

ТРИГОНОМЕТРИ

Я **УРОК** **1**



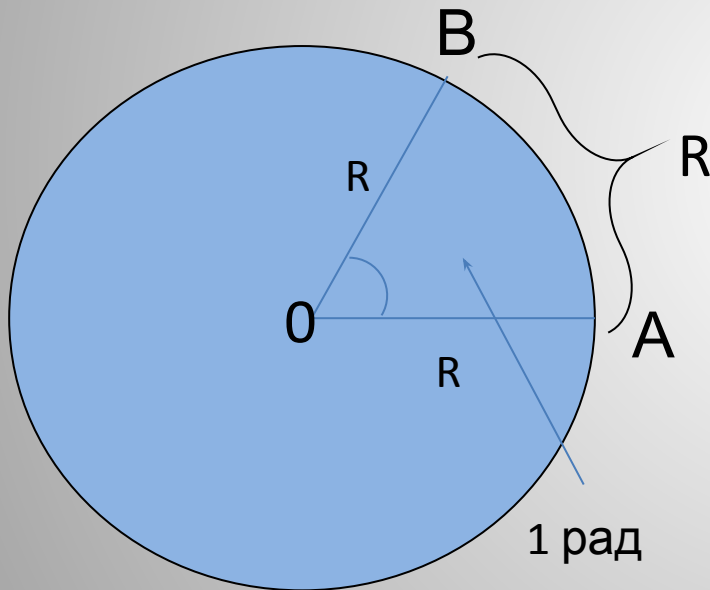
Радиянная мера угла

Единицной окружностью

называется окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Центральный угол,

опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

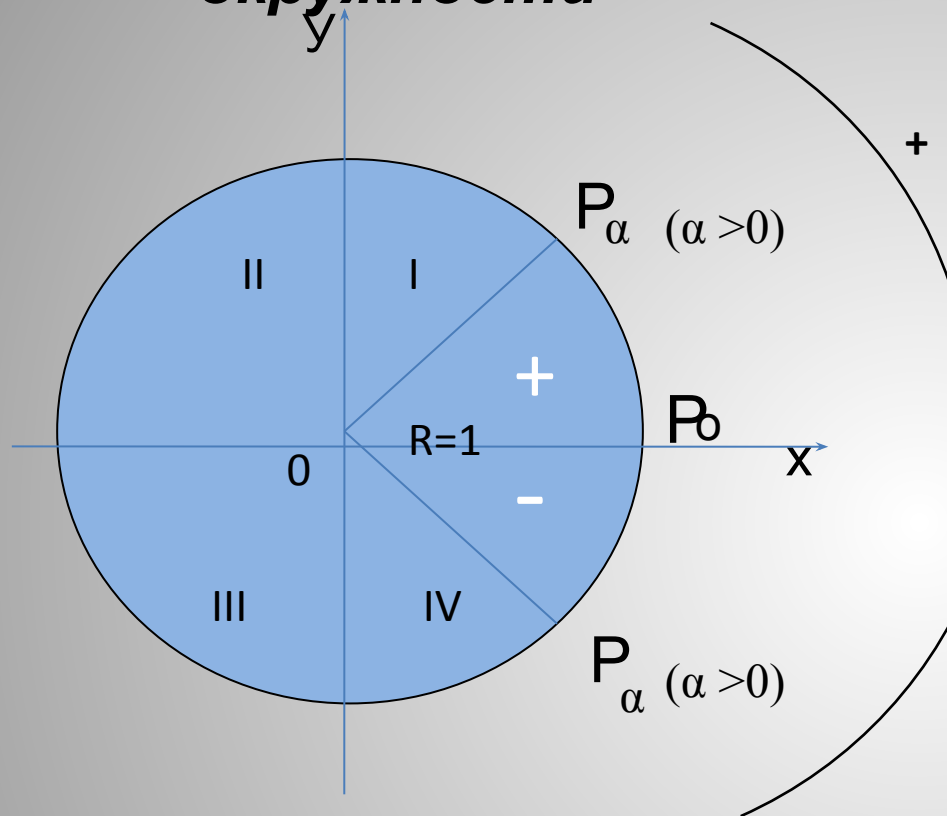


1 радиан = $\angle AOB \iff$ Длина $AB = OA = OB = R$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиан}$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

