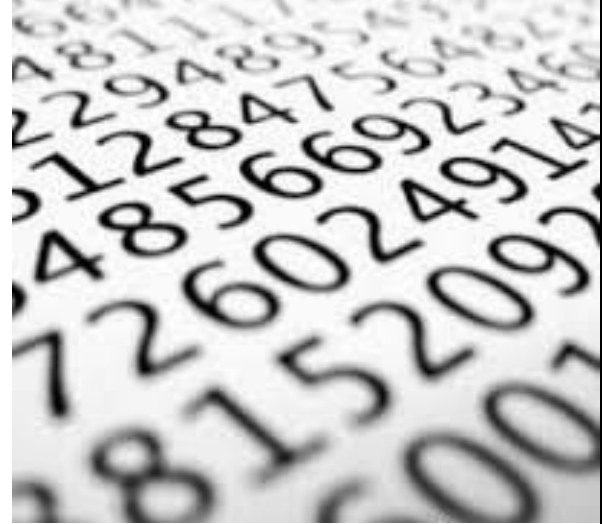


ЕГЭ 2016

ЗАДАНИЕ 16 (ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ, ВРЕМЯ – 2 МИН)

ТЕМА: КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.



Вишневская М.П.
МАОУ «Гимназия №3» Фрунзенского района г. Саратова
mpvish55@gmail.com
По материалам сайта <http://kpolyakov.spb.ru>

ДЕМО ВЕРСИИ 2014, 2015, 2016

В7 Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись десятичного числа 30 имеет ровно три значащих разряда.

16 Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения:
 $4^{2014} + 2^{2015} - 8$?

Ответ: _____.

16 Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 - 9$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Ответ: _____.

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

- принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления;
- правила перевода из 10-ной в любую другую с.с. и соотношение между 2-ной, 8-ной и 16-ной с.с. ;
- чтобы перевести число 12345_N , из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на N в степени, равной ее разряду:

4 3 2 1 0 ← разряды

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5_N = 1 \cdot N^4 + 2 \cdot N^3 + 3 \cdot N^2 + 4 \cdot N^1 + 5 \cdot N^0$$

- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N – это остаток от деления этого числа на N
- две последние цифры – это остаток от деления на N^2 , и т.д.
- двоичная арифметика (сложение, вычитание, умножение)

Этого было достаточно для решения задач до 2015 года!

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

- число 2^N в двоичной системе записывается как единица и N нулей:

$$2^N = \underbrace{1000\dots0}_N_2$$

- число $2^N - 1$ в двоичной системе записывается как N единиц:

$$2^N - 1 = \underbrace{11\dots1}_N_2$$

- число $2^N - 2^K$ при $K < N$ в двоичной системе записывается как N-K единиц и K нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{11\dots1}_{N-K} \underbrace{100\dots00}_K_2$$

- $2^N + 2^N = 2 * 2^N = 2^{N+1}$
 $2^N = 2^{N+1} - 2^N$
 $- 2^N = - 2^{N+1} + 2^N$

ЛЕГЧЕ ОБЪЯСНИТЬ:

- число 10^N в десятичной (более привычной!) системе записывается как единица и N нулей:

$$10^N = \underbrace{10000 \dots 0}_{N}_{10} \quad \text{Пример: } 10^4 = 10000$$

- число $10^N - 1$ в десятичной системе записывается как N девяток (!):

$$10^N - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{N}_{10} \quad \text{Пример: } 10^4 - 1 = 9999$$

- число $10^N - 10^K$ при $K < N$ в десятичной системе записывается как N-K девяток и K нулей:

$$10^N - 10^K = \underbrace{99 \dots 9}_{N-K} \underbrace{00 \dots 0}_K_{10} \quad \text{Пример: } 10^5 - 10^2 = 100000$$

$$\begin{array}{c} \overline{100} \\ 99900 \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ 5-2=3 \quad 2 \end{array}$$

