметрии, лежащими в плоскостях, нормальных к стенкам, что существенно упрощает задачу определения силы давления жидкости.
Определим силу давления жидкости на криволинейную стенку цилиндрической формы, след которой – линия MN.

Выделим на криволинейной стенке элементарную площадку dF(след которой - mn), находящуюся на расстоянии z от свободной поверхности.
Сила давления жидкости на эту элементарную площадку

$$dP = pdF = \rho gzdF$$

Разложим на две составляющие взаимноперпендикулярные:
– горизонтальную

$$dP_x = dP\cos\alpha$$

- вертикальную $$dP_z = dP\sin\alpha$$

Просуммируем отдельно все горизонтальные и вертикальные составляющие. Так как размеры элементарной площадки несоизмеримо малы, предположим, что она – плоская. Тогда проекции ее на горизонтальную и вертикальную плоскости:

$$dF_x = dF\sin\alpha$$

$$dF_z = dF\cos\alpha$$

$$dP_x = dP\cos\alpha = \rho gz\,dF\,\cos\alpha = \rho gzdF_z$$

$$P_x = \int_{F_z} dP_x = \int_{F_z} \rho gzdF_z = \rho g\int_{F_z} zdF_z$$

$$\int_{F_z} zdF_z = \mathrm{S}_z = h_c F_z$$

- Тогда $$P_x = \rho g h_c F_z$$
- Таким образом, горизонтальная составляющая силы давления жидкости на криволинейную стенку равна силе давления жидкости на ее вертикальную проекцию.
- Вертикальную составляющую силы давления жидкости на криволинейную P_z , которая представляет собой сумму всех элементарных вертикальных составляющих dP_z.

$$dP_z = dP \sin\alpha = \rho g z dF \sin\alpha = \rho g z dF_x = \rho g dV$$

- \- $dV = z dF_x$
- элементарный объем жидкости, основанием которого является площадка dF_x, а высотой – расстояние z от этой площадки до свободной поверхности жидкости. Интегрируя dP_z по всему объему V, получим

$$P_z = \int_v dP_z = \int_v \rho g dV = \rho g \int_v dV$$

или

$$P_z = \rho g V$$

Таким образом, вертикальная составляющая силы давления жидкости на криволинейную стенку равна силе тяжести жидкости в объеме V, называемом телом давления. Результирующая сила давления жидкости на криволинейную стенку цилиндрической формы равна геометрической сумме составляющих

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

и направлена под углом α к горизонту

$$\alpha = arctg\frac{P_z}{P_x} = \arcsin\frac{P_z}{P}$$

- Тело давления – это объем жидкости, ограниченный рассматриваемой криволинейной стенкой, смоченной жидкостью, а также вертикальной цилиндрической поверхностью, проведенной через контур этой стенки, и горизонтальной плоскостью, проведенной по свободной поверхности жидкости.
- Тело давления условно считается реальным, если его объем, прилегающий к стенке, заполнен жидкостью; составляющая P_z при этом направлена вниз. Тело давления условно считается фиктивным, если его объем, прилегающий к стенке, не заполнен жидкостью; составляющая P_z при этом направлена вверх.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Основная литература

1. Башта Т.М. и др. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы. – М: Машиностроение, 1991.
2. Б.Т. Емцев «Техническая гидромеханика» - М.: Машиностроение, 1997. – 460с.
3. В.Г. Гейер, В.С. Дулин и др. «Гидравлика и гидропривод» - М.: Недра, 1981. – 301с.
4. Б.Е. Калмухамбетов «Гидромеханика» (электронный учебник) – Алматы.: КазНТУ, 2002. – 116 с.
5. Калмухамбетов Б.Е., Муратова С.К. Общая гидравлика: Конспект лекций. – Алматы: НИЦ КОУ, 2008. – 56.

Дополнительная литература

6. Б.Б. Некрасов (под редакции) «Задачник по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам» - М.: Высш. шк., 1998. – 245с.
7. Калмухамбетов Б.Е. Гидромеханика в бурении: Методические указания к практическим занятиям. – Алматы: НИЦ КОУ, 2008. – 40с.
8. Калмухамбетов Б.Е., Муратова С.К. Общая гидравлика: Методические указания к практическим занятиям. – Алматы: НИЦ КОУ, 2008. – 36.