Положительные и отрицательные углы в окружности



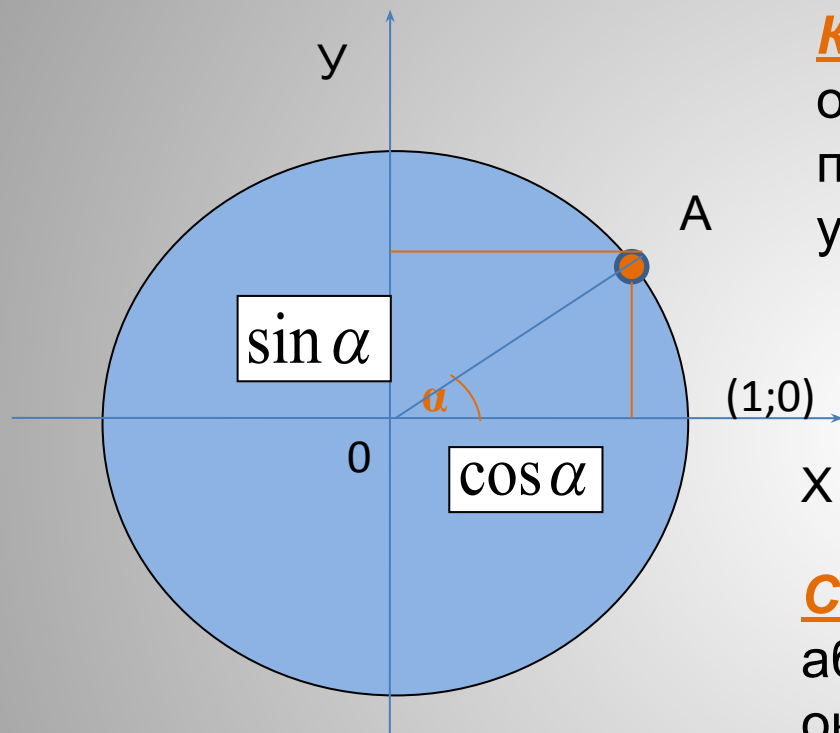
Начало отсчета углов - в точке (1;0)

$OP_0 \longrightarrow OP_\alpha \Leftrightarrow (\alpha > 0)$
повернули на угол α
против часовой стрелки

$OP_0 \longrightarrow OP_\alpha \Leftrightarrow (\alpha > 0)$
повернули на угол
по часовой стрелки

Угол поворота радиуса OP **против**
часовой стрелки считается **положительным**,
а **по** часовой --- **отрицательным**

Определение косинуса и синуса



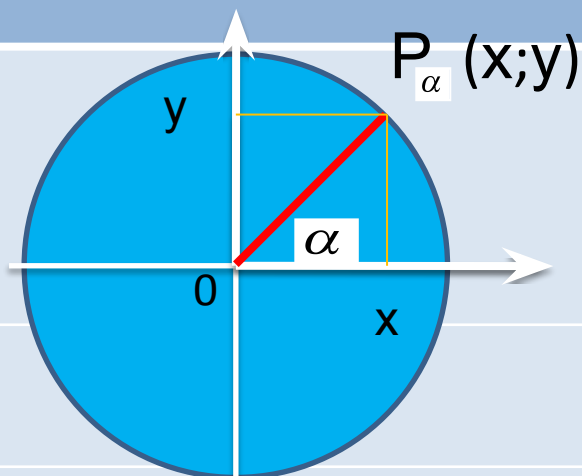
Косинусом угла α называется ордината точки единичной окружности, полученной при повороте точки $(1;0)$ на угол α радиан вокруг начала координат.

Синусом угла α называется абсцисса точки единичной окружности, полученной при повороте точки $(1;0)$ на угол α радиан вокруг начала координат

Тригонометрические функции угла и числового аргумента

Определение тригонометрических функций

Через единичную окружность (радиус равен 1)

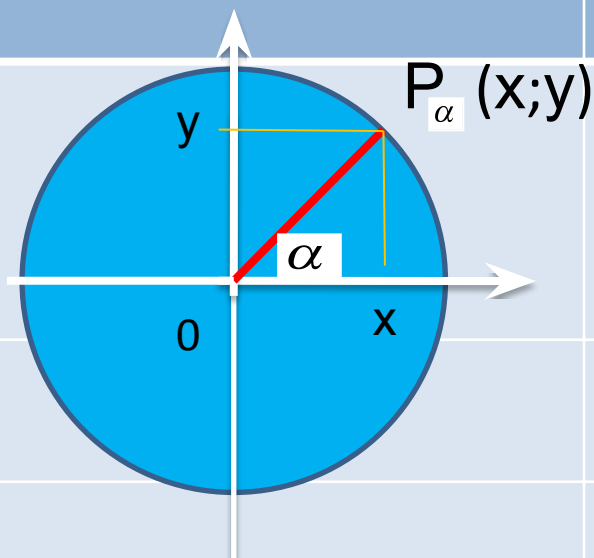


$\sin \alpha = y$ - ордината точки P
 $\cos \alpha = x$ - абсцисса точки P

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Через произвольную окружность