ПЕРЕХОД К ДРУГИМ С.С.:

- число 3^N в троичной системе записывается как единица и N нулей:

$$3^N = \underbrace{10000\dots0}_N_3$$

- число $3^N - 1$ в троичной системе записывается как N двоек:

$$3^N - 1 = \underbrace{222\dots2}_N_3$$

- число $3^N - 3^K$ при $K < N$ в троичной системе записывается как N-K двоек и K нулей:

$$3^N - 3^K = \underbrace{222\dots2}_{N-K} \underbrace{00\dots0}_K_3$$

ОБЩАЯ СХЕМА:

- число a^N в с.с. с основанием a записывается как единица и N нулей:

$$a^N = \underbrace{1000\dots0}_N a$$

- число $a^N - 1$ в с.с. с основанием a записывается как N раз $(a-1)$:

$$a^N - 1 = \underbrace{(a-1)(a-1)\dots(a-1)}_N a$$

- число $a^N - a^K$ при $K < N$ в с.с. с основанием a записывается как $N-K$ $(a-1)$ и K нулей:

$$a^N - a^K = \underbrace{(a-1)(a-1)\dots(a-1)}_{N-K} \underbrace{00\dots00}_K a$$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько значащих нулей содержится в двоичной записи числа, которое можно представить в виде

$$8^{510} + 4^{1500} - 16 ?$$

Алгоритм:

- Все переводим в степени двойки;
- **NB!** Как представить 16?
- Выстраиваем всю запись по возрастанию степени (!!!);

$$2^{3000} + 2^{1530} - 2^4 =$$

$$2^{3000} = 100000\dots000 \text{ (1 и 3000 нулей)}$$

$$2^{1534} - 2^4 = 11111\dots1111 \text{ 0000 (1530 единиц и 4 нуля)}$$

Получаем в результате сложения: $100000\dots000 \overbrace{11111\dots1111}^{1530 \text{ единиц}} 0000$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Нулей: } 3000 - 1530 + 4 = 1474}$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

- Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{1023} + 2^{1024} - 3$?

$$3 = 4 - 1, 2^{3069} + 2^{1024} - 2^2 + 2^0 \quad !!! \text{ Избегать большого количества «-»}$$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2016} + 2^{2018} - 6$?

$$6 = 8 - 2, 2^{4032} + 2^{2018} - 2^3 + 2^1$$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2014} + 2^{2015} - 9$?

$$2^{4028} + 2^{2015} - 1001_2$$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2015} + 2^{2015} - 15$?

$$15 = 16 - 1, 2^{4030} + 2^{2015} - 2^4 + 2^0$$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{2014} - 2^{614} + 45$?

$$45 = 101101_2, 2^{6042} - 2^{614} + 101101_2$$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{1014} - 2^{530} - 12$?

$$12 = 1100_2, 2^{3042} - 2^{530} - 1100_2$$

ОТВЕТЫ:

1	1024
2	2017
3	2015
4	2013
5	5432
6	3038

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько единиц в двоичной записи числа $2^{2014} - 4^{650} - 38$?

$$\begin{aligned} 2^{2014} - 4^{650} - 38 &= 2^{2014} - (2^2)^{650} - 2^5 - 2^2 - 2^1 = \\ &= 2^{2014} - 2^{1300} - 2^5 - 2^2 - 2^1 = \\ &= \underbrace{2^{2014} - 2^{1301}}_{\substack{713 \text{ единиц,} \\ 1301 \text{ нуль}}} + \underbrace{2^{1300} - 2^6}_{\substack{1294 \text{ единиц,} \\ 6 \text{ нулей}}} + \underbrace{2^5 - 2^3}_{\substack{2 \text{ единицы,} \\ 3 \text{ нуля}}} + \underbrace{2^2 - 2^1}_{\substack{1 \text{ единица,} \\ 1 \text{ нуль}}} \end{aligned}$$