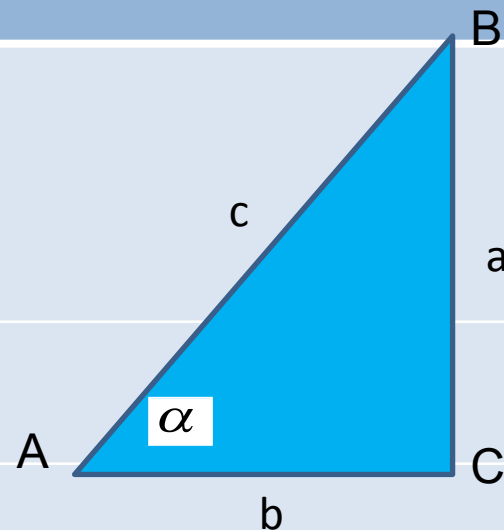
$$\sin \alpha = \frac{y}{R}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

Через прямоугольный треугольник (для острых углов)



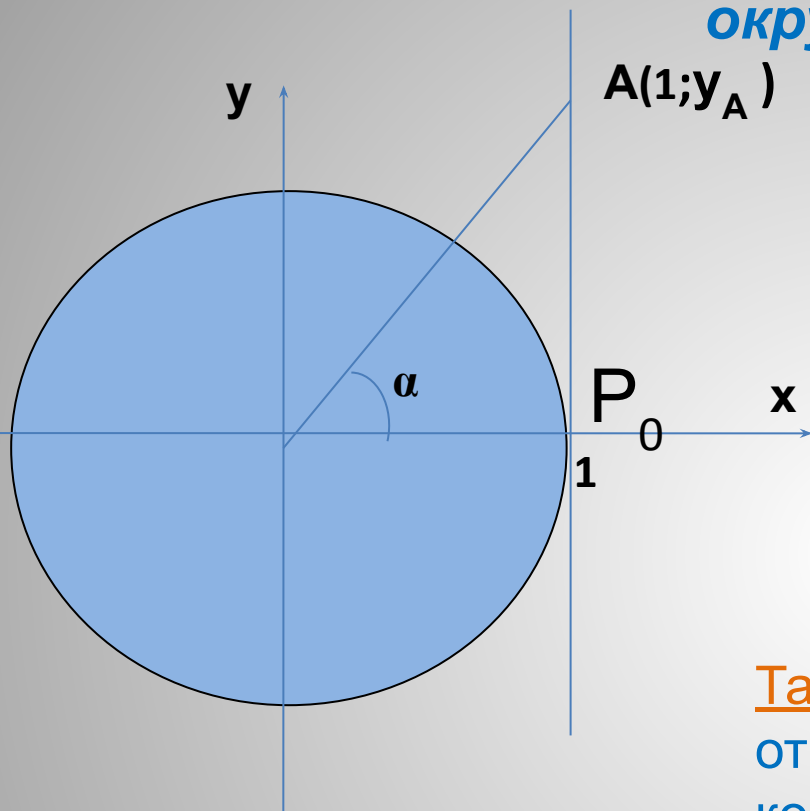
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Представление тангенса в единичной окружности



AP_0 - ось тангенсов
 $AP_0 \parallel OY$
 0

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

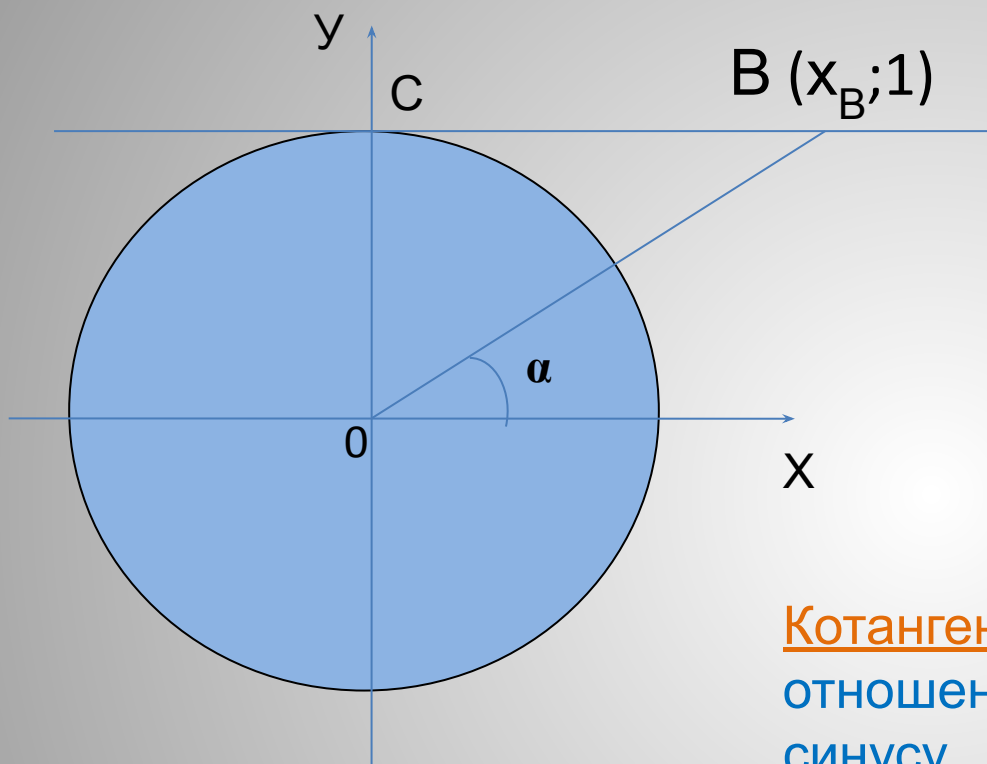
Тангенсом угла α называется
 отношение синуса угла α к его
 косинусу

По общему определению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_A}{1} = y_A$$

ордината соответствующей точки оси
 тангенсов

Представление котангенса в единичной окружности



CB -- ось котангенсов
CB || Oх

$$ctgx = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Котангенсом угла α называется
отношение косинуса угла α к его
синусу

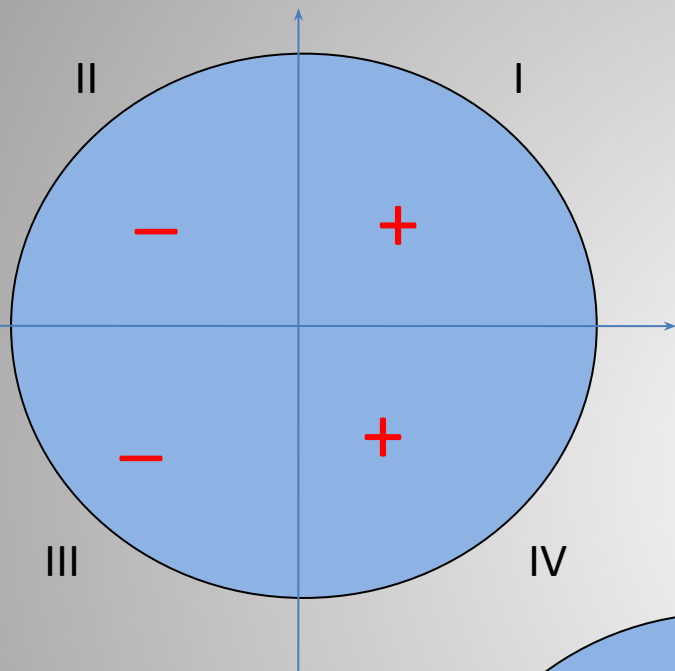
По общему
определению

$$ctg \alpha = \frac{x_B}{1} = X_B$$

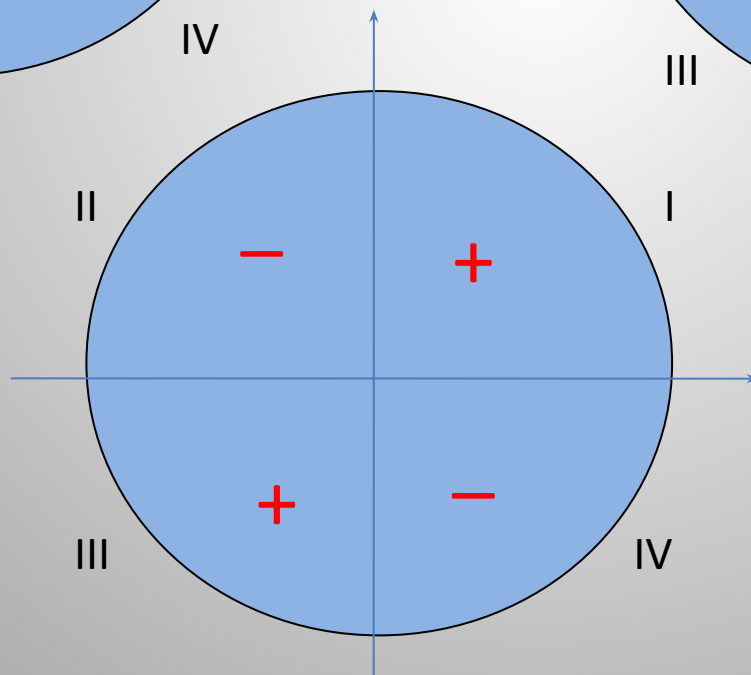
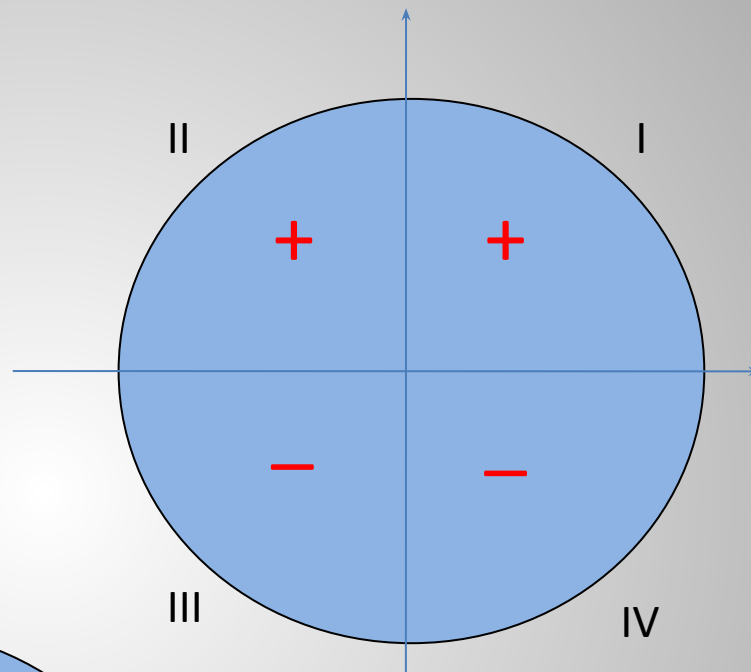
--- абсцисса соответствующей точки
оси котангенсов