Итого: $713 + 1294 + 2 + 1 = 2010$

Использование $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 - 2$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

$$9^8 + 3^5 - 2 = 3^{16} + 3^5 - 3^1 + 3^0$$

$2 = 3 - 1$ 1 единица, 16 нулей 4 двойки, 1 нуль 1 единица

Итого: 4

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Значение арифметического выражения: $5 \cdot 36^7 + 6^{10} - 36$ записали в системе счисления с основанием 6. Сколько цифр «5» содержится в этой записи?

$$5 * 36^7 + 6^{10} - 36 = (6 - 1) * 6^{14} + 6^{10} - 6^2 =$$

$$= \underbrace{6^{15} - 6^{14}}_{\substack{1 \text{ пятерка,} \\ 14 \text{ нулей}}} + \underbrace{6^{10} - 6^2}_{\substack{8 \text{ пятерок,} \\ 2 \text{ нуля}}}$$

Итого: $8 + 1 = 9$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Какая первая цифра в шестнадцатеричной записи числа $2^{379}+2^{378}+2^{377}$?

$$\underbrace{2^{379}}_{\substack{1 \text{ единица,} \\ 379 \text{ нулей}}} + \underbrace{2^{378}}_{\substack{1 \text{ единица,} \\ 378 \text{ нулей}}} + \underbrace{2^{377}}_{\substack{1 \text{ единица,} \\ 377 \text{ нулей}}}$$

$\overbrace{11100000}^{\text{3 единицы, 377 нулей}} \dots \overbrace{0000}^{\text{3 единицы, 377 нулей}}_2$ переводим в 16 с.с. с помощью тетрад: $377:4 = 94$ и 1 «0» в остатке

Итого: $1110_2 = E_{16}$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько единиц в двоичной записи числа $(2^{4400} - 1) \cdot (4^{2200} + 2)$?

$$(2^{4400} - 1) * (4^{2200} + 2) = (2^{4400} - 1) * (2^{4400} + 2) =$$

$$= \underbrace{2^{8800}} + \underbrace{2^{4401} - 2^{4400}} - \underbrace{2^1}$$

1 единица,
8800 нулей

1 единица,
4400 нулей

1 единица,
1 ноль

2^{4400}

-

$2^1 = 1111111 \dots 11110$

4399

Итого: 1 + 4399 = 4400

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько единиц в двоичной записи числа $(2^{4400} - 1) \cdot (4^{2200} + 2)$?

$$(2^{4400} - 1) * (4^{2200} + 2) = (2^{4400} - 1) * (2^{4400} + 2) = \\ = \underbrace{11111\dots1111}_{4400 \text{ единиц}} * 100000\dots010$$

$$\begin{array}{r} \times 1111 \\ 1010 \\ \hline + 1111 \\ 1111 \\ \hline 1001011 \end{array}$$

Количество единиц не меняется!

Итого: **4400**

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Некоторое число X из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8, 4. Часть символов при записи утеряна.

Позиции утерянных символов обозначены знаком *:

$$X = *7*_{16} = 5*6_8 = ***1*_4$$

Определите число X .

Представим все числа в 2 с.с.

$$\begin{array}{r} *7*_{16} = * * * * 0111 * * * * \\ 5*6_8 = 101 * * * 11 0_2 \\ ***1*_4 = * * * * * 01 * * \\ \hline 101110110_2 \end{array}$$

$$\text{Итого: } 101110110_2 = 374$$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Некоторое число X из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены *:

$$X = *5_{16} = *0*_8.$$

Сколько чисел соответствуют условию задачи?

Представим все числа в 2 с.с.

$$\begin{array}{l} *5_{16} = \quad * \quad * \quad * \quad * 01 \quad 01_2 \\ *0*_8 = * \quad * \quad * \quad 000 \quad * \quad * \quad *_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overbrace{* \quad *} \quad 000101_2 \\ \cancel{00} \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}$$

Итого: 3