Знаки тригонометрических функций

$\cos \alpha$



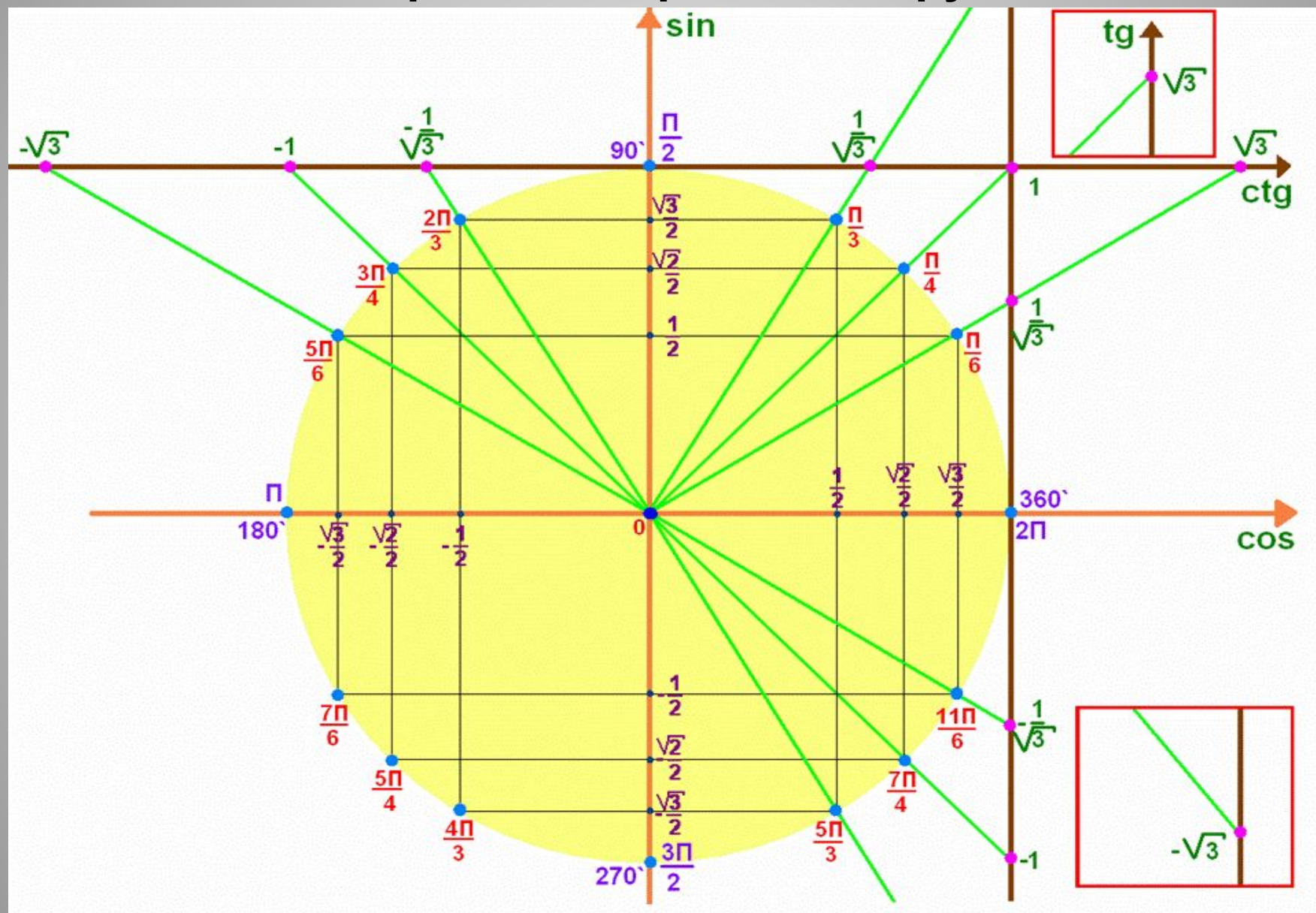
$\sin \alpha$



$\operatorname{Ctg} \alpha$

$\operatorname{tg} \alpha$

Тригонометрический круг



Значения тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Значения									
	0	0°	$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\pi}{2}$	90°
$\cos x$	1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		0	
$\sin x$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1	
$\operatorname{tg} x$	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$\sqrt{3}$		-	
$\operatorname{ctg} x$	-		$\sqrt{3}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0	

Единичная окружность соответствует 2π радиан

$$\begin{array}{lcl}
 (180^\circ = \pi \text{ радиан}) & \Rightarrow & 1 \text{ радиан} = 180^\circ / \pi \sim 57^\circ
 \end{array}$$

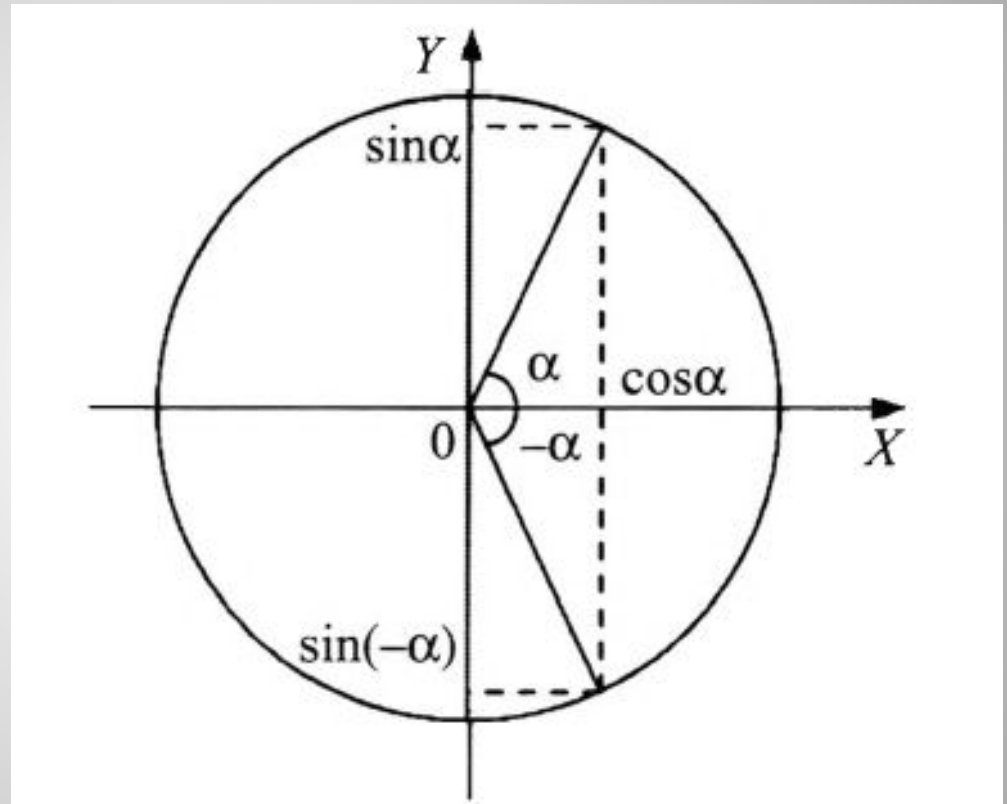
Тригонометрические функции противоположного аргумента

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

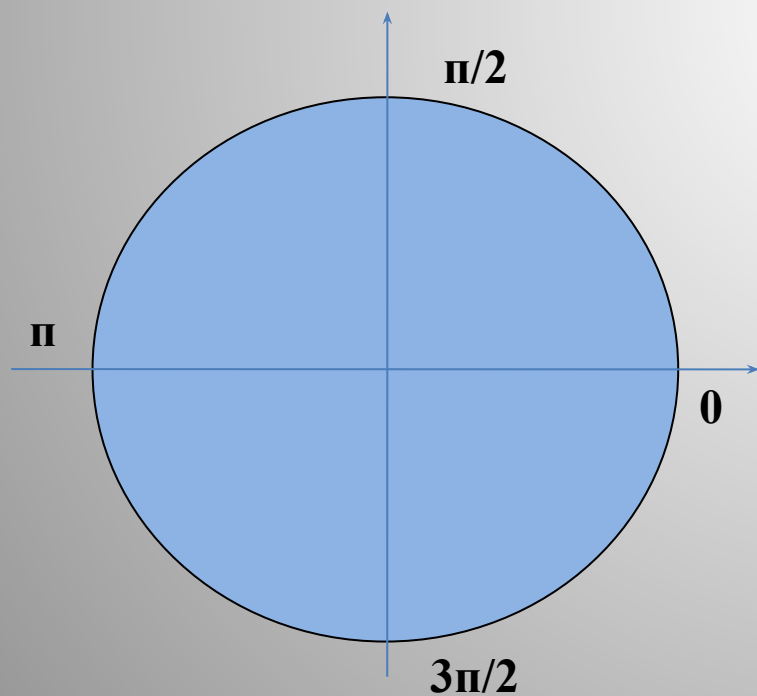
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$



Формулы приведения

Аргумент x Приводимая функция	$2\pi + \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi + \alpha$	$3/2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
Sin x					
Cos x					
Tg x					
Ctg x					

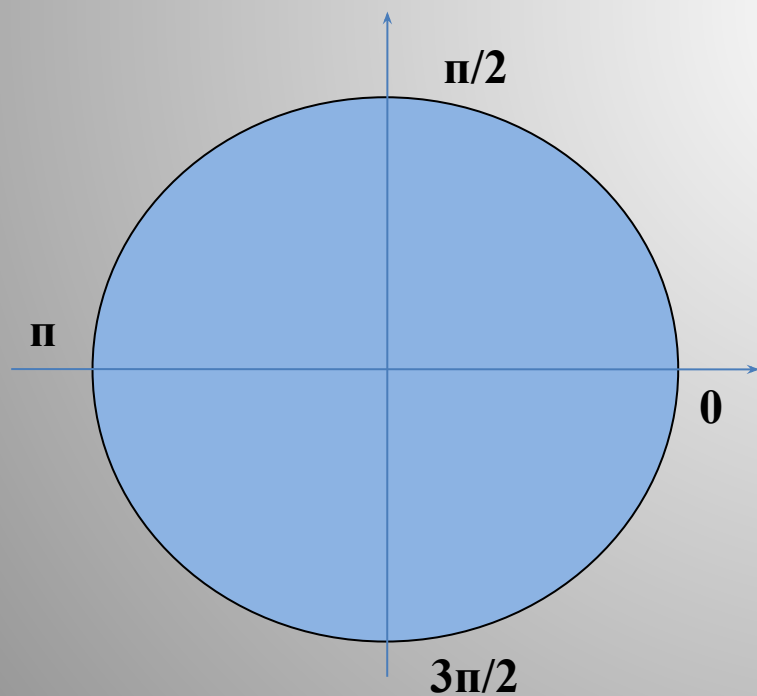


мнемоническое правило:

- Если аргумент изменяется на угол, кратный π , название функции не меняется.
- Если аргумент изменяется на угол, кратный $\pi/2$ (но не кратный π), название функции меняется на противоположное.
- Знак новой функции определяется знаком

Формулы приведения

Аргумент x Приводимая функция	$2\pi + \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi + \alpha$	$3/2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
Sin x	$+\sin t$	$+\cos t$	$-\sin t$	$-\cos t$	$-\sin t$
Cos x	$+\cos t$	$-\sin t$	$-\cos t$	$+\sin t$	$\cos t$
Tg x	$+\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$+\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{tg} t$
Ctg x	$+\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$+\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{ctg} t$



Мнемоническое правило:

- Если аргумент изменяется на угол, кратный π , название функции не меняется.
- Если аргумент изменяется на угол, кратный $\pi/2$, название функции меняется на противоположное.
- Знак новой функции определяется знаком исходной, считая, что $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Домашнее задание 1

1. $\frac{41 \cos 6^\circ}{\sin 84^\circ}.$
2. $\frac{33 \cos 23^\circ}{\sin 67^\circ}.$
3. $\frac{46 \cos 81^\circ}{\sin 9^\circ}.$
4. $50\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}.$
5. $36\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}.$

6. $32\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{4\pi}{3}.$
7. $24\sqrt{6} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{4}.$
8. $15\sqrt{2} \sin(315^\circ).$
9. $48\sqrt{2} \sin(-405^\circ).$
10. $\frac{40 \sin 165^\circ}{\sin 195^\circ}.$

11. $\frac{37 \sin 171^\circ}{\sin 189^\circ}.$
12. $\frac{48 \cos 76^\circ}{\cos 104^\circ}.$
13. $\frac{-32 \cos 96^\circ}{\cos 84^\circ}.$
14. $\frac{39 \operatorname{tg} 14^\circ}{\operatorname{tg} 166^\circ}.$
15. $16 \operatorname{tg} 173^\circ \cdot \operatorname{tg} 263^\circ.$

16. $-32 \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \operatorname{tg} 52^\circ.$
17. $16 \operatorname{tg} 54^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ.$
18. $\frac{-20}{\sin^2 3^\circ + \sin^2 93^\circ}.$
19. $\frac{-26}{\cos^2 66^\circ + \cos^2 156^\circ}.$
20. $\frac{-20 \sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}.$

ТРИГОНОМЕТРИ

Я **УРОК** **2**



Тригонометрические формулы

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ Основное тригонометрическое тождество		$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
		$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
		$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	
Двойные углы $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$		Синус суммы, косинус разности... $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$	
Сумма синусов, разность косинусов... $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$		Преобразование произведения в сумму $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$ $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)$ $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$	

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Упражнения (д.з. – чётные номера)

1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ и $\alpha \in (0, 5\pi; \pi)$.
2. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$.
3. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ и $\alpha \in (\pi; 1, 5\pi)$.
4. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (\pi; 1, 5\pi)$.
5. Найдите $-14 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,2$.
6. Найдите $21 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,9$.
7. Найдите $\frac{3 \sin 6\alpha}{5 \cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = -0,1$.
8. Найдите $5 \cos 3\alpha$, если $\sin 3\alpha = -0,8$.
9. Найдите $3 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, если $\sin \alpha = -0,28$ и $\alpha \in (\pi; 1, 5\pi)$.
10. Найдите $-9 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, если $\sin \alpha = -0,96$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$.
11. Найдите $-15 \cos(\frac{5\pi}{2} + \alpha)$, если $\cos \alpha = \frac{24}{25}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$.
12. Найдите $15 \cos(\frac{5\pi}{2} - \alpha)$, если $\cos \alpha = \frac{24}{25}$ и $\alpha \in (1, 5\pi; 2\pi)$.
13. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{5\pi}{2})$, если $\operatorname{tg} \alpha = 25$.
14. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{7\pi}{2})$, если $\operatorname{tg} \alpha = 20$.
15. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $6 \sin^2 \alpha + 11 \cos^2 \alpha = 10$.
16. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha$, если $4 \sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha = 6$.
17. Найдите $\frac{3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}{4 \sin \alpha + 6 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

18. Найдите $\frac{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}{5 \sin \alpha + \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.
19. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{6 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{6 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = 2$.
20. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{4 \sin \alpha - 10 \cos \alpha}{8 \sin \alpha + 3 \cos \alpha - 1} = -1$.
21. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{7 \sin \alpha + 4 \cos \alpha - 4}{2 \sin \alpha + \cos \alpha + 1} = \frac{1}{4}$.
22. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{4 \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 3}{4 \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 3} = \frac{1}{3}$.
23. Найдите значение выражения $4 \cos(\pi + \beta) + 3 \sin(\frac{-\pi}{2} + \beta)$, если $\cos \beta = -\frac{4}{7}$.
24. Найдите значение выражения $5 \cos(2\pi + \beta) + 2 \sin(\frac{3\pi}{2} + \beta)$, если $\cos \beta = -\frac{2}{3}$.
25. Найдите значение выражения: $\frac{42 \sin 28^\circ \cdot \cos 28^\circ}{\sin 56^\circ}$.
26. Найдите значение выражения: $\frac{44 \sin 53^\circ \cdot \cos 53^\circ}{\sin 106^\circ}$.
27. Найдите значение выражения: $\frac{15(\sin^2 69^\circ - \cos^2 69^\circ)}{\cos 138^\circ}$.
28. Найдите значение выражения: $\frac{29(\sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ)}{\cos 60^\circ}$.
29. Найдите значение выражения: $\sqrt{3} - \sqrt{12} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$.
30. Найдите значение выражения: $\sqrt{75} - \sqrt{300} \sin^2 \frac{17\pi}{12}